На правах рукописи

Арланова Екатерина Юрьевна

Нелокальные краевые задачи для уравнений гиперболического и смешанного типов

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Белгород – 2009

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, Репин Олег Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, Зарубин Александр Николаевич
	кандидат физико-математических наук, доцент, Андреев Александр Анатольевич
Ведущая организация:	Казанский государственный университет

Защита состоится 14 апреля 2009 г. в 16.30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.015.08 при Белгородском государственном университете, расположенном по адресу: 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, д. 14, ауд. 407.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белгородского государственного университета.

Автореферат разослан «____ »____________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета *Прядиев В.Л.*

1. Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию нелокальных краевых задач для уравнения влагопереноса и для уравнения смешанного типа, представленного в верхней полуплоскости уравнением дробной диффузии, в нижней — уравнением влагопереноса в ограниченных областях.

Уравнение влагопереноса играет заметную роль во многих областях науки. В 1965 году это уравнение было получено известным теплофизиком А. В. Лыковым методами термодинамики необратимых процессов для плотности потока влаги в коллоидном капиллярно-пористом теле поликапиллярной структуры. В биологии оно характеризует поток биомассы микробной популяции в биологическом реакторе.

Однако было бы исторической несправедливостью утверждать, что уравнением влагопереноса впервые заинтересовались физики. В своей книге, вышедшей в 1959 г., А. В. Бицадзе рассматривает уравнение $y^2u_{xx}-u_{yy}+au_x=0$ как пример уравнения $y^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x,\,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,\,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,\,y)u=0$, для которого при $|a|\le 1$ задача Коши с начальными данными на линии параболического вырождения корректна, несмотря на то, что нарушено условие Геллерстедта $\lim\limits_{y\to+0}y^{1-\frac{m}{2}}a(x,\,y)=0$. Поэтому уравнение влагопереноса также называют уравнением Бицадзе—Лыкова. Еще ранее К. И. Карапетян установил корректность задачи Коши для уравнения влагопереноса в случае $|a|\le 1/11$, $a=1/2$; Чи Минь-ю исследовал эту задачу при более повышенном требовании на гладкость начальных данных. Уравнение влагопереноса с точки зрения математики интересно еще и тем, что в случае $a=1$ вторая задача Дарбу оказывается некорректно поставленной.

На необходимость рассмотрения задач сопряжения, когда в одной части области задано параболическое уравнение, в другой — гиперболическое, было указано в 1959 г. И. М. Гельфандом. Он приводит пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой: в канале движение описывается волновым уравнением, вне его — уравнением диффузии.

На сегодняшний день в математической литературе имеются многочисленные работы, в которых изучены нелокальные задачи. Для уравнения влагопереноса можно привести работы А. М. Нахушева, Т. Ш. Кальменова, С. К. Кумыковой, А. А. Килбаса, О. А. Репина, М. Сайго, для уравнений смешанного типа — статьи Г. М. Стручиной, С. И. Гайдука, А. В. Иванова, Л. А. Золиной, Х. Б. Бжихатлова, А. М. Нахушева, А. П. Солдатова, В. Н. Абрашина, В. А. Елеева, О. А. Репина, А. А. Килбаса, А. Н. Зарубина, А. В. Псху, А. А. Керефова.

Отличительной особенностью задач, рассмотренных в диссертации, является наличие в краевых условиях операторов дробного интегродифференцирования М.Сайго, а также модификации операторов Кобера—Эрдейи. Эти операторы представляют собой обобщение широкоизвестных дробных интегралов и производных Римана—Лиувилля, которые имеют многочисленные практические приложения.

Таким образом, уравнение влагопереноса и уравнения параболо-гиперболического типа, а также краевые задачи для них, вызывают большой практический и теоретический интерес. Помимо этого, важным аспектом исследования подобного рода задач является получение новых результатов в теории дробного интегродифференцирования и в области дифференциальных, интегральных уравнений. Несмотря на то, что диссертационная работа носит теоретический характер, ее результаты могут получить хорошую физическую интерпретацию.

Цель работы. Основной целью исследования является постановка новых нелокальных задач для уравнения влагопереноса и параболо-гиперболического уравнения, в верхней полуплоскости представленного уравнением дробной диффузии, в нижней — уравнением влагопереноса и доказательство теорем существования и единственности решения этих задач.

Методика исследований. При доказательстве единственности и существования решений поставленных задач широко используется аппарат специальных функций, методы теории интегральных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, свойства обобщенных операторов дробного интегро-дифференцирования.

Научная новизна. Все результаты являются новыми. В числе наиболее важных следует отметить:

а) для уравнения влагопереноса (гиперболического типа) получено решение задач со смещением, краевые условия которых содержат линейную комбинацию операторов типа Кобера—Эрдейи и М. Сайго. При этом представлен большой диапазон изменения функций и констант, входящих в краевые условия;

б) для системы дифференциальных уравнений в частных производных с двумя переменными рассмотрены задача Дарбу, для которой доказана корректность задачи, и нелокальная краевая задача, для которой получены условия неединственности;

в) для уравнения влагопереноса при различных значениях коэффициента при младшей производной доказаны теоремы существования и единственности решений краевых задач, содержащих операторы в смысле Кобера—Эрдейи и М. Сайго;

г) для параболо-гиперболического уравнения с дробной производной в ограниченной области решены нелокальные краевые задачи. Решения этих задач получены в замкнутой форме с использованием функций типа Миттаг—Леффлера.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и методы исследования представляют научный интерес и могут быть использованы для дальнейшей разработки теории нелокальных краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типов, а также для решения прикладных задач, приводящихся к таким уравнениям.

