MSC 82B20

ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ ВЕКТОРНОЙ РЕШЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ С ПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ. СЛУЧАЙ ВЫРОЖДЕННОГО ОБМЕННОГО ИНТЕГРАЛА

А.С. Клюев, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается класс периодических основных состояний сферически симметричной векторной модели статистической механики решеточных систем с парным обменным взаимодействием с суммируемым обменным интегралом. Показано, что векторное поле, минимизирующее энергию, при отсутствии вырождения обменного интеграла таково, что его фурье-образ сосредоточен не более чем в двух противоположных по знаку точках **k**-пространства.

Ключевые слова: векторная модель, гамильтониан, основное состояние.

Введение. Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [1]. Объектом этих исследований является классическая задача теории магнетизма (см. [2]) – описание класса векторных полей, реализующих минимум фиксированного магнитного гамильтониана. Как и в работе [1], эту задачу мы будем изучать в рамках так называемой векторной сферически симметричной модели статистической механики классических решеточных систем без учета в ней внешнего магнитного поля [3]. В отличие от указанной работы, мы рассмотрим случай, когда обменный интеграл, описывающий взаимодействие пар магнитных моментов в узлах решетки, обладает фурье-образом, минимум которого реализуется на таком множестве $\mathcal{K}$ пар, взаимно-противоположных по знаку волновых векторов, которое содержит более одной пары. При этом парный обменный интеграл предполагается суммируемым на решетке. Мы покажем, что класс распределений векторных полей на решетке, минимизирующих энергию, является, по сути, тем же самым, что и в случае, когда указанное множество состоит из одной пары, а именно эти векторные поля представляют спиралеобразные структуры.

1. Векторная решеточная модель. Рассмотрим модель бесконечной идеальной кристаллической решетки в виде дискретного периодического множества Λ в $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$. Для простоты, будем считать, что решетка обладает простой элементарной кристаллической ячейкой и, более того, представляет собой простую кубическую решетку, то есть ее постоянные векторы решетки $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ $(d = 3)$ взаимно ортогональны и имеют одинаковую длину, которую, опять же для простоты, будем считать единичной и физически безразмерной. В этом случае множество $\Lambda = \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{Z}^d = \Big\{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} n_i \mathbf{e}_i \,, \; n_i \in \mathbb{Z} \,, i = 1, 2, 3\Big\}. \qquad (1)$$

Здесь полагается, что начало отсчета $\mathbf{0}$ совмещено либо с одним из узлов Λ, либо с центром ячейки.

Обозначим посредством Λ_N конечное подмножество из Λ, определяемое как

$$\Lambda_N = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} n_i \mathbf{e}_i \; : n_i = -L/2 + k, k = 0 \div L, i = 1 \div d \right\},$$

где $N = (L+1)^d$ и $L \in \mathbb{N}$. Это множество служит моделью конечного образца кристалла с простой элементарной кристаллической ячейкой, где число L – является его размером. Если L нечетно, то начало координат помещается в центр тяжести элементарной ячейки, если же L четно, то – в узел решетки.

Обозначим, далее, посредством $\mathcal{M}_d$ класс всех векторных (псевдовекторных) полей $\langle \mathbf{s}_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2, 3;\ s_j(\mathbf{x}) s_j(\mathbf{x}) = s^2 \rangle$. По повторяющемуся векторному индексу j здесь и далее предполагается суммирование от 1 до 3. Таким образом, независимо от размерности d решетки, поле всегда полагается трехмерным. Поэтому, далее, во всех выражениях, в которых векторный индекс не повторяется, полагается, что он принимает значения от 1 до 3, а если векторный индекс у поля не указывается, то оно выделяется жирным шрифтом как и узлы решетки. [1)]

Пусть каждому распределению поля $\langle s_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda_N \rangle$ сопоставлено значение гамильтониана

$$\mathsf{H}_N[\mathbf{s}] = \frac{1}{2} \sum_{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \in \Lambda_N^2} I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) s_i(\mathbf{x}_1) s_i(\mathbf{x}_2) \tag{2}$$

— энергии поля $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ в кристалле Λ_N. Решеточная система статистической механики с гамильтонианом (2) называется сферически симметричной векторной моделью в отсутствии внешнего магнитного поля. Здесь функция $I(\mathbf{x})$, заданная на решетке Λ, предполагается обладающей свойствами симметрии $I(\mathbf{x}) = I(-\mathbf{x})$ и достаточно быстрой сходимости к нулю при $|\mathbf{x}| \to \infty$ такой, что

$$\sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} |I(\mathbf{x})| < \infty\,. \tag{3}$$

В статистической механике часто используется конструкционный прием, который называется введением периодических граничных условий [1]. Этим термином обозначается сопоставление системе с гамильтонианом H_N системы с гамильтонианом, обозначаемым нами далее $\mathsf{H}[\cdot; \Lambda_N]$, который определяется на классе периодических по $\mathrm{mod}\,\Lambda_N$ полей $\mathbf{s}$ на Λ.

