



О РАЗЛОЖЕНИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ СУБПОЛОСНЫХ МАТРИЦ¹

Е.Г. ЖИЛЯКОВ
А.А. ЧЕРНОМОРЕЦ
Е.В. БОЛГОВА

*Белгородский государственный
национальный исследовательский
университет*

e-mail:
zhihyakov@bsu.edu.ru

В работе на основе вычислительных экспериментов проведен анализ распределения значений проекций изображения на собственные векторы субполосных матриц различных подобластей пространственных частот. Показано, что данные проекции вносят одинаковый вклад в формирование анализируемого изображения, что позволяет при реализации отдельных операций субполосного анализа-синтеза изображений использовать произвольно выбранные собственные векторы.

Ключевые слова: изображения, подобласть пространственных частот, проекции изображений, собственные векторы, субполосные матрицы, субполосный анализ-синтез.

В настоящее время в связи со значительным ростом объема графической информации, передаваемой и обрабатываемой в информационных системах большое значение приобретает проблема разработки новых эффективных методов обработки изображений [1]. Одним из перспективных направлений обработки графических данных является субполосный анализ и синтез [2] изображений.

Для практической реализации субполосных методов обработки изображений интерес представляет исследование распределения величин проекций изображения на собственные векторы субполосных матриц соответствующих ППЧ.

Отметим основные понятия теории субполосного анализа-синтеза изображений. Субполосный анализ-синтез основан на частотных представлениях изображения $\Phi = \{f_{ik}\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, M$,

$$f_{ik} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u, v) \exp(ju(i-1)) \exp(jv(k-1)) dudv / 4\pi^2, \quad (1)$$

где j – мнимая единица ($j^2 = -1$); $F(u, v)$ – частотная характеристика, в качестве которой наиболее часто используется трансформанта Фурье,

$$F(u, v) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M f_{ik} \exp(-ju(i-1)) \exp(-jv(k-1)), \quad (2)$$

переменные u, v определены в области пространственных частот (ОПЧ)

$$-\pi \leq u, v < \pi.$$

Анализ изображений осуществляется в отдельных подобластях пространственных частот (ППЧ) V_{sr} , $s = 1, 2, \dots, S$, $r = 1, 2, \dots, R$, на которые разбивается области определения трансформант Фурье,

$$V_{sr} = \{ (u \in [-u_{s2}, -u_{s1}) \cup [u_{s1}, u_{s2})) \cap (v \in [-v_{r2}, -v_{r1}) \cup [v_{r1}, v_{r2})) \}, \quad (3)$$

$$u_{s1} = 0 \ (s = 1), \ u_{s,2} = \pi, \ u_{s+1,1} = u_{s,2};$$

$$v_{r1} = 0 \ (r = 1), \ v_{r,2} = \pi; \ v_{r+1,1} = v_{r,2},$$

так что (1) принимает вид

$$f_{ik} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^R \iint_{(u,v) \in V_{sr}} F^{\Phi}(u, v) \exp(ju(i-1)) \exp(jv(k-1)) dudv, \quad (4)$$

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-47-08052



В работе [3] показано, что каждой подобласти пространственных частот (ПЧ) V_{sr} , $s = 1, 2, \dots, S$, $r = 1, 2, \dots, R$, соответствуют матрицы $A_s = \{a_{in}^s\}$, $i, n = 1, \dots, N$, $B_r = \{b_{km}^r\}$, $k, m = 1, \dots, M$, где

$$a_{in}^s = \int_{u \in D_s} \exp(-ju(i-n)) du / 2\pi, \quad (5)$$

$$b_{km}^r = \int_{v \in G_r} \exp(-jv(k-m)) dv / 2\pi, \quad (6)$$

$$D_s = \{u \mid u \in [-u_{s2}, -u_{s1}) \cup [u_{s1}, u_{s2})\}, \quad G_r = \{v \mid v \in [-v_{r2}, -v_{r1}) \cup [v_{r1}, v_{r2})\},$$

такие, что исходное изображение можно представить в виде композиции его частотных компонент Φ_{sr} ,

$$\Phi = \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^R \Phi_{sr}, \quad (7)$$

$$\Phi_{sr} = A_s \Phi B_r. \quad (8)$$

Матрицы A_s и B_r названы субполосными матрицами.

