MSC 11D45

ОБ ОДНОМ ДИОФАНТОВОМ УРАВНЕНИИ НАД $\circ$-КОЛЬЦОМ ФИБОНАЧЧИ

Д.В. Кузнецова, А.В. Лаптев, А.В. Шутов

Владимирский государственный университет,
пр. Строителей, 11, Владимир, 600024, Россия, e-mail: WolvShatakeruk@hotmail.ru,
oxoron30189@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматривается уравнение вида $F_n \circ X - F_m \circ Y = C, X \leq N \in \mathbb{N}$, где $\circ$ – круговое умножение Матиясевича-Кнута. Для этого уравнения была получена асимптотическая формула для числа решений.

Ключевые слова: круговое умножение, последовательность Фибоначчи, диофантовы уравнения.

1. Введение. Рассмотрим последовательность Фибоначчи вида

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{для любых} \quad n > 2\,.$$

Хорошо известно, что любое натуральное число представимо в системе счисления Фибоначчи, то есть может быть записано в виде

$$N = \sum_i \varepsilon_i F_i, \quad \varepsilon_i = 0 \text{ или } 1, \quad \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} = 0.$$

Тогда для двух чисел $N, M \in \mathbb{N}$ вида

$$N = \sum_i \varepsilon_i F_i \quad M = \sum_j \varepsilon'_j F_j$$

операция кругового умножения задается следующим образом

$$N \circ M = \sum_i \sum_j \varepsilon_i \varepsilon'_j F_{i+j}.$$

Относительно этой операции множество натуральных чисел образует $\circ$-кольцо Фибоначчи.

Впервые операцию кругового умножения ввели независимо друг от друга Ю.В. Матиясевич [1] при решении десятой проблемы Гильберта и позднее Д. Кнут [2]. В настоящее время модификацию данного определения предложил В.Г. Журавлев [3]. Им была получена явная формула для кругового умножения [3]

$$N \circ M = NM + [(N+1)\tau][(M+1)\tau],$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №11-01-00578а.

где $[\cdot]$ - целая часть числа, $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ - золотое сечение.

Ранее относительно этой операции были рассмотрены аналоги ряда классических теоретико-числовых задач. В частности, В.Г.Журавлев рассматривал аналог представления натурального числа суммой двух, трех и четырех квадратов, заменяя обычное умножение круговым [4]. А.В. Лаптев рассмотрел аналог задачи о пифагоровых тройках [5], а И.К. Швагирева занималась бинарной аддитивной задачей [6].

Во всех этих случаях были получены результаты, определяющие условия для существования решения, а в некоторых случаях были получены оценки на число решений или же асимптотические формулы для числа решений.

В работе рассматривается уравнение от двух переменных $X, Y \in \mathbb{N}$:

$$F_n \circ X - F_m \circ Y = C, \quad X \leq N \in \mathbb{N}\,. \tag{1}$$

Доказывается

Теорема 1. *Пусть $S_{n,m}(N)$ – число решений уравнения (1). Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$S_{n,m}(N) = \hat{c}_{n,m}(\delta(C))N + O(\ln N),$$

где $\delta(x) = x - [(x+1)\tau]\widetilde{\tau}$, $\widetilde{\tau} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, а $\hat{c}_{n,m}(x)$ – явно определенная в теореме **??** *кусочно-линейная функция от x, называемая функцией плотности.*

2. Вспомогательные результаты. Рассмотрим функцию $\delta(x)$, определенную в теореме 1.

Предложение 1. *Функция $\delta(x)$ представима в виде $\delta(x) = -1 + \widetilde{\tau}\langle(x+1)\tau\rangle$. $\langle\cdot\rangle$ —* дробная часть.