Апробация работы Основные результаты диссертации докладывались на Первой и Четвертой Всероссийских научных конференциях «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, май 2004 г., май 2007 г.); 5-й Международной конференции молодых ученых и студентов «Актуальные проблемы современной науки» (Самара, сентябрь 2004 г.); XXXI Самарской областной студенческой конференции (Самара, апрель 2005 г.); Международной конференции «Современные методы физико-математических наук» (Орел, октябрь 2006 г.); семинарах кафедры прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета (руководитель — д.ф.-м.н., профессор В.П. Радченко, декабрь 2007 г., декабрь 2008 г.); VI Школе молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (Нальчик–Эльбрус, май 2008 г.); международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (Стерлитамак, июнь 2008 г.); семинаре кафедры прикладной математики Казанского государственного университета (руководитель — д.ф.-м.н., профессор Н.Б. Плещинский, декабрь 2008 г.); научно-исследовательском семинаре по дифференциальным уравнениям Белгородского государственного университета (руководитель — д.ф.-м.н., профессор А.П. Солдатов, февраль 2009 г.).

Публикации Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[15]. Часть результатов п.п. 2.1.2, 2.3.1 главы 2 получена в совместных работах с профессором О. А. Репиным (Россия, Самарский государственный технический университет) — см. [7], доцентом Е. Н. Огородниковым (Россия, Самарский государственный технический университет) — см. [1], [2], [4]–[6]. В совместных работах соавторам принадлежат постановка задач и идея доказательств, а автору диссертации — точные формулировки и доказательства утверждений. Публикации [4] и [15] входят в список публикаций, рекомендованных в ВАК.

Структура и объем диссертации Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, которые разбиты на двенадцать параграфов, заключения, списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 126 страниц. Список литературы содержит 102 наименования.

2. Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава диссертации посвящена операторам обобщенного дробного интегродифференцирования в смысле Сайго $\left(I_{0+}^{\alpha,\,\beta,\,\eta} f\right)(x)$, $\left(I_{1-}^{\alpha,\,\beta,\,\eta} f\right)(x)$. Показано, что дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля $\left(I_{0+}^{\alpha} f\right)(x)$, $\left(I_{1-}^{\alpha} f\right)(x)$, $\left(D_{0+}^{\alpha} f\right)(x)$, $\left(D_{1-}^{\alpha} f\right)(x)$ и операторы дробного интегродифференцирования типа Кобера–Эрдейи $\left(E_{0+}^{\alpha,\,\eta} f\right)(x)$, $\left(E_{1-}^{\alpha,\,\eta} f\right)(x)$ являются их частным случаем. Из многочисленных свойств операторов обобщенного дробного интегродифференцирования Сайго и типа Кобера–Эрдейи, дробных интегралов и производных Римана–Лиувилля выписаны необходимые в дальнейшем, причем некоторые из них с доказательством.

Вторая глава диссертации посвящена нелокальным краевым задачам для уравнения влагопереноса в случаях $|a| < 1$, $a = 1$, $a = -1$.

В параграфе 2.1 рассматриваются краевые задачи с одним нелокальным условием для уравнения влагопереноса при $|a| \le 1$.

В пункте 2.1.1 рассматривается уравнение влагопереноса

$$Lu = y^2 u_{xx} - u_{yy} + a u_x = 0, \quad |a| < 1, \tag{1}$$

в характеристической области D, ограниченной интервалом $J = (0,\, 1)$ и характеристиками данного уравнения $AC = \left\{(x,\, y) : \, x - \frac{y^2}{2} = 0,\, y \le 0\right\}$ и $BC = \left\{(x,\, y) : x + \frac{y^2}{2} = 1, y \le 0\right\}$. За $\Theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\sqrt{x}\right)$ и $\Theta_1(x) = \left(\frac{1+x}{2}, -\sqrt{1-x}\right)$ принимаются точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из произвольной точки $x \in (0,\, 1)$, с характеристиками AC и BC соответственно.

Формулируется задача 2.1.

Задача 2.1. Найти функцию $u(x,\, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) при $|a| < 1$ в области D и краевым условиям

$$A(x)\left(E_{0+}^{\alpha_1,\, \frac{a-3}{4} - \alpha_1} u[\Theta_0(t)]\right)(x) + B(x)\left(I_{1-}^{\alpha_2,\, \beta_2,\, -\alpha_2 - \frac{a+3}{4}} u[\Theta_1(t)]\right)(x) = C(x),$$

$$u(x,\, 0) = \tau(x),$$

где $A^2(x) + B^2(x) \ne 0$, $\forall x \in \overline{J}$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $\tau(x)$ — заданные гладкие функции, α_1, α_2, β_2 — заданные константы, на которые в дальнейшем будут наложены необходимые условия.

