MSC 60G10

САМОПОДОБНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

***Ю.П. Вирченко, **А.Я. Дульфан**

*Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru
**Харьковский политехнический университет,
ул. Фрунзе, Харьков, Украина

Аннотация. Изучаются самоподобные случайные процессы. Установлено взаимно-однозначное соответствие между классом самоподобных процессов с фиксированным характеристическим показателем и классом стационарных процессов.

Ключевые слова: самоподобие, характеристический показатель, стационарные случайные процессы.

1. Введение. Фракталами, с физической точки зрения, называются такие структуры, которые ведут себя самоподобным образом при изменении в широком диапазоне пространственных и/или временных масштабов. Объектом теории фрактальных структур являются стохастические физические явления, у которых самоподобие должно пониматься в статистическом смысле (см., например, [1]). Поэтому, с математической точки зрения, фракталы должны описываться случайными полями (процессами), которые обладают инвариантностью при изменении масштабов. Утверждение о самоподобии случайного поля, хотя и является жёстким требованием к возможной вероятностной модели описываемого физического явления, но оно всё же имеет довольно общий характер и недостаточно для построения адекватной вероятностной феноменологической модели изучаемого явления и получения на её основе количественных результатов. Вследствие отсутствия общих физических принципов для построения фрактальных моделей физических фракталов, важно выполнить исследование возможно более широкого семейства подходящих математических моделей, совместимых с принципом самоподобия. В этом сообщении мы покажем, что изучение самоподобных случайных процессов, которые могут быть привлечены для моделирования фрактальной временной эволюции физических величин, может быть сведено к более традиционной для теории случайных процессов задаче – изучению стационарных процессов.

2. Самоподобные случайные процессы. Случайные самоподобные случайные процессы $\{a(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ определяются трансформационными свойствами при преобразовании подобия временной шкалы. Мы будем далее предполагать, что эти случайные процессы являются сепарабельными [2], то есть обладают «слабым вариантом» *стохастической непрерывности*. Без свойства сепарабельности процесса $\{a(t); t \in \mathbb{R}_+\}$, в общем случае, нельзя придать смысла вероятности того, что этот процесс не превосходит некоторого фиксированного значения a, изменяясь на некотором временном отрезке. В связи с этим, нельзя придать смысла понятию фрактальной размерности случайной реализации процесса.

Для сепарабельного случайного процесса $\{a(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ распределение вероятностей можно определить, согласно теореме Колмогорова [3], посредством набора частных многоточечных распределений для произвольной конечной совокупности временных точек. Эти многоточечные распределения должны удовлетворять требованиям согласованности. В случае, когда все многоточечные распределения имеют плотности

$$f_n(a_1, t_1\,; a_2, t_2\,; \,...\,; \,a_n, t_n) \; = \; \langle \delta(a(t_1) - a_1)\delta(a(t_2) - a_2) \ldots \delta(a(t_n) - a_n) \rangle \;,$$

условия согласованности выражаются в виде интегральных соотношений вида

$$f_n(a_1, t_1; ...; \cancel{a_j}, \cancel{t_j}\,; ...; a_n, t_n; a_{n+1}, t_{n+1}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{n+1}(a_1, t_1; ...; a_2, t_2; ...; a_n, t_n; a_{n+1}, t_{n+1}) da_j \,, \tag{1}$$

$j = 1, ..., n+1$; $n = 1, 2, \ldots$. Здесь знак $\langle \cdot \rangle$ обозначает усреднение по распределению вероятностей случайного процесса. Функции $f_n(a_1, t_1; a_2, t_2\,; \,...\,; \,a_n, t_n)$ имеют смысл плотностей распределения вероятностей того, что процесс $\{a(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ принимает в точках $t_1, t_2, ..., t_n$ соответственно значения $a_1, a_2, ..., a_n$.

Введём теперь точное понятие самоподобного сепарабельного случайного процесса. Требование стохастического самодобия, т.е. масштабной инвариантности распределения вероятностей для сепарабельных случайных полей сводится к тому, что многоточечные плотности распределения f_n, при масштабном изменении временной шкалы, преобразуются следующим образом:

$$(\mu(\lambda))^n f_n(\mu(\lambda)a_1, \lambda t_1\,; \mu(\lambda)a_2, \lambda t_2\,; \ldots;\, \mu(\lambda)a_n, \lambda t_n) \; =$$

$$= \; f_n(a_1, t_1\,;\, a_2, t_2\,;\, \ldots\,;\, a_n, t_n)\,, \tag{2}$$

где множитель $(\mu(\lambda))^n$ связан с сохранением нормировки плотности распределения f_n при преобразовании подобия. Так как этим уравнениям плотности f_n должны удовлетворять при произвольном значении $\lambda > 0$, то функция $\mu(\lambda)$ должна обладать групповым свойством

$$\mu(\lambda_1\lambda_2) = \mu(\lambda_1)\mu(\lambda_2)\,. \tag{3}$$

Групповое свойство навязывает простую форму масштабного множителя, $\mu(\lambda) = \lambda^c$, где c является *характеристическим показателем* самоподобного процесса $\{a(t); t \in \mathbb{R}_+\}$.