Доказано [4], что матрицы A_s и B_r являются положительно определенными [5], следовательно, они могут быть представлены в виде разложений по их собственным числам и собственным векторам

$$A_s = Q_s L_s Q_s^T, \quad B_r = Q_r L_r Q_r^T, \quad (9)$$

где Q_s и Q_r – матрицы, столбцы которых составлены из собственных векторов матриц A_s и B_r соответственно,

$$Q_s = (\vec{q}_1^s, \dots, \vec{q}_N^s), \quad Q_r = (\vec{q}_1^r, \dots, \vec{q}_M^r),$$

L_s и L_r – диагональные матрицы, диагональные элементы которых соответствуют собственным числам матриц A_s и B_r ,

$$L_s = \text{diag}(\lambda_1^s, \dots, \lambda_N^s), \quad L_r = \text{diag}(\lambda_1^r, \dots, \lambda_M^r).$$

Будем считать, что проекция g_{nm}^{sr} изображения Φ на собственные векторы \vec{q}_n^s и \vec{q}_m^r субполосных матриц A_s и B_r определяется соотношением,

$$g_{nm}^{sr} = (\vec{q}_n^s)^T \Phi \vec{q}_m^r, \\ n = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad r = 1, 2, \dots, R.$$

Тогда, матрица $G^{sr} = (g_{nm}^{sr})$ проекций изображения Φ на множества собственных векторов субполосных матриц A_s и B_r может быть задана следующим выражением,

$$G^{sr} = Q_s^T \Phi Q_r. \quad (10)$$

Подстановка соотношений (9), (10) в выражения (7), (8) позволяет получить соотношение, которое показывает, что изображение Φ можно представить в виде разложения по его проекциям на собственные векторы субполосных матриц соответствующих подобластей ПЧ,

$$\Phi = \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^R Q_s L_s G^{sr} L_r Q_r. \quad (11)$$

Можно показать, что зависимость энергии E_{sr} [6] изображения в подобласти ПЧ V_{sr} от значений его проекций на соответствующие собственные векторы (с учетом значений соответствующих собственным чисел) определяется следующим соотношением,

$$E_{sr} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \lambda_n^s \lambda_m^r (g_{nm}^{sr})^2. \quad (12)$$

Учитывая справедливость разложения (11) изображения по его проекциям на соответствующие собственные векторы и квадратичной зависимости (12) величины энергии изображения от его соответствующих проекций, целесообразно исследовать



значимость отдельных проекций в формировании исходного изображения. Для этого предварительно вычислим доли соответствующих проекций относительно их суммарных значений.

Матрицу $D^{sr} = (d_{nm}^{sr})$ соответствующих величин уточненных долей проекций (то есть квадратов проекций с учетом значений соответствующих собственных чисел) в подобласти ПЧ V_{sr} , учитывая соотношение (12), можно вычислить следующим образом,

$$D^{sr} = \frac{1}{E} L_s (G^{sr})^2 L_r, \tag{13}$$

где выражение $(G^{sr})^2$ определяет операцию поэлементного возведения во вторую степень, E – энергия изображения,

$$E = \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^R E_{sr}.$$

На основе результатов вычислительных экспериментов покажем равную значимость проекций изображения на соответствующие собственные векторы субполосных матриц.

В дальнейших расчетах будем предполагать, что размерность N и M изображения Φ имеет значения, кратные степени 2 (данное предположение не снижает общности полученных результатов для любых значений N и M).

Значимость T отдельного собственного вектора субполосной матрицы с позиций величины уточненных долей проекций изображения на выбранный вектор в каждой ППЧ V_{sr} определялась следующим образом:

– для собственных векторов субполосных матриц A_s , $s=1,2,\dots,S$, в каждой подобласти пространственных частот,

$$T_n^s = \sum_{m=1}^M d_{nm}^{sr}, \tag{14}$$

– для собственных векторов субполосных матриц B_r , $r=1,2,\dots,R$, в каждой подобласти пространственных частот,

$$T_m^r = \sum_{n=1}^N d_{nm}^{sr}. \tag{15}$$

Результаты расчетов средних значений и дисперсии значимостей T собственных векторов субполосных матриц относительно всех используемых подобластей ПЧ для 50 изображений размерности $N \times N$ и разбиения области ПЧ на $S \times S$ подобластей приведены в таблицах 1 и 2. Результаты, отображенные в данных таблицах, получены при анализе собственных векторов, соответствующих ненулевым собственным числам субполосных матриц [7].