Новизна постановки заключается в том, что в задаче рассматриваются все возможные вариации значений функций и констант, входящих в краевые условия, а сами условия содержат операторы Кобера–Эрдейи и М. Сайго.

Полученные результаты формулируются в виде следующих теорем.

Теорема 2.1.1. Пусть $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C'(\overline{J})$, $\tau(x) \in C'(\overline{J}) \cap C^2(J)$, $B(x) \neq 0$ $\forall x \in \overline{J}$, $\alpha_2 = -\frac{a+3}{4}$, $\beta_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 > \frac{a-3}{4}$. Тогда решение задачи 2.1 существует и единственно.

Теорема 2.1.2. Пусть $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C'(\overline{J})$, $\tau(x) \in C'(\overline{J}) \cap C^2(J)$, $A(x) \neq 0$ $\forall x \in \overline{J}$, $\alpha_1 = \frac{a-3}{4}$, $\alpha_2 > -\frac{a+1}{4}$, $\frac{1}{2} < \beta_2 < 1$. Тогда решение задачи 2.1 существует и единственно.

Теорема 2.1.3. Пусть в условиях теоремы 2.1.2 $\alpha_1 = \frac{a-3}{4}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{2}$. Тогда решение задачи 2.1, вообще говоря, не единственно.

Теорема 2.1.4. Пусть $\alpha_1 = \frac{a-3}{4}$, $-\frac{a+5}{4} < \alpha_2 < -\frac{a+3}{4}$, $\beta_2 = \frac{3}{2}$, $B(x) = (1-x)^\delta B_1(x)$, $\delta \geq \frac{3}{2}$. $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C(\overline{J}) \cap C'(J)$, $A(x) \neq 0$, $B_1(x) \neq 0$ $\forall x \in \overline{J}$, $\tau(x) \in C'(\overline{J}) \cap C^3(J)$. Тогда задача 2.1 имеет более одного решения.

В пункте 2.1.2 для той же области D ставится следующая задача.

Задача 2.2. Найти функцию $u(x,\, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) при $|a| < 1$ в области D и краевым условиям

$$\begin{gathered} A(x)u\left[\Theta_1(x)\right] = B(x)u(x,\, 0) + \varphi(x), \\ u_y(x,\, 0) = \nu(x), \end{gathered}$$

где $A(x)$, $B(x)$, $\varphi(x)$, $\nu(x)$ — известные функции, такие что

$$A(x),\, B(x),\, \varphi(x),\, \nu(x) \in C[0,\, 1] \cap C^2(0,\, 1).$$

Доказана однозначная разрешимость этой задачи.

Также в этом пункте рассматриваются частные случаи задачи 2.2 при $a = 1$ и $a = -1$.

В качестве замечания отмечено, что обобщенные операторы дробного дифференцирования могут успешно применяться при решении краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Рассматривается система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0; \\ y^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathbf{u}(x,\, y) = (u_1;\, u_2)^T$ — вектор искомых функций, в области D, ограниченной отрезком $[0,\, 1]$ линии ее параболического вырождения $y = 0$ и характеристиками $\xi = x - \frac{y^2}{2} = 0$ и $\eta = x + \frac{y^2}{2} = 1$.

Систему уравнений (2) можно записать в векторной форме:

$$y^2 \mathbf{u}_{xx} - \mathbf{u}_{yy} + A\mathbf{u}_x = 0,$$

где матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и является простейшим примером инволютивной матрицы.

Для этой системы дифференциальных уравнений изучена нелокальная задача

$$A_0(x)\mathbf{u}\left[\Theta_i(x)\right] = B_0(x)\mathbf{u}(x,\,0) + \mathbf{c}_0(x),$$
$$\mathbf{u}_y(x,\,0) = \nu(x),$$

где $A_0(x)$, $B_0(x)$ — известные функциональные $[2\times 2]$-матрицы, $\mathbf{c}_0(x)$, $\nu(x)\in C[0,\,1]\cap C^2(0,\,1)$ — заданные вектор-функции.

Найдено единственное решение этой задачи.

Для системы (2) рассмотрена следующая задача.

Задача Дарбу. Найти регулярное в D решение системы уравнений (2) с условиями

$$\begin{gathered} u_1\left[\Theta_0(x)\right] = \varphi(x), \quad u_2\left[\Theta_1(x)\right] = \psi(x), \quad x\in[0,\,1], \\ \mathbf{u}_y(x,\,0) = \nu(x), \quad x\in(0,\,1). \end{gathered} \tag{3}$$

Эта задача рассматривалась в работе Е. Н. Огородникова, однако решение ее не приводилось, а окончательные выражения для компонент вектора $\tau(x)$ опубликованы в неполном и искаженном виде. Нами решение задачи было уточнено, а результат сформулирован в теореме.

Теорема 2.1.5. Пусть вектор-функции $\nu(x), \varphi(x), \psi(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$. Тогда существует единственное в области D решение задачи Дарбу для системы уравнений (2).

В пункте 2.1.3 для уравнения влагопереноса (1) при $a=-1$ в области D рассматривается следующая краевая задача.