3. Задача об определении основного состояния. В рамках моделей с гамильтонианами вида (2) и соответствующих каждому из них периодических аналогов $\mathsf{H}[\cdot; \Lambda_N]$ представляет особенный интерес решение задачи об описании таких полей $\langle s_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda \rangle$,

[1]На самом деле, из полученного основного результата работы вытекает, что он остается верным и в том случае, когда размерность вектора s_i равна двум. Одномерный же случай, соответствующий так называемой модели Изинга, является вырожденным и на него результат настоящей работы не распространяется.

$$s_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}^*_j(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\,, \tag{7}$$

выполняющиеся во всех узлах $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^d$.

Из условия $I(-\mathbf{x}) = I(\mathbf{x})$ и определения (4) следует, что функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ вещественна и для нее имеет место равенство $\bar{I}(-\mathbf{k}) = \bar{I}(\mathbf{k})$. Кроме того, заметим, что, в силу абсолютной суммируемости $I(\mathbf{x})$ на Λ (см. (3)), в формуле (4) возможен термодинамический предельный переход $\Lambda_N\to\Lambda$ при $L\to\infty$,

$$\bar{I}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} I(\mathbf{x})\exp\left(-i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right)\,, \tag{8}$$

а также, как следствие, — такой же предельный переход в формуле (6), который приводит к представлению

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}} \bar{I}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}d\mathbf{k}\,, \tag{9}$$

где $\bar{\Lambda} = (-\pi,\pi]^d$. При этом функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ непрерывна внутри $\bar{\Lambda}$ и периодическая по mod $\bar{\Lambda}$. Свойство абсолютной суммируемости обменного интеграла $I(\mathbf{x})$ гарантирует непрерывность $\bar{I}(\mathbf{k})$ на границе области $\bar{\Lambda}$.

Вещественная функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ определена для всех векторов $\mathbf{k}$, составляющих пространство $\mathbb{R}^d$, в котором она является периодической по mod $\bar{\Lambda}$. В силу свойства $\bar{I}(-\mathbf{k}) = \bar{I}(\mathbf{k})$, если эта функция имеет глобальный минимум в какой-либо точке $\mathbf{k}_*\in\bar{\Lambda}$, то она обязана иметь такой же минимум в точке $-\mathbf{k}_*$.

При решении задачи описания класса основных состояний векторной модели мы будем в настоящей работе предполагать, в отличие от [1], что множество $\mathcal{M}$ пар точек $\{\mathbf{k}_*, -\mathbf{k}_*\}$ вместе с возможной точкой $\mathbf{k}_* = 0$ (для которой нет парной), в которых функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ достигает глобального минимума в $\bar{\Lambda}$, не состоит только из единственной пары.

Для решения задачи о минимуме преобразуем гамильтониан следующим образом. Подставим в периодический гамильтониан

$$\mathsf{H}[\mathbf{s}(\mathbf{x});\Lambda_N] = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}_1\in\Lambda,\ \mathbf{x}_2\in\Lambda_N} I(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)s_j(\mathbf{x}_1)s_j(\mathbf{x}_2)$$

разложения (7). Тогда, после естественных преобразований (см. [1]), получим

$$\mathsf{H}[\mathbf{s}(\mathbf{x});\Lambda_N] = \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{I}(\mathbf{k})|\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2\,. \tag{10}$$

Пусть функция $\bar{I}_N(\mathbf{k})$ имеет глобальный минимум в какой-то паре точек $\{\mathbf{k}_*, -\mathbf{k}_*\}\subset\bar{\Lambda}_N$ (либо в точке $\mathbf{k}_* = 0$). Тогда при $L\to\infty$, когда $\Lambda_N\to\Lambda$, в силу непрерывности функции $\bar{I}(\mathbf{k})$, во всех точках из $\bar{\Lambda}_N$, соответствующих кристаллу Λ_N с размером L, имеет место предельное соотношение $\bar{I}_{m^dN}(\mathbf{k})\to\bar{I}(\mathbf{k})$ при $m\to\infty$, когда размер L

кристалла Λ_N увеличивается пропорционально $m \in \mathbb{N}$. Однако, при переходе к такому пределу глобальный минимум функции $\bar{I}(\mathbf{k})$ может появиться в точке $\mathbf{k}_*$, которая не содержится ни в одном из множеств $\bar{\Lambda}_N$. Не отвлекаясь на эти математические тонкости, будем решать задачу об описании класса основных состояний гамильтониана только для того случая, когда точки минимума функции $\bar{I}(\mathbf{k})$ не зависят от размера L кристалла, начиная с некоторого его значения.