Таблица 1

Средние значения значимости собственных векторов субполосных матриц

N \ S	64	128	256	512	1024
2	1,87E-05	4,82E-06	1,23E-06	3,32E-07	8,82E-08
4	8,79E-06	2,34E-06	6,04E-07	1,65E-07	4,39E-08
8	3,94E-06	1,10E-06	2,93E-07	8,09E-08	2,18E-08
16	1,63E-06	4,93E-07	1,38E-07	3,92E-08	1,07E-08
32	0,00E+00	2,05E-07	6,18E-08	1,85E-08	5,19E-09
64	0	0,00E+00	2,57E-08	8,28E-09	2,44E-09
128	0	0	0,00E+00	3,44E-09	0,00E+00

Результаты, приведенные в таблице 1 показывают, что средние значения уточненных проекций уменьшаются как при увеличении размерности изображений, так и с увеличением количества подобластей пространственных частот, что объясняется



увеличением количества соответствующих собственных векторов, используемых в субполосных преобразованиях.

Таблица 2

Дисперсия значимости собственных векторов субполосных матриц

N \ S	64	128	256	512	1024
2	3,70E-05	1,05E-05	2,48E-06	7,16E-07	1,85E-07
4	3,53E-05	1,03E-05	2,74E-06	6,88E-07	1,93E-07
8	2,83E-05	9,47E-06	2,43E-06	6,69E-07	1,84E-07
16	2,13E-05	7,12E-06	2,05E-06	6,15E-07	1,81E-07
32	0	5,31E-06	1,79E-06	5,43E-07	1,68E-07
64	0	0	1,33E-06	4,48E-07	1,31E-07
128	0	0	0	3,33E-07	0

При этом значения дисперсии (таблица 2) рассматриваемых средних значений также уменьшаются, что указывает на незначительные отклонения величины проекций изображений на собственные векторы относительно среднего значения.

С целью повышения наглядности полученных результатов для уточненных проекций изображений на рисунках 1, 2 отображены величины средних значений и их дисперсий в зависимости от количества подобластей ПЧ, на которые разбивается область ПЧ (графики соответствуют проекциям изображений одинаковой размерности).

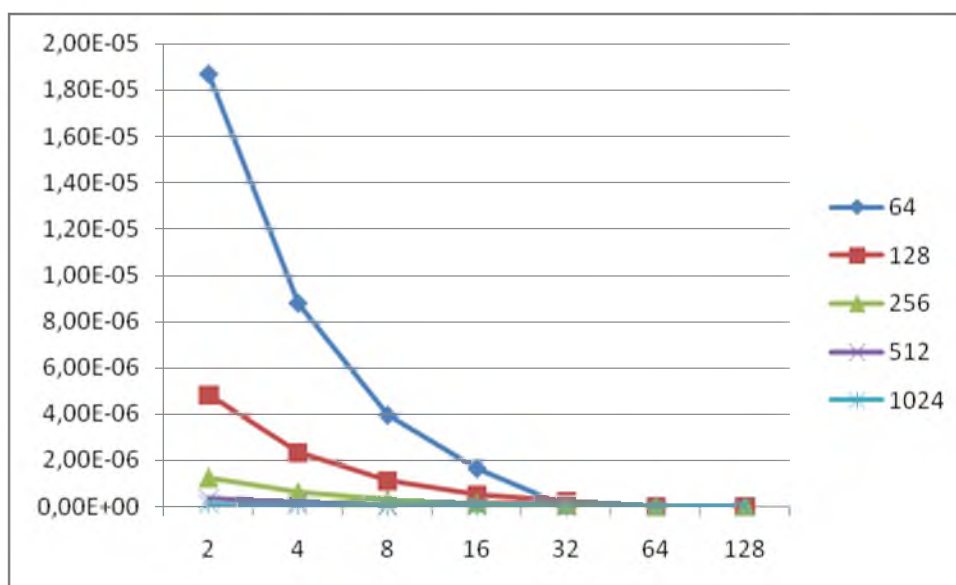


Рис. 1. Средние значения проекций

Результаты, представленные в таблицах 1, 2 и на рисунках 1, 2 демонстрируют тот факт, что значения уточненных проекций не значительно отличаются при заданных значениях размерностей изображений и заданном количестве подобластей пространственных частот, в которых осуществляется субполосный анализ-синтез.

