MSC 35J10,

ОПЕРАТОРЫ ШРЕДИНГЕРА НА РАЗВЕТВЛЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

М.Х. Нуман Эльшейх

Российский Университет Дружбы Народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198, Россия, mohnuman@hotmail.com

Аннотация. Рассматриваются операторы Шредингера на разветвленных многообразиях переменной размерности. Получено описание множества самосопряженных расширений симметрического оператора Шредингера, изначально заданного на гладких финитных функциях, носитель которых не содержит точек ветвления многообразия.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, разветвленные многообразия, самосопряженные расширения.

1. Введение. Дифференциальные операторы на разветвленных многообразиях имеют применения к описанию ряда процессов в квантовой механике, физике полупроводников и биологии. Основы теории дифференциальных уравнений па графах изложены в монографии [3], в которой приведен ряд примеров физических задач, приводящих к исследованию дифференциальных операторов па графах. В работах [10, 4, 9] изучены спектральные свойства таких операторов и исследованы динамические свойства эволюции, определяемых уравнением Шредингера на графе. В работах [1, 6, 8, 11] исследуется множество самосопряженных расширений оператора Шредингера, заданного изначально па пространстве финитных гладких функций, не содержащих точек ветвления графа ([6, 8, 11]) или точек смены типа оператора (см. [1]). В статье [8] найдены аппроксимации формулами Фейнмана унитарных полугрупп, задаваемых некоторыми из самосопряженных расширений. В настоящей статье рассматриваются операторы Шредингера на разветвленных многообразиях, гладкие компоненты которых могут иметь различные размерности. Работа является продолжением исследований [8], в которых изучался граф с конечным множеством рёбер, и работы [13], в которой изучались операторы Шредингера на одномерных разветвленных многообразиях.

Актуальность рассматриваемой задачи состоит в том, что в последнее время значительно усилился интерес к описанию динамики частиц на графах, дендритах и иных разветвленных многообразиях со стороны математической физики и квантовой механики. С математической точки зрения операция дифференцирования функции, однозначно определенная для функций, заданных на области или на гладком многообразии, нуждается в доопределении для функций, заданных на многообразиях, содержащих точки ветвления. Цель настоящего исследования – определить действие оператора Шредингера на функциях, заданных на разветвленном многобразии, множество точек ветвления которого, называемое в дальнейшем многообразием ветвления, представляет собой объединение конечного множества гладких поверхностей различной размерности. Для этой цели мы зададим оператор Шредингера $\mathbf{L}_0$ на пространстве $C^{\infty}_{0,0}$ финитных и бесконечно дифференцируемых функций, носители которых не содержат точек ветвления и граничных точек многообразия. Оператором Шредингера $\mathbf{L}$ на разветвленном многообразии будем называть самосопряженное расширение оператора $\mathbf{L}_0$. В настоящей работе дано описание множества всех операторов Шредингера на разветвленном многообразии в терминах условий на множество предельных значений на многообразии ветвления функций из области определения оператора $\mathbf{L}$.

2. Операторы Шрёдингера на разветвленном многообразии. Определим разветвленное многообразие Γ как объединение $\Gamma = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{n} \Gamma_\alpha$, где Γ_α при каждом $\alpha \in \{1, 2, \ldots, n\}$ представляет собой d_α-мерную ограниченную область в пространстве R^{d_α} с $(d_\alpha - 1)$ мерной гладкой границей $\eta_\alpha \equiv \partial\Gamma_\alpha$. Граница $\eta = \partial\Gamma$ многообразия Γ представляет собой объединение границ областей $\eta = \bigcup_{\alpha=1}^{n} \eta_\alpha$.

Точка Q называется точкой ветвления многообразия Γ, если она является граничной точкой для не менее чем двух различных областей Γ_α, Γ_β при $\alpha \neq \beta$.

На Γ задается борелевская мера, определяемая требованием, чтобы её сужение на каждую из областей Γ_α совпадало со стандартной мерой Лебега пространства R^{d_α}. Тогда допустимо рассмотрение пространства квадратично интегрируемых комплексно-значных функций на Γ, определяемых посредством равенства $L_2(\Gamma) = \bigoplus L_2(\Gamma_\alpha)$.