Задача 2.2.1. Найти функцию $u(x,\,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) при $a=-1$ в области D и краевым условиям

$$u(x,\,0) = \tau(x) \quad (x\in[0,\,1])$$
$$A\left(D^{\alpha}_{0+}u\left[\Theta_0(t)\right]\right)(x) + B\left(I^{\frac{1}{2}-\alpha,\,\beta,\,\alpha-1}_{1-}u\left[\Theta_1(t)\right]\right)(x) = g(x) \quad (x\in(0,\,1)),$$

где A, B, α, β — ненулевые вещественные константы, удовлетворяющие условиям:

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1, \quad \beta < 0, \quad \alpha-\beta > 1, \tag{4}$$

$\tau(x)$ и $g(x)$ — известные функции, причем

$$\begin{gathered} \tau(0)=0, \quad \tau(x)\in H^{\lambda_1}[0,\,1]\cap C^2(0,\,1), \quad g(x)\in H^{\lambda_2}[0,\,1]\cap C^2(0,\,1), \\ \alpha-\tfrac{1}{2} < \lambda_1 \le 1, \quad 1-\alpha < \lambda_2 \le 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Будем искать решение задачи 2.1.1 в классе таких функций $u(x,\,y)$, что $\lim\limits_{y\to 0-} u_y(x,\,y) = \nu(x)\in H^{\lambda}[0,\,1]$, $0<\lambda<\alpha$, $\lambda+\alpha>1$.

Эта задача является продолжением исследований работы А. А. Килбаса, О. А. Репина и М. Сайго, где была исследована задача при $a=1$.

Доказывается, что разрешимость задачи 2.2.1 сводится к вопросу разрешимости характеристического сингулярного уравнения на конечном отрезке. Решение задачи дается в явном виде.

Теорема 2.1.7. Если справедливы неравенства (4) и выполняются условия (5), то решение задачи 2.2.1 существует и оно единственно.

В параграфе 2.2 рассматриваются нелокальные задачи для уравнения влагопереноса (1) при $|a| \leq 1$, когда краевые условия содержат операторы М. Сайго и типа Кобера-Эрдейи.

Задача 2.3. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

1) $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению влагопереноса (1) при $|a| < 1$ в области D;

2) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup (0, 1)) \cap C^2(D)$;

3) $$A_0 \left(E_{0+}^{a_1, \frac{a-3}{4} - a_1} u\left[\Theta_0(t)\right] \right)(x) = B_0 \left(E_{0+}^{a_1 + \frac{1-a}{4}, \frac{a-3}{4} - a_1} u(t, 0) \right)(x) + C_0 \lim_{y \to 0-} u_y(x, y) + f_0(x);$$

$$A_1 \left(I_{1-}^{a_2, b_2, -a_2 - \frac{a+3}{4}} u\left[\Theta_1(t)\right] \right)(x) = B_1 \left(I_{1-}^{a_2 + \frac{a+1}{4}, b_2, -a_2 - \frac{a+3}{4}} u(t, 0) \right)(x) + C_1 \left(I_{1-}^{a_2 + \frac{a+3}{4}, b_2 - \frac{1}{2}, -a_2 - \frac{a+3}{4}} \lim_{y \to 0-} u_y(t, y) \right)(x) + f_1(x),$$

где $f_0(x)$, $f_1(x)$ — заданные функции такие, что $f_0(x), f_1(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1, a_1, a_2, b_2 — заданные константы такие, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) A_0 = \Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right) B_0$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) A_1 - \Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right) B_1 \neq 0$, $C_0 \neq 0$, $\frac{a-3}{4} < a_1 < \frac{a+3}{4}$, $a_2 > 0$.

Доказывается, что однозначная разрешимость задачи 2.3 сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтерра, которое имеет единственное решение. Полученный результат формулируется с помощью теоремы.

Теорема 2.2.1. Пусть функции $f_0(x)$, $f_1(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, действительные константы A_1, B_1, C_0, C_1, a_1, a_2, b_2 удовлетворяют условиям $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) A_0 = \Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right) B_0$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) A_1 - \Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right) B_1 \neq 0$, $C_0 \neq 0$, $\frac{a-3}{4} < a_1 < \frac{a+3}{4}$, $a_2 > 0$. Тогда задача 1)–3) имеет единственное решение.

Далее, в этом же параграфе исследуются задачи 2.3.1 и 2.3.2, аналогичные по постановке и решению задаче 2.3. Главное отличие заключается в том, что задача 2.3.1 посвящена уравнению влагопереноса в случае $a = 1$, а задача 2.3.2 — в случае $a = -1$.

В параграфе 2.3 для уравнения (1) рассматривается задача, в которой след искомого решения и нормальная производная связаны обобщенными операторами дробного интегродифференцирования в смысле М. Сайго.

В пункте 2.3.1 рассматривается задача для $|a| < 1$.