Полученные результаты позволяют утверждать, что при субполосном анализе-синтезе изображений на основе собственных векторов субполосных матриц в преобразованиях изображения можно использовать произвольно выбранные собственные векторы (из множества, соответствующего ненулевым собственным числам), тем самым повышая скрытность субполосных преобразований.

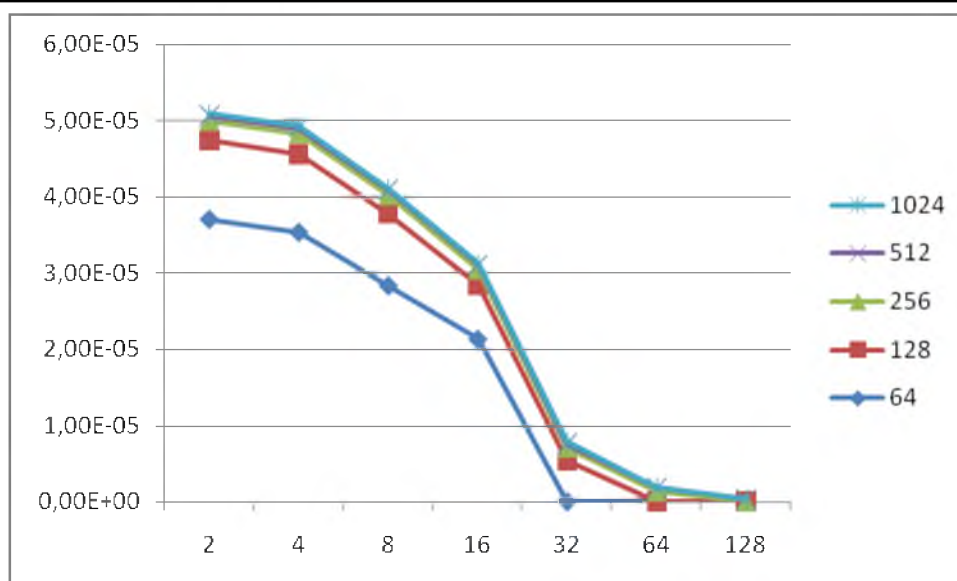


Рис. 2. Дисперсия значений проекций

Список литературы

1. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений [Текст] / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2006. – 1072 с.
2. Жилияков, Е.Г. О частотном анализе изображений [Текст] / Е.Г. Жилияков, А.А. Черноморец // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. – 2010. – Вып. 1. – С. 94-103.
3. Жилияков, Е.Г. Об эффективности метода оценивания значений долей энергии изображений на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жилияков, А.А. Черноморец, А.Н. Заливин // Известия ОрелГТУ. Информационные системы и технологии. – № 2/52 (563) март-апрель. – 2009. – С. 12-22.
4. Черноморец, А.А. О свойствах собственных векторов субполосных матриц [Текст] / А.А. Черноморец, Е.И. Прохоренко, В.А. Голощапова // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2009. – № 7 (62). – Вып. 10/1. – С. 122-128.
5. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц [Текст] / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
6. Черноморец, А.А. О частотной концентрации энергии изображений [Текст] / А.А. Черноморец, В.А. Голощапова, И.В. Лысенко, Е.В. Болгова // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2011. – № 1 (96). – Вып. 17/1. – С. 146-151.
7. Черноморец, А.А. Метод анализа распределения энергий изображений по заданным частотным интервалам [Текст] / А.А. Черноморец, О.Н. Иванов // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2010. – № 19 (90). – Вып. 16/1. – С. 161-166.

ABOUT DECOMPOSITION OF IMAGES TO THE EIGENVECTORS OF SUBBAND MATRIX

E.G. ZHILYAKOV
A.A. CHERNOMORETS
E.V. BOLGOVA

*Belgorod State National
Research University*

*e-mail:
zhilyakov@bsu.edu.ru*

In the article on the basis of computing experiments the analysis of value distribution of projections of the image to eigenvectors of subband matrixes of different subareas of spatial frequencies is carried out. It is shown that these projections make an identical contribution to formation of the analyzable image that allows to use randomly selected eigenvectors in case of implementation of separate operations of subband image analysis-synthesis.

Keywords: images, special frequency subarea, image projection, eigenvectors, subband matrix, subband analysis-synthesis.