Пусть $C_0^\infty(\Gamma)$ — векторное пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на Γ с компактными носителями, не содержащими точек ветвления разветвленного многообразия Γ. Обозначим посредством $\mathbf{L}_0 = \bigoplus \mathbf{L}_0^\alpha$ – линейный оператор, определяемый на линейном пространстве $D(\mathbf{L}_0) = C_0^\infty(\Gamma)$ с равенством $\mathbf{L}_0 u = \{\oplus \mathbf{L}_0^\alpha u_\alpha\}$,

$$\mathbf{L}_0^\alpha u_\alpha = \frac{1}{m_\alpha} \Delta_\alpha u_\alpha + i\big(\overrightarrow{B_\alpha}(x), \nabla u_\alpha\big) + i\,\mathrm{div}\big(\overrightarrow{B_\alpha}(x)\, u_\alpha\big) + C_\alpha(x) u_\alpha\,. \tag{2.1}$$

Здесь $\{u_\alpha, \alpha = 1, ..., n\}$ — сужения функции u на области Γ_α, $u \in C_0^\infty(\Gamma)$ и $m_\alpha \geq m_0 > 0$ $\forall \alpha = 1, ..., n$.

Мы будем предполагать, дополнительно, что имеет место:

H. $\overrightarrow{B}_\alpha(x) \in C^1(\Gamma_\alpha, R^{d_\alpha}) \bigcap C(\overline{\Gamma}_\alpha, R^{d_\alpha})$, $C_\alpha(x) \in C(\overline{\Gamma}_\alpha, R)$.

Мы будем изучать расширения операторов $\mathbf{L}_0$ с пространства $C_0^\infty(\Gamma)$ на $L_2(\Gamma)$. Важность изучения таких расширений связана, в частности, с тем, что когда $\overrightarrow{B}$, C – вещественнозначные, ограниченные и непрерывные всюду за исключением точек ветвлении функции на Γ, $m_\alpha = m$, каждое симметрическое расширение является линейным самосопряженным оператором $\mathbf{L}$ в пространстве $L_2(\Gamma)$, который представляет собой гамильтониан квантовой частицы с массой m_α во внешних электрическом и магнитном нолях $\{C, \overrightarrow{B}\}$ и оператор $\mathbf{L}$ определяет динамику частицы на разветвленном многообразии посредством решения задачи Коши для уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathbf{L}u(x,t)\,, \tag{2.2}$$

с начальным условием

$$u(x, +0) = u_0(x), \quad x \in \Gamma\,. \tag{2.3}$$

Иными словами, все самосопряженные расширения оператора $\mathbf{L}_0$ могут представлять генераторы унитарных групп.

Оператор $\mathbf{L}_0$ с областью определения $D(\mathbf{L}_0) = C_0^\infty(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$, плотно определен и симметричен. Областью определения $D(\mathbf{L}_0^*)$ сопряженного оператора $\mathbf{L}_0^*$ является линейное подпространство $D(\mathbf{L}_0^*) = \bigoplus\limits_{\alpha=1}^{n} W_2^2(\Gamma_\alpha) := W_2^2(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$.

Пусть многообразие Γ состоит из m полупрямых, k конечных интервалов и $N-(m+k)$ областей с размерностью, большей 1. В случае 1-мерной области Γ_α граничное значение $u_\alpha|_{\eta_\alpha}$ является набором комплексных чисел на границе η_α, представляющей собой одну или две точки. В случае $d_\alpha \geq 2$ граничное значение $u_\alpha|_{\eta_\alpha}$ является элементом пространстве $W_2^{\frac{3}{2}}(\eta_\alpha)$. Согласно теореме о следах, $u|_\eta \in W_2^{\frac{3}{2}}(\eta) = \bigoplus\limits_{\alpha=1}^{N} W_2^{\frac{3}{2}}(\eta_\alpha)$ (см. [12]), где через $u|_\eta$ обозначена совокупность $\left(u|_{\eta_1} \ldots u|_{\eta_N}\right)^T$ предельных значений функции u на границе η. Аналогично, предельное значение производной $\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial n_\alpha}$ сужения u_α по направлению внешней нормали n_α к границе η_α в случае полупрямой η_α представляет собой элемент пространства $\mathbb{C}$, в случае же ограниченного интервала – элемент пространства $\mathbb{C}^2$, а в случае области размерности $d_\alpha \geq 2$ – элемент пространства $W_2^{1/2}(\eta_\alpha)$.