Задача 2.4. Найти функцию $u(x,\ y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению влагопереноса (1) при $|a| < 1$ в области D и краевым условиям

$$A_1\left(I_{0+}^{a_1-\frac{1}{2},\ b_1+\frac{1}{2},\ c_1} u(t,\ 0)\right)(x) +$$
$$+ A_2\left(I_{0+}^{a_1,\ b_1,\ c_1} \lim_{y\to 0-} u_y(t,\ y)\right)(x) = \varphi_1(x) \quad (x \in J),$$

$$B_1(1-x)^{\alpha+2\beta+\frac{1}{2}}\left(I_{1-}^{\alpha,\ \beta,\ \beta+\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} u\left[\Theta_1(t)\right]\right)(x) =$$
$$= B_2\left(I_{1-}^{\alpha+\frac{a+1}{4},\ -\alpha-\beta,\ -\alpha-\beta-\frac{a+3}{4}} u(t,\ 0)\right) +$$
$$+ B_3\left(I_{1-}^{\alpha+\frac{a+3}{4},\ -\alpha-\beta-\frac{1}{2},\ -\alpha-\beta-\frac{a+3}{4}} \lim_{y\to 0-} u_y(t,\ y)\right) + \varphi_2(x) \quad (x \in J),$$

где $A_{1,\ 2}$, $B_{1,\ 2,\ 3}$, a_1, b_1, c_1, α, β — ненулевые вещественные константы, которые удовлетворяют условиям $B_1\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)} - B_2 \neq 0$, $\frac{1}{2} < a_1, b_1 \leq 1$, $-\frac{a+1}{4} < \alpha < \frac{1+a}{4}$, $\beta < \frac{a+1}{4}$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — известные функции, причем $\varphi_1(x) \in H^{\lambda_1}\left(\overline{J}\right)$, $a_1 - \frac{1}{2} < \lambda_1 \leq 1$, $\varphi_2(x) \in H^{\lambda_2}\left(\overline{J}\right)$, $\alpha + \frac{a+1}{4} < \lambda_2 \leq 1$.

Будем искать решение этой задачи в классе таких функций $u(x,\ y)$, что $\lim\limits_{y\to 0-} u_y(x,\ y) = \nu(x) \in H^{\lambda}\left[\overline{J}\right]$, $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$.

Здесь доказывается, что разрешимость задачи 2.4 сводится к вопросу однозначной разрешимости характеристического сингулярного уравнения на конечном отрезке. Решение дается в явном виде.

В пунктах 2.3.2–2.3.3 рассматриваются аналогичные по постановке и методу решения задачи. Основным отличием является то, что в пункте 2.3.2 рассматривается уравнение влагопереноса при $a = 1$, а в пункте 2.3.3 — при $a = -1$.

В параграфе 2.4 рассматривается уравнение влагопереноса (1) при $|a| \leq 1$ в области $D = D_1 \cup D_2$, где D_1 — область, ограниченная интервалом $J = (0,\ 1)$ и характеристиками данного уравнения $AC_1 = \left\{(x,\ y) :\ x - \frac{y^2}{2} = 0,\ y \leq 0\right\}$, $BC_1 = \left\{(x,\ y) :\ x + \frac{y^2}{2} = 1,\ y \leq 0\right\}$, D_2 — область, ограниченная интервалом $J = (0,\ 1)$ и характеристиками $AC_2 = \left\{(x,\ y) :\ x - \frac{y^2}{2} = 0,\ y \geq 0\right\}$, $BC_2 = \left\{(x,\ y) :\ x + \frac{y^2}{2} = 1,\ y \geq 0\right\}$. За $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ принимаются точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $x \in J$, с характеристиками AC_1 и BC_2 соответственно: $\Theta_0(x) = \left(\frac{x}{2},\ -\sqrt{x}\right)$, $\Theta_1(x) = \left(\frac{1+x}{2},\ \sqrt{1-x}\right)$.

В пункте 2.4.1 рассматривается краевая задача для уравнения влагопереноса при $|a| < 1$. Формулируется задача 2.5.

Задача 2.5. Найти функцию $u(x,\, y)$ со свойствами:

1) $u(x,\, y)$ удовлетворяет уравнению влагопереноса (1) при $|a| < 1$ в области D;

2) $u\,(x,\ y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^2\,(D)$;

3) $u(x,\, -0) = u(x,\, +0)$ $(x \in \overline{J})$, $\lim\limits_{y\to 0-} u_y(x,\, y) = \lim\limits_{y\to 0+} u_y(x,\, y)$ $(x \in J)$;

$$4)\ A_0\left(I_{0+}^{a_1,\, b_1,\, \frac{a-3}{4}-a_1} u\left[\Theta_0(t)\right]\right)(x) = B_0\left(I_{0+}^{a_1+\frac{1-a}{4},\, b_1,\, \frac{a-3}{4}-a_1} u\,(t,\ 0)\right)(x) +$$
$$+\, C_0\left(I_{0+}^{a_1+\frac{3-a}{4},\, b_1-\frac{1}{2},\, \frac{a-3}{4}-a_1} \lim_{y\to 0-} u_y\,(t,\ y)\right)(x) + \varphi_0\,(x) \quad (x \in J)\,,$$

$$A_1\left(I_{1-}^{a_2,\, b_2,\, -a_2-\frac{a+3}{4}} u\left[\Theta_1(t)\right]\right)(x) = B_1\left(I_{1-}^{a_2+\frac{a+1}{4},\, b_2,\, -a_2-\frac{a+3}{4}} u\,(t,\ 0)\right) +$$
$$+\, C_1\left(I_{1-}^{a_2+\frac{a+3}{4},\, b_2-\frac{1}{2},\, -a_2-\frac{a+3}{4}} \lim_{y\to 0-} u_y\,(t,\ y)\right) + \varphi_1\,(x) \quad (x \in J)\,,$$