Итак, необходимо минимизировать квадратичную форму (10) с учетом N условий $s_j^2(\mathbf{x}) = 1$, $\mathbf{x} \in \Lambda_N$. Всю совокупность этих условий запишем в следующей эквивалентной форме

$$\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} s_j^2(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{x},\mathbf{k})} = N\delta_{\mathbf{k},0}\,, \quad \mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N\,.$$

Подстановка в левую часть, фурье-представления (7) векторного поля $s_j(\mathbf{x})$ приводит эту систему условий, ограничивающих возможный выбор поля $s_j(\mathbf{x})$ при минимизации квадратичной формы (10), к квадратичной форме в терминах поля $\bar{s}_j(\mathbf{k})$,

$$\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} s_j^2(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{x},\mathbf{k})} = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} \exp(i(\mathbf{x},\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k})) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2)\delta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2+\mathbf{k}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}')\bar{s}_j^*(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\,.$$

Таким образом, имеем

$$\delta_{\mathbf{k},0} = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}'\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}')\bar{s}_j^*(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\,, \quad \mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N\,. \tag{12}$$

При этом на поле $\bar{s}_j(\mathbf{k})$, ввиду его комплекснозначности, наложены дополнительные условия $\bar{s}_j^*(\mathbf{k}) = \bar{s}_j(-\mathbf{k})$.

Поиск минимума формы (10) при совокупности условий (12) производится следующим образом. Сначала, находятся поля $\bar{s}_j(\mathbf{k})$, реализующие минимум с учетом только одного условия из списка (12), а именно при $\bar{\mathbf{k}} = 0$,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} |\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2 = N^2\,.$$

Затем для полей этого класса проверяется выполнимость условий (12) при $\bar{\mathbf{k}} \neq 0$.

При учете только условия с $\mathbf{k} = 0$ нужно минимизировать линейную форму

$$\mathsf{H}_N = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{I}(\mathbf{k})\eta(\mathbf{k})\,, \tag{13}$$

у которой неотрицательные переменные $\eta(\mathbf{k}) = |\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2$ подчинены условию

$$\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \eta(\mathbf{k}) = N^2. \tag{14}$$

При этом переменные $\eta(\mathbf{k})$ не являются независимыми, а подчинены условиям

$$\eta(\mathbf{k}) = \eta(-\mathbf{k})\,, \quad \mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N\,, \tag{15}$$

где $\mathbf{k} \notin \partial(-\pi, \pi]^d$. Используя непрерывность функции $\bar{I}(\mathbf{k})$, можно считать, что в форме допускаются также все слагаемые с векторами $\mathbf{k} \in \partial(-\pi, \pi]^d$ и последнее ограничение можно опустить.

Минимизация линейной формы на выпуклом множестве $\mathcal{R} = \{\eta(\mathbf{k}) \geq 0 \ : \ \mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N,\ \sum\limits_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \eta(\mathbf{k}) = N^2\}$ сводится к выбору набора значений $\eta(\mathbf{k})$ на его границе. Среди всех граничных точек реализуют минимум только те, в которых достигается абсолютный минимум функции $\bar{I}(\mathbf{k})$. Ранее было указано, что эта функция обладает свойством инвариантности $\bar{I}(\mathbf{k}) = \bar{I}(-\mathbf{k})$, если $\mathbf{k}$ находится внутри $\bar{\Lambda}_N$. Если же $\mathbf{k}$ находится на границе куба $\bar{\Lambda}_N$ (но не в угловой точке), то рассмотрим два случая. Если вектор $\mathbf{k}$ лежит на внутренней части какой-либо стороны $\bar{\Lambda}_N$ (не на ребре), то выполняется $\bar{I}(\mathrm{pr}(\mathbf{k})) = \bar{I}(-\mathrm{pr}(\mathbf{k}))$, где pr обозначает проекцию $\bar{\Lambda}_N$ на: координатную плоскость, параллельную этой стороне. Это следует из формулы (8), в которую нужно подставить, например, $\mathbf{k} = \pi\mathbf{e}_1 + \mathrm{pr}(\mathbf{k})$. Если же вектор $\mathbf{k}$ лежит на внутренней части ребра куба $\bar{\Lambda}_N$, то в указанной формуле операция pr обозначает проекцию на координатную ось, параллельную этому ребру, что вытекает из аналогичной подстановки в формулу (8), например, $\mathbf{k} = \pi(\mathbf{e}_1{+}\mathbf{e}_2){+}\mathrm{pr}(\mathbf{k})\mathbf{e}_3$. Отождествив противоположные стороны границы области $\bar{\Lambda}_N$, можно считать, что функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ инвариантна относительно преобразования $\mathbf{k} \Rightarrow -\mathbf{k}$ на $\bar{\Lambda}_N$ с учетом такого отождествления, что будет далее везде подразумеваться. Возможность включения угловых точек куба в множество $\mathcal{K}$ мы не рассматриваем.