Обозначим набор граничных значений нормальной производной посредством $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\eta \equiv \left(\dfrac{\partial u}{\partial n_1}\Big|_{\eta_1}, \ \ldots, \ \dfrac{\partial u}{\partial n_N}\Big|_{\eta_N}\right)^T$, где n_α — вектор внешней относительно Γ_α нормали к η_α, $\alpha = 1, \ldots, N$. Введем гильбертово пространство

$$h = L_2(\eta) = \bigoplus_{\alpha=1}^{N} L_2(\eta_\alpha) = \mathbb{C}^{m+2k} \bigoplus_{\alpha=m+k+1}^{N} L_2(\eta_\alpha)\,.$$

Определим, далее, пространство граничных значений $G = h^{\frac{3}{2}} \oplus h^{\frac{1}{2}}$, где

$$h^{\frac{3}{2}} = \mathbb{C}^{m+2k} \bigoplus_{\alpha=m+k+1}^{N} W_2^{\frac{3}{2}}(\eta_\alpha)$$

и, аналогично,

$$h^{\frac{1}{2}} = \mathbb{C}^{m+2k} \bigoplus_{\alpha=m+k+1}^{N} W_2^{\frac{1}{2}}(\eta_\alpha)\,.$$

Таким образом, граничное значение $u|_\eta$ функции $u \in W_2^2(\Gamma)$ является элементом пространства $h^{\frac{3}{2}}$, а граничное значение $\frac{\partial u}{\partial n}|_\eta$ ее нормальной производной – элементом пространства $h^{\frac{1}{2}}$.

Введем в пространстве h операторы M и $\mathcal{B}$. Оператор M действует па каждый элемент $v \in h$ как оператор умножения па функцию

$$\mu(\xi) = m_\alpha^{-1}\,, \quad \text{если } \xi \in \eta_\alpha\,, \ \alpha \in \overline{1,n}\,.$$

А оператор $\mathcal{B}$ действует па каждый элемент $v \in h$ как оператор умножения па функцию

$$\beta(\xi) = \left(\overrightarrow{b}_\alpha(\xi), \overrightarrow{n}_\alpha(\xi)\right), \quad \text{если } \xi \in \eta_\alpha\,, \ \alpha \in \overline{1,n}\,,$$

где через $\overrightarrow{b}_\alpha = \overrightarrow{B}_\alpha|_{\eta_\alpha}$ обозначено предельные значения вектор-функции $\overrightarrow{B}_\alpha$ на границе η_α.

Теорема. *Пусть выполнено предположение* **H** *о функциях* $\overrightarrow{B}$, C *и* $m = 1$, $\overrightarrow{b}_\alpha = 0$ *для любого* $\alpha \in \overline{1,n}$; A *– линейный оператор в пространстве* h *с плотной областью определения* $h^{\frac{3}{2}}$, *значения которого лежат в линейном многообразии* $h^{\frac{1}{2}}$; D_A *– линейное многообразие функций* $u \in W_2^2(\Gamma)$, *граничные значения которых связаны с граничными значениями их производных по направлению внешней нормали соотношением*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\eta = Au|_\eta\,.$$

Тогда, для самосопряженности оператора $\mathbf{L}_A = \left(\mathbf{L}_0^*\right)|_{D_A}$, *необходимо и достаточно выполнения равенства* $A = A^*$.

□ Так как $m = 1$, $\overrightarrow{b}_\alpha = 0$ для любого α, то из условий $u \in D(\mathbf{L}_A)$ и $v \in D(\mathbf{L}_0^*)$ следует, что справедливо равенство

$$\left(\mathbf{L}_A u, v\right)_h - \left(u, \mathbf{L}_0^* v\right)_h = \left(\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\eta, v|_\eta\right)_h - \left(u|_\eta, \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\eta\right)_h.$$

Следовательно

$$\left(\mathbf{L}u, v\right)_h - \left(u, \mathbf{L}_0^* v\right)_h = \left(u|_\eta, A^* v|_\eta - \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\eta\right)_h.$$

Следы $u|_\eta$ принимают произвольные значения, и поэтому равенство $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\eta = A^* v|_\eta$ необходимо и достаточно для включения $v \in D(\mathbf{L}_A^*)$. Поскольку область определения оператора $\mathbf{L}_A$ определяется уравнением $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\eta = Au|_\eta$, то $\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_A^*$. Отсюда следует, что $A = A^*$. ■

Следствие. *Пусть выполнено предположение* **H** *о функциях* $\overrightarrow{B}$, C; A *– линейный оператор в пространстве* h *с плотной областью определения* $h^{\frac{3}{2}}$, *значения которого лежат в линейном многообразии* $h^{\frac{1}{2}}$; D_A *— линейное многообразие функций* $u \in W_2^2(\Gamma)$, *граничные значения которых связаны с граничными значениями их производных по направлению внешней нормали соотношением*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\eta = Au|_\eta\,.$$

Тогда для самосопряженности оператора $\mathbf{L}_A = (\mathbf{L}_0^*)|_{D_A}$ *необходимо и достаточно выполнения равенства* $MA = A^*M - 2i\mathcal{B}$.