где $A_{0,\,1}$, $B_{0,\,1}$, $C_{0,\,1}$, $a_{1,\,2}$, $b_{1,\,2}$ — ненулевые вещественные константы, которые удовлетворяют условиям $\frac{a-1}{4} < a_1 < \frac{a+3}{4}$, $-\frac{a+1}{4} < a_2 < \frac{3-a}{4}$, $b_1, b_2 > 0$, $A_0\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - B_0\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right) \neq 0$, $A_1\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - B_1\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right) \neq 0$, $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ — известные функции, причем $\varphi_0(x) \in H^{\lambda_0}\left(\overline{J}\right)$, $a_1 - \frac{a-1}{4} < \lambda_0 \leq 1$, $\varphi_1(x) \in H^{\lambda_1}\left(\overline{J}\right)$, $a_2 + \frac{a+1}{4} < \lambda_1 \leq 1$.

Будем искать решение этой задачи в классе таких функций $u(x,\, y)$, что $\lim\limits_{y\to 0-} u_y(x,\, y) = \nu(x) \in H^{\lambda}\left[\overline{J}\right]$, $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$.

Вопрос о существовании единственного решения этой задачи сводится к вопросу разрешимости сингулярного интегрального уравнения относительно $\tau(x) = u(x,\, -0) = u(x,\, +0)$ и получает положительный ответ.

В пункте 2.4.2 рассмотрены аналогичные по постановке и методу решения задачи. Главным отличием является то, что уравнение влагопереноса рассматривается при $a = \pm 1$.

Третья глава посвящена нелокальным краевым задачам для уравнения смешанного типа, в верхней полуплоскости представленного уравнением диффузии дробного порядка, в нижней — уравнением влагопереноса.

Рассматривается уравнение смешанного типа:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - D_{0+,\,y}^{\alpha} u, & y > 0, \\ y^2 u_{xx} - u_{yy} + a u_x, & y < 0,\ |a| \leq 1. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $D_{0+,\,y}^{\alpha}$ — частная дробная производная Римана-Лиувилля порядка

α, $0<\alpha<1$ от функции $u(x,\,y)$ по второй переменной:

$$\left(D^{\alpha}_{0+,\,y}u\right)(x,\,y)=\frac{d}{dy}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y\frac{u(x,\,t)}{(y-t)^{1-\alpha}}dt\quad(0<\alpha<1,\,y>0).$$

Пусть $D=D^+\cup D^-$, где $D^+=\{(x,\,y):\,0\le x,\,y\le 1\}$ — квадрат, D^- — область, лежащая в нижней полуплоскости ($y<0$) и ограниченная характеристиками уравнения (1) и отрезком $[0,\,1]$ прямой $y=0$.

Краевые задачи как с локальным, так и нелокальным смещением для уравнений вида (6) были объектом исследования учеников научной школы А. М. Нахушева. Отметим в частности работы А. В. Псху и С. Х. Геккиевой.

В параграфе 3.1 для уравнения (6) исследована следующая задача.

Задача 3.1. Найти решение $u(x,\,y)$ уравнения (6) при $|a|<1$ в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,\,y)=\varphi_0(y),\quad u(1,\,y)=\varphi_1(y),\tag{7}$$

$$A\left(E_{0+}^{a_1,\,\frac{a-3}{4}-a_1}u[\Theta_0(t)]\right)(x)=B\left(E_{0+}^{a_1+\frac{1-a}{4},\,\frac{a-3}{4}}u(t,\,0)\right)(x)+ \\ +C\lim_{y\to 0-}u_y(x,\,y)+\varphi(x),\tag{8}$$

а также условиям сопряжения

$$\begin{gathered}\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}u(x,\,y)=\lim_{y\to 0-}u(x,\,y)\quad(x\in\overline{J}),\\ \lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x,\,y)\right)_y=\lim_{y\to 0-}u_y(x,\,y)\quad(x\in J),\end{gathered}\tag{9}$$

где A, B, C, a_1 — заданные константы, такие что

$$\sqrt{\pi}A=\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)B,\quad \frac{a-3}{4}<a_1<\frac{a+3}{4},\tag{10}$$

$\varphi(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ — заданные функции, такие, что

$$\begin{gathered}\varphi(x)\in C(\overline{J})\cap C^2(J),\quad y^{1-\alpha}\varphi_1(y),\,y^{1-\alpha}\varphi_2(y)\in C(\overline{D^+}),\\ \varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0.\end{gathered}\tag{11}$$

Будем искать решение $u(x,\,y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области D таких, что

$$\begin{gathered}y^{1-\alpha}u(x,\,y)\in C(\overline{D^+}),\quad u(x,\,y)\in C(\overline{D^-}),\\ y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u\right)_y\in C\left(D^+\cup\{(x,\,y):\,0<x<1,\,y=0\}\right),\\ u_{xx}\in C\left(D^+\cup D^-\right),\quad u_{yy}\in C\left(\overline{D^-}\right).\end{gathered}\tag{12}$$

Вопрос о существовании единственного решения сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода, которое имеет единственное решение.