Самоподобные случайные процессы рассматривались ранее в работе [4]. Однако наиболее ранней публикацией на эту тему, по-видимому, следует считать работу [5].

Системы соотношений (1), (2) можно рассматривать, как уравнения, определяющие возможные самоподобные случайные процессы. Возникает математическая задача описания и классификации всех возможных самоподобных случайных процессов.

3. Теорема эквивалентности. Итак, для самоподобного процесса многоточечные плотности распределения обладают свойством

$$\lambda^{cn} f_n(\lambda^c a_1, \lambda t_1\,; \lambda^c a_2, \lambda t_2\,; \,\ldots\,; \,\lambda^c a_n, \lambda t_n) \; = \; f_n(a_1, t_1\,; a_2, t_2\,; \,\ldots\,; \,a_n, t_n)\,. \tag{4}$$

при любом $\lambda > 0$ с фиксированным показателем c, который является характеристикой процесса. Введём логарифмическую шкалу, положив $s = \ln t$ при $t > 0$. Тогда процесс $a(e^s)$ имеет многоточечные плотности распределения распределения

$$g_n(a_1, s_1; ...; a_n, s_n) = f_n(a_1, e^{s_1}; ...; a_n, e^{s_n}).$$

Положим в (4) $\lambda = \ln \tau$. Тогда получим, что плотности g_n обладают свойством

$$e^{c\tau n} g_n(e^{c\tau} a_1, s_1 + \tau; ...; e^{c\tau} a_n, s_n + \tau) = g_n(a_1, s_1; ...; a_n, s_n). \tag{5}$$

Определим, теперь, случайный процесс $\{b(s) = e^{-cs} a(e^s); s \in \mathbb{R}\}$, многоточечные плотности распределения которого обозначим как $h_n(b_1, s_1; ...; b_n, s_n)$. Так как

$$h_n(b_1, s_1; ...; b_n, s_n) = \langle \delta(b(s_1) - b_1) ... \delta(b(s_n) - b_n) \rangle =$$
$$= \left\langle \delta\left(e^{-cs_1} a(e^{s_1}) - b_1\right) ... \delta\left(e^{-cs_n} a(e^{s_n}) - b_n\right) \right\rangle, \tag{6}$$

то, на основании правила преобразования δ-функции,

$$h_n(b_1, s_1; ...; b_n, s_n) =$$
$$= \exp(c(s_1 + ... + s_n)) \langle \delta(a(e^{s_1}) - e^{cs_1} b_1) ... \delta(a(e^{s_n}) - e^{cs_n} b_n) \rangle =$$
$$= \exp(c(s_1 + ... + s_n)) g_n(b_1 e^{cs_1}, s_1; ...; b_n e^{cs_n}, \tau_n).$$

Тогда

$$h_n(b_1, s_1 + \tau; ...; b_n, s_n + \tau) =$$
$$= e^{c\tau n} \exp(c(s_1 + ... + s_n)) g_n\left(b_1 e^{c(s_1+\tau)}, s_1 + \tau; ...; b_n e^{c(s_n+\tau)}, s_n + \tau\right) =$$

Используя теперь свойство (5) плотностей g_n запишем правую часть в виде

$$\exp(c(s_1 + ... + s_n)) [e^{c\tau n} g_n\left(b_1 e^{c(s_1+\tau)}, s_1 + \tau; ...; b_n e^{c(s_n+\tau)}, s_n + \tau\right)] =$$
$$= \exp(c(s_1 + ... + s_n)) g_n(b_1 e^{cs_1}, s_1; ...; b_n e^{cs_n}, s_n) = h_n(b_1, s_1; ...; b_n, s_n).$$

Отсюда следует, что многоточечные плотности распределения h_n процесса $\{b(s); s \in \mathbb{R}\}$ трансляционно инвариантны по временным аргументам, $s_1, ..., s_n$. Процессы, обладающие таким свойством называются *стационарными* (в узком смысле) [2].

Проведенные выше рассуждения очевидным образом справедливы и в обратном направлении. Взяв произвольный стационарный процесс $\{b(s); s \in \mathbb{R}\}$, который определяется трансляционно инвариантными многоточечными плотностями h_n, и построив процесс $\{a(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ по формуле

$$a(e^s) = e^{cs} b(s), \tag{7}$$

мы получим, что он является самоподобным с показателем c. Сформулируем полученный результат.