□ Поскольку выполняется предположение **H**, то из условий $u \in D(\mathbf{L}_A)$ и $v \in D(\mathbf{L}_0^*)$ следует, что справедливо равенство

$$(\mathbf{L}_A u, v)_h - (u, \mathbf{L}_0^* v)_h = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\eta, Mv|_\eta\right)_h - \left(u|_\eta, M\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\eta\right)_h + 2i\Big(u|_\eta, \mathcal{B}v|_\eta\Big)_h .$$

Следовательно

$$(\mathbf{L}u, v)_h - (u, \mathbf{L}_0^* v)_h = \left(u|_\eta, A^*Mv|_\eta - M\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\eta - 2i\mathcal{B}v|_\eta\right)_h .$$

Следы $u|_\eta$ принимают произвольные значения, и поэтому равенство

$$M\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\eta = \Big(A^*M - 2i\mathcal{B}\Big)v|_\eta$$

необходимо и достаточно для включения $v \in D(\mathbf{L}_A^*)$. Поскольку область определения оператора $\mathbf{L}_A$ определяется уравнением $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\eta = Au|_\eta$, то $\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_A^*$. Отсюда следует, что $MA = A^*M - 2i\mathcal{B}$. ■

Заключение. Полученное в работе описание множества всех операторов Шредингера на каждом разветвленном многообразии, определяемых как самосопряженные расширения оператора, изначально заданного на гладких финитных функциях с носителями, не соодержащими точек ветвления многообразия дает описание различных возможностей определения оператора Шредингера на пространстве функций, квадратично интегрируемых на этом разветвленном многообразии. Описание области определения каждого из самосопряженных расширений дается в терминах линейных соотношений, которым удовлетворяют предельные значения функции из области определения оператора и ее производной в точках ветвления и граничных точках рассматриваемого многообразия. заметим, что каждому из операторов Шредингера соответствует марковский процесс, поведение которого в окрестности точки ветвления многообразия определяется выбором области определения оператора Шредингера. Полученные результаты расширяют область исследований работы [11], в которой дано описание самосопряженных расширений на графе с одной вершиной и двумя ребрами, на случай графов с произвольным числом ребер и разветвленного многообразия с гладкими компонентами различных размерностей.

Литература

1. Амосов Г.Г., Сакбаев В.Ж. О самосопряженных расширениях оператора Шредингера с вырождением на на двух полупрямых и определяемых ими марковских коциклах // Матем. заметки. – 2004. – 76;3. – С.335-343.
2. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория / М.: Изд. ин. лит., 1962.

3. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / М.: Физматлит, 2004.
4. Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О некоторых качественных свойствах уравнений на одномерном клеточном комплексе // Матем. заметки. – 1996. – 59;6. – С.777-780.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. т.1. Функциональный анализ / М.: Мир, 1977.
6. Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Динамика квантовой частицы с разрывной зависимостью массы от положения // Доклады РАН. – 2010. – 433:3. – С.314-317.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / М.: Мир, 1972.
8. Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Диффузия и квантовая динамика на графах // Доклады РАН. – 2013. – 451, №2. – С.141-145.
9. Толченников А.А., Чернышев В.Л., Шафаревич А.И. Асимптотические свойства и классические динамические системы в квантовых задачах на сингулярных пространствах // Нелинейная динамика. – 2010. – 6;3. – С.623-638.
10. Чернышев В.Л., Шафаревич А.И. Квазиклассический спектр оператора Шредингера на геометрическом графе // Матем. заметки. – 2007. – 82;4. – С.606-620.
11. Gadella M., Kuru S., Negro J. Self-adjoint Hamiltonians with a mass jump: General matching conditions // Phys. Letters. – 2007. – 362, №4. – P.265-268.
12. Яковлев Г.Н. О следах функций из пространства W_p^l на кусочно-гладких поверхностях // Матем. сб. – 1967. – 74(116):4. – С.526-543.
13. Нуман Эльшейх М.Х., Сакбаев В.Ж. Операторы Лапласа для уравнения Шредингера на графах // Труды МФТИ. – 2014. – 6.

SCHRÖDINGER OPERATORS ON BRANCHED MANIFOLDS

M.H. Numan Elsheikh

Peoples' Friendship University,
Miklukho-Maklaya St., 6, Moscow, 117198, Russia, mohnuman@hotmail.com

Abstract. Schrödinger's operators on branched manifolds with variable dimension are studied. In particular, the description of the set of self-adjoint extensions of symmetric Schrödinger operator initially defined on the set of smooth finite functions whose support does not contain branch points of the manifold are obtained.

Key words: Schrödinger's equation, branched manifolds, self-adjoint extensions.