Обозначим посредством $\mathcal{K}$ подмножество в замыкании $\mathrm{cl}(\bar{\Lambda}_N)$, с учетом отождествления противоположных сторон, для тех векторов $\mathbf{k}$, в которых реализуется этот глобальный минимум. Это множество инвариантно относительно отражений $-\mathcal{K} = \mathcal{K}$, ввиду свойства (15), если под отражением понимать сделанное выше соглашение об отождествлении сторон $\bar{\Lambda}_N$, а также ввиду того, что для этих точек минимума имеет место $\bar{I}(\mathbf{k}) = \bar{I}(-\mathbf{k})$. Кроме того, нужно учесть инвариантность минимизируемой формы относительно замены $\mathbf{k} \Rightarrow -\mathbf{k}$. Тогда функции $\eta(\mathbf{k})$, для которых достигается минимум формы (13) могут быть не равны нулю только для $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$. Отсюда следует, что векторное поле $\bar{s}_j(\mathbf{k})$, в общем случае, может быть отлично нуля только при $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$.

Потребуем теперь выполнимости соотношений (12). После подстановки в эти соотношения, получим

$$\delta_{\mathbf{k},0} = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}'\in\mathcal{K},\, \mathbf{k}-\mathbf{k}'\in\mathcal{K}} \bar{s}_j(\mathbf{k}')\bar{s}^*_j(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\,. \tag{16}$$

При анализе того, к каким ограничениям приводит совокупность этих соотношений, предположим, что множество $\mathcal{K}$ удовлетворяет следующему условию: для любой пары векторов $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ из $\mathcal{K}$ выполняется $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \notin \mathcal{K}$ (в частности, это предполагает, что $0 \notin \mathcal{K}$ точно также как и угловые точки куба $\bar{\Lambda}_N$). Если такое допущение имеет место, то в представленной сумме найдутся отличные от нуля слагаемые только в том случае, когда $\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathcal{K}$, $\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$. Это приводит к $|\mathcal{K}|(|\mathcal{K}| - 1) + 1$ условиям. При подстановке каждого из этих значений $\mathbf{k}$ в представленной сумме отличны от тождественного нуля только два совпадающих друг с другом слагаемых с $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2)$ при $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. По этой причине, мы получаем, па основании (16), следующий список условий

$$\bar{s}_j(-\mathbf{k}_2)\bar{s}_j^*(-\mathbf{k}_1) + \bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) = 0\,, \qquad \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathcal{K},\ \mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$$

и соотношение (14) при $\mathbf{k} = 0$,

$$\sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{K}} \bar{s}_j(\mathbf{k}')\bar{s}_j^*(\mathbf{k}') = N^2\,. \tag{17}$$

Зафиксируем в списке этих соотношений вектор $\mathbf{k}_1 \in \mathcal{K}$. Тогда в нем, наверняка, имеются два соотношения: $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) = 0$, $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(-\mathbf{k}_2) = 0$ с фиксированным вектором $\mathbf{k}_2 \neq \mathbf{k}_1$ из $\mathcal{K}$. Разложим каждый из векторов $\bar{s}_j(\mathbf{k}')$, $\mathbf{k}' \in \mathcal{K}$ па сумму реальной и мнимой частей: $\bar{s}_j(\mathbf{k}') = a_j(\mathbf{k}') + ib_j(\mathbf{k}')$. Тогда из представленных соотношений следует, что $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_2) = 0$, $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)b_j(\mathbf{k}_2) = 0$, и поэтому

$$a_j(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_2) = 0\,, \quad b_j(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_2) = 0\,, \quad a_j(\mathbf{k}_1)b_j(\mathbf{k}_2) = 0\,, \quad b_j(\mathbf{k}_1)b_j(\mathbf{k}_2) = 0\,.$$