Теорема 3.1.1. Пусть выполняются условия (10) и (11). Тогда существует единственное решение задачи 3.1 для уравнения (6).

В пункте 3.1.2 рассматриваются задачи, аналогичные по постановке и методу решения, где уравнение влагопереноса рассматривается при $a = \pm 1$.

В параграфе 3.2 изучена задача для уравнения (6), в которой функциональными соотношениями связаны искомая функция и ее производная.

Задача 3.2. Найти решение $u(x,\, y)$ уравнения (6) в области D, удовлетворяющее краевым условиям (7) и

$$A_1 \left(I_{0+}^{a_1 - \frac{1}{2},\, b_1 + \frac{1}{2},\, c_1} u(t,\, 0) \right)(x) + A_2 \left(I_{0+}^{a_1,\, b_1,\, c_1} \lim_{y \to 0-} u_y(t,\, y) \right)(x) = \varphi(x), \qquad (13)$$

где A_1, A_2, a_1, b_1, c_1 — заданные константы, такие что

$$\frac{1}{2} < a_1,\, b_1 \le 1,$$

а также условиям сопряжения (9).

Будем искать решение $u(x,\, y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области D, таких, что выполняются условия (12).

Единственность решения задачи 3.2 вытекает из аналога принципа экстремума А.В. Бицадзе. Существование решения задачи доказывается путем сведения задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\nu(x) = g(x) + \frac{\lambda}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int\limits_0^x \nu(t)\sqrt{x-t}\,dt,$$

где $\lambda = -\frac{A_1 \Gamma(1+\alpha)}{A_2}$, и последующим использованием теоремы, приведенном в книге М. М. Джрбашяна «Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области». В итоге для $\nu(x)$ имеем

$$\nu(x) = g(x) + \lambda \int\limits_0^x \sqrt{x-t}\, E_{\frac{3}{2},\, \frac{3}{2}} \left(\lambda (x-t)^{\frac{3}{2}} \right) g(t)\,dt.$$

Используя функциональные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ из параболической и гиперболической частей области и следующую лемму

Лемма 3.2.1. Если $\lambda \in C$, то

$$\left(I_{0+}^2 \int\limits_0^t \sqrt{t-s}\, E_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}} \left(\lambda (t-s)^{\frac{3}{2}} \right) g(s)\,ds \right)(x) = \int\limits_0^x (x-s)^{\frac{5}{2}} E_{\frac{3}{2},\frac{7}{2}} \left(\lambda (x-s)^{\frac{3}{2}} \right) g(s)\,ds.$$

находим функцию $\tau(x)$ в каждой из областей D^+ и D^-, и получаем решение задачи 3.2 в в каждой из областей, а значит, и ее решение в заданном классе функций в области D.

В параграфе 3.3 для уравнения (6) рассмотрена задача следующего вида.

Задача 3.3. Найти решение $u(x,\, y)$ уравнения (6) при $|a| < 1$ в области D, удовлетворяющее краевым условиям (7) и

$$A\left(I_{0+}^{a_1,\, b_1,\, \frac{a-3}{4}-a_1} u[\Theta_0(t)]\right)(x) = B\left(I_{0+}^{a_1+\frac{1-a}{4},\, b_1,\, \frac{a-3}{4}-a_1} u(t,\, 0)\right)(x) +$$

$$+\, C\left(I_{0+}^{a_1+\frac{3-a}{4},\, b_1-\frac{1}{2},\, \frac{a-3}{4}-a_1} \lim_{y\to 0-} u_y(t,\, y)\right)(x) + \varphi(x), \quad (14)$$

где $A,\, B,\, C,\, a_1,\, b_1$ — заданные константы, такие что $\sqrt{\pi}A - \Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right) B \neq 0$, $\frac{a-1}{4} < a_1 < \frac{a+3}{4}$, $b_1 > 0$, а также условиям сопряжения (9).

Будем искать решение $u(x,\, y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области D, таких, что выполняются условия (12).

Решение данной задачи аналогично решению задачи 3.2. Решение задачи получено в явном виде.

В пунктах 3.3.2 и 3.3.3 рассмотрены задачи 3.3.1 и 3.3.2, где уравнение влагопереноса рассматривается при $a = 1$ и $a = -1$ соответственно.

В заключение сформулируем основные результаты, выносимые на защиту.

1. Для уравнения Бицадзе—Лыкова (уравнения влагопереноса) поставлены и исследованы новые краевые задачи со смещением. Установлен эффект влияния коэффициента при младшей производной на корректную постановку нелокальных краевых задач. Выявлены случаи, когда можно получить явные решения рассматриваемых задач и изучены вопросы единственности этих решений.

2. Для одной системы дифференциальных уравнений с частными производными, которая записана в векторной форме уравнения влагопереноса с инволютивной матрицей, рассмотрены две нелокальные задачи и построены их решения в замкнутом виде

3. Установлена однозначная разрешимость новых нелокальных краевых задач для параболо-гиперболического уравнения, в верхней полуплоскости представленного уравнением дробной диффузии, в нижней — уравнением влагопереноса. Разработана методика редукции этих задач к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода.