Теорема. *Класс самоподобных случайных процессов $\{a(s); s \in \mathbb{R}_+\}$ с фиксированным показателем самоподобия $c \in \mathbb{R}$ находится во взаимно-однозначном соответствии с классом стационарных процессов $\{b(s); s \in \mathbb{R}\}$, которое устанавливается формулой $a(e^s) = e^{cs}b(s)$ для траекторий обоих процессов так, что соответствующие им наборы многоточечных плотностей распределения f_n и h_n, $n =\in \mathbb{N}$ распределения вероятностей связаны формулой*

$$\exp\left(c(s_1 + ... + s_n)\right) f_n\left(a_1 e^{cs_1}, e^{s_1}; ... ; a_n e^{cs_n}, e^{s_n}\right) = h_n(a_1, s_1; ... ; a_n, s_n)\,.$$

Тем самым задача об описании самоподобных случайных процессов сводится к задаче описания совокупности стационарных процессов.

4. Марковские самоподобные процессы. Рассмотрим марковские процессы. Их плотности f_n строятся согласно формуле

$$f_n(a_1, t_1\,; ...\,; a_n, t_n) \;=\; f(a_n, t_n; a_{n-1}, t_{n-1}) ... f(a_2, t_2; a_1, t_1) f_1(a_1, t_1)\,, \qquad (8)$$

где $t_1 < ... < t_n$ и $f(a, t; a', t')$ – плотность условных вероятностей перехода из точки a' в момент t' в точку a в момент t. Плотность $f(a_2, t_2; a_1, t_1)$ удовлетворяет уравнению Чепмена-Колмогорова

$$f(a, t; a', t') \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(a, t; a'', t'') f(a'', t''; a', t') da'' \qquad (9)$$

для любых a, a', t, t'. Тогда плотности f_n, определённые согласно (8), автоматически подчинены соотношениям согласованности (1).

Для самоподобных марковских процессов плотность условной вероятности перехода должна, как следует из (8), (9), обладать свойством

$$\lambda^c f(\lambda^{a, \lambda t; \lambda^c a', \lambda t'}) = f(a, t; a', t')\,.(10)$$

С другой стороны, применяя преобразование (7) находим, что стационарный процесс $\{b(s); s \in \mathbb{R}\}$, соответствующий процессу $\{a(t); t \in \mathbb{R}_+\}$, должен быть марковским, так как функция $h(b, s; b', s') = e^{cs} f\left(be^{cs}, e^s; b'e^{cs'}, e^{s'}\right)$ удовлетворяет уравнению Чепмена-Колмогорова и плотности h_n для процесса $\{b(s); s \in \mathbb{R}\}$ строятся по формуле аналогичной (8). Наконец, из (10) следует, что функция $h(b, s; b', s')$ инвариантна относительно одновременного сдвига аргументов s и s', т.е. зависит от разности $(s - s')$.

Таким образом стационарный процесс $b(\tau)$ должен быть марковским и обратно по каждой функции $h(b, s; b', s')$ марковского стационарного процесса выбором показателя c может быть построен соответствующий марковский самоподобный процесс.

Пример. Классическим примером самоподобного процесса является винеровский процесс $\{w(t); t \in \mathbb{R}_+\}$, моделирующий броуновское движение. Условная вероятность перехода винеровского процесса определяется формулой

$$f(a, t; a', t') \;=\; (2\pi\sigma(t - t'))^{-1/2} \exp\left(-\frac{(a - a')^2}{2\sigma(t - t')}\right)\,, \quad t > t'\,. \qquad (11)$$

Для винеровского процесса $c = 1/2$ и, следовательно,

$$h(b, s; b', s') = \left(2\pi\sigma\left(1 - e^{(s'-s)}\right)\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(b - b'e^{(s'-s)/2})^2}{2\sigma\left(1 - e^{(s'-s)}\right)}\right), \quad s > s'. \tag{12}$$

Стационарный марковский процесс с плотностью условных вероятностей перехода такого вида называется процессом Орнштейна-Уленбека [6].

Литература

1. Федер Е. Фракталы / М.: Мир, 1991.
   Feder J. Fractals / New York-London: Plenum Press, 1988.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайные процессов. т.I / М.: Наука, 1971.
3. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей / М.: Наука, 1974.
4. Lamperti J. Semi-stable stochastic processes. Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – 104, 1. – C.62-78.
5. Колмогоров А.Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве. ДАН СССР. – 1940. – 26; 2. – С.115-118.
6. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках / М.: Мир, 1986.
   Gardiner C.W. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, 2d ed. / Berlin: Springer-Verlag, 1985.

SELF-SIMILAR RANDOM PROCESSES

Yu.P. Virchenko, A.Ya. Dulfan

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. Self-similar random processes are studied. It is found the взаимно-однозначное correspondence between the class of self-similar processes with fixed characteristic power and the class of stationary processes.

Key words: self-similarity, characteristic power, stationary random processes.