Кроме того, выбрав $\mathbf{k} = -2\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k} = -2\mathbf{k}_2$, получим дополнительные соотношения

$$a_j(\mathbf{k}_1)b_j(\mathbf{k}_1) = 0\,, \quad a_j(\mathbf{k}_2)b_j(\mathbf{k}_2) = 0\,, \qquad a_j^2(\mathbf{k}_1) = b_j^2(\mathbf{k}_1)\,, \quad a_j^2(\mathbf{k}_2) = b_j^2(\mathbf{k}_2) = 0\,,$$

то есть для каждой пары $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathcal{K}$ должны существовать четыре вектора, являющиеся все попарно взаимно ортогональными. Это может быть только в том случае, когда один из них равен нулю. Такое положение невозможно, в силу указанных равенств длин векторов $a_j(\mathbf{k}_1)$ и $b_j(\mathbf{k}_1)$, а также $a_j(\mathbf{k}_2)$ и $b_j(\mathbf{k}_2)$.

Следовательно, распределение векторного поля $\bar{s}_j(\mathbf{k})$ и, соответственно, поля $s_j(\mathbf{x})$, реализующее минимум функционала (10) (соответственно (2)) таково, что в сумме (13) имеется только два ненулевых слагаемых с $\eta(\mathbf{k}')$ и $\eta(-\mathbf{k}')$ при некотором произвольном, по фиксированном векторе $\mathbf{k}' \in \mathcal{K}$. Тогда распределение векторного поля $s_j(\mathbf{x})$, реализующего минимум энергии, вид

$$s_j(\mathbf{x}) = \frac{2}{N}\mathrm{Re}\left[(a_j(\mathbf{k}') + ib_j(\mathbf{k}'))e^{i(\mathbf{k}',\mathbf{x})}\right]\,,$$

где векторы $a_j(\mathbf{k}')$ и $b_j(\mathbf{k}')$ взаимно ортогональны и равны по своей длине.

Наконец, обратимся к равенству (17). Оно позволяет определить длину векторов $a_j(\mathbf{k}')$ и $b_j(\mathbf{k}')$,

$$N^2 = |\bar{s}_j(\mathbf{k}')|^2 + |\bar{s}_j(-\mathbf{k}')|^2 = 2(a_j^2(\mathbf{k}') + b_j^2(\mathbf{k}')) = 4a_j^2(\mathbf{k}')\,,$$

то есть $|a_j(\mathbf{k}')| = N/2$ или, окончательно,

$$s_j(\mathbf{x}) = m_j\cos(\mathbf{x},\mathbf{k}') + n_j\sin(\mathbf{x},\mathbf{k}') \tag{18}$$

где $\mathbf{m} = a_j(\mathbf{k}')/|a_j(\mathbf{k}')|$ и $\mathbf{n} = -b_j(\mathbf{k}')/|b_j(\mathbf{k}')|$ — взаимно ортогональные единичные векторы.

Таким образом, поле $s_j(\mathbf{x})$, при условии, что множество $\mathcal{K}$ не содержит 0 и угловых точек куба $\bar{\Lambda}_N$, реализующее минимум функционала энергии геометрически, представляет собой *спиральную магнитную структуру*, определяемую произвольной парой взаимно ортогональных векторов $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ и вектором $\mathbf{k}' \in \mathcal{K} \subset \bar{\Lambda}_N$, который определяет направление оси и шаг спирали.

Литература

1. Вирченко Ю.П. Основное состояние векторной решеточной модели // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2012. – 23(142);29. – С.54-66.
2. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны / М.: Наука, 1967. – 368 с.
3. Ruelle D. Statistical Mechanics, Rigorous Results / Ney York-Amsterdam: W.A.Benjamin, Inc., 1969. (Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты / М.: Мир, 1971.)
4. Вирченко Ю.П. К теории основного состояния обменной модели Гейзенберга // Проблемы теоретической физики / Киев: Наукова думка, 1991. – С.80-96.

GROUND STATE OF VECTOR LATTICE MODEL WITH PAIR INTERACTION THE DEGENERATE EXCHANGE INTEGRAL CASE

A.S. Klyuyev, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. The class of periodical ground states of spherically symmetric vector model of statistical mechanics is studied. It is done at the supposition that external field is absent and the exchange integral in its hamiltonian is integrable. Besides, it is supposed that the Fourier-image of exchange integral is degenerate that is the Fourier-image of pair-exchange integral has more than one pair of sign-opposite points in $\mathbf{k}$-space where its minimum is realized. It is shown that the vector field should be concentrated only at one pair point of $\mathbf{k}$-space with opposite sign as it is in the case without the degeneracy of exchange integral.

Key words: vector model, hamiltonian, ground state.