Методы и результаты диссертации могут быть использованы в теоретических исследованиях в таких математических дисциплинах, как дробное исчисление, дифференциальные и интегральные уравнения, при решении краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, а также при исследовании конкретных задач математической физики.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Репину Олегу Александровичу за поддержку и постоянное внимание к работе.

3. Список публикаций

[1] Арланова, Е. Ю. Об одном аналоге оператора дробного интегрирования, его свойствах и применении / Е. Н. Огородников, Е. Ю. Арланова // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Всероссийской научной конференции. — Т. 3. — Самара: СамГТУ, 2004. — С. 170–175.

[2] Арланова, Е. Ю. О некоторых существенно нелокальных краевых задачах для уравнения влагопереноса в специальном случае / Е. Ю. Арланова, Е. Н. Огородников // Труды 5-й Международной конференции молодых ученых и студентов "Актуальные проблемы современной науки". Естественные науки. — Т. 1,2. — Самара: СамГТУ, 2004. — С. 18–25.

[3] Арланова, Е. Ю. Существенно нелокальные краевые задачи для систем уравнений влагопереноса в специальном случае / Е. Ю. Арланова // Тезисы докладов XXXI Самарской областной студенческой конференции. — Т. 1. — Самара: СамГУ, 2005. — С. 81.

[4] Арланова, Е. Ю. Некоторые нелокальные аналоги задачи Коши—Гурса и существенно нелокальные краевые задачи для системы уравнений Бицадзе—Лыкова в специальных случаях / Е. Н. Огородников, Е. Ю. Арланова // Вестник Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2005. — Т. 34. — С. 24–39.

[5] Арланова, Е. Ю. О корректности некоторых существенно нелокальных краевых задач для систем уравнений влагопереноса в специальных случаях / Е. Н. Огородников, Е. Ю. Арланова // Обозрение прикладной и промышленной математики. Материалы Шестого Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике (Спб.). — Т. 12, Вып. 1. — М.: ТВП, 2005. — С. 169–171.

[6] Арланова, Е. Ю. Аналог задачи Дарбу и задачи со смещением для гиперболического уравнения с вырождением типа и порядка / Е. Н. Огородников, Е. Ю. Арланова // СамДифф-2005: всероссийская конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения г. Самара, 27 июня – 2 июля 2005 г. Тезисы докладов. — Самара: Издательство "Универс-групп 2002. — С. 57–59.

[7] Арланова, Е. Ю. Аналог второй задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения / Е. Ю. Арланова, О. А. Репин // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Третьей Всероссийской научной конференции. — Т. 3. — Самара: СамГТУ, 2006. — С. 46–51.

[8] Арланова, Е. Ю. Нелокальные краевые задачи для уравнения влагопереноса / Е. Ю. Арланова // Современные методы физико-математических наук: Труды международной конференции. — Т. 1. — Орел: ОГУ, 2006. — С. 9–12.

[9] Арланова, Е. Ю. Нелокальные краевые задачи для уравнения влагопереноса в специальных случаях / Е. Ю. Арланова // СамДиф-2007: всероссийская конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения г. Самара, 29 января – 2 февраля 2007 г. Тезисы докладов. — Самара: Издательство "Универс-групп 2007. — С. 28–29.

[10] Арланова, Е. Ю. Нелокальная краевая задача с операторами Кобера—Эрдейи и М. Сайго для уравнения влагопереноса / Е. Ю. Арланова // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды четвертой Всероссийской научной конференции. — Т. 3. — Самара: СамГТУ, 2007. — С. 29–32.

[11] Арланова, Е. Ю. Нелокальная задача с дробными производными для одного гиперболического уравнения / Е. Ю. Арланова // Вестник Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2007. — Т. 2 (15). — С. 33–36.

[12] Арланова, Е. Ю. Нелокальная задача при разных значениях параметра уравнения Бицадзе—Лыкова / Е. Ю. Арланова // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики. Материалы международного Российско-Азербайджанского симпозиума. Нальчик—Эльбрус, 12–17 мая, 2008. — Нальчик: НИИ ПМА, 2008. — С. 182–183.

[13] Арланова, Е. Ю. Нелокальная краевая задача с операторами Кобера—Эрдейи и М. Сайго для уравнения Бицадзе—Лыкова / Е. Ю. Арланова // Двенадцатая международная научная конференция имени академика М. Кравчука: Материалы конференции (15–17 мая 2008 г., г. Киев). — Т. 1. — Киев: ТОВ «Задруга», 2008. — С. 489.

[14] Арланова, Е. Ю. О задаче для уравнения Бицадзе—Лыкова с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования в краевых условиях / Е. Ю. Арланова // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Труды международной научной конференции (24–28 июня 2008 г., г. Стерлитамак). — Т. 1. — Уфа: Гилем, 2008. — С. 10–14.

[15] Арланова, Е. Ю. Задача со смещением для уравнения смешанного типа с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования в краевом условии / Е. Ю. Арланова // Вестник СамГУ — Естественнонаучная серия. — 2008. — Т. 6(65). — С. 396–406.

Заказ № . Тираж 100 экз. Отпечатано на ризографе.
Самарский государственный технический университет.
Отдел типографии и оперативной полиграфии.
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.