□ Действительно, если переписать определение $\delta-$функции следующим образом

$$\delta(x) = x - (x+1)\tau\widetilde{\tau} + \langle(x+1)\tau\rangle\widetilde{\tau},$$

то после несложных преобразований получим

$$\delta = -1 + \widetilde{\tau}\langle(x+1)\tau\rangle\,. \quad \blacksquare$$

Предложение 2. *Для $\delta-$функции справедливо, что $\delta(n) \in [-1; \tau)$.*

□ Доказательство предложения можно найти в работе [3]. ■

Предложение 3. *Значения $\delta-$функции представимы в виде $\delta(n) = a - b\tau$, причем $a, b \in \mathbb{N}, a + b = n$.*

□ Из предложения 1 следует, что

$$a - b\tau \in [-1; \tau).$$

Пусть

$$k = [(x+1)\tau]\,, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая, что $\widetilde{\tau} = 1 + \tau$, получим $\Rightarrow \quad \delta(x) = x - k(1+\tau) = x - k - k\tau$. Обозначим $x - k = a, k = b$. Тогда

$$\delta(x) = a - b\tau\,, \qquad a, b \in \mathbb{Z}\,. \qquad \blacksquare$$

Предложение 4. *Для любого $c \in \mathbb{Z}[\tau] \cap [-1;\tau)$ найдется такое N, что $\delta(N) = c$.*

$\square$ Пусть $\delta \in [-1;\tau) \cap \mathbb{Z}[\tau]$. Введем число $\delta' = (\delta+1)/\widetilde{\tau}$, причем $\delta' \in [0;1) \cap \mathbb{Z}[\tau]$. Следовательно, δ' представимо в виде $\delta' = a' + b'\tau, \quad a', b' \in \mathbb{Z}$. Тогда $\delta' = \langle b'\tau \rangle$. В качестве N выберем $N = b' - 1$. Получим, что $\delta(N)$, действительно, равна исходному выражению. $\blacksquare$

Предложение 5. *Для функции δ от суммы двух натуральных чисел справедливо равенство*

$$\delta(N_1) + \delta(N_2) = \delta(N_1 + N_2) - \sigma(N_1, N_2)\widetilde{\tau}\,,$$

где

$$\sigma(N_1, N_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta(N_1) + \delta(N_2) \geq \tau, \\ 0, & \text{если } \delta(N_1) + \delta(N_2) \in [-1, \tau), \\ -1, & \text{если } \delta(N_1) + \delta(N_2) < -1. \end{cases}$$

$\square$ Доказательство предложения можно посмотреть в работе [3]. $\blacksquare$

Предложение 6. *Для $\delta-$функции от числа Фибоначчи справедливо равенство*

$$\delta(F_n) = (-\tau)^n\,.$$

$\square$ Воспользуемся методом математической индукции:

$$\delta(1) = 1 - \widetilde{\tau} = -\tau\,;$$

$$\delta(1) = 2 - \widetilde{\tau} = 1 - \tau = \tau^2\,.$$

Рассмотрим переход $n \to n+1$. По предположению индукции,

$$\delta(F_{n-1}) = (-\tau)^{n-1}, \quad \delta(F_n) = (-\tau)^n.$$

Так как $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, то, с учетом предложения 5, имеем

$$\delta(F_{n+1}) = \delta(F_{n-1}) + \delta(F_n),$$

откуда легко получить, что

$$\delta(F_{n+1}) = (-\tau)^{n+1}. \qquad \blacksquare$$

Предложение 7. *Для функции δ от кругового произведения двух натуральных чисел справедливо равенство*

$$\delta(N_1)\cdot\delta(N_2)=\delta(N_1\circ N_2)+\varrho(N_1,N_2)\widetilde{\tau}\,,$$

где

$$\varrho(N_1,N_2)=\begin{cases}1, & \text{если } \delta(N_1)\delta(N_2)\geq\tau,\\ 0, & \text{если } \delta(N_1)\delta(N_2)\in[-1;\tau).\end{cases}$$

□ Доказательство данного предложения можно посмотреть в работе [3]. ■

Предложение 8. *Если один из двух сомножителей является числом Фибоначчи, то для $\delta-$функции от их кругового произведения справедливо равенство*

$$\delta(F_n\circ N)=(-\tau)^n\delta(N)\,.$$

□ По предложению 7 можем записать

$$\delta(F_n\circ N)=\delta(F_n)\cdot\delta(N)+\varrho(F_n,N)\widetilde{\tau}\,.$$

Функция $\varrho(F_n,N)$ будет равна нулю, а значит $\delta(F_n\circ N)=\delta(F_n)\cdot\delta(N)$. Тогда, воспользовавшись предложением 6, получим искомое выражение. ■

3. Доказательство основной теоремы. Перейдем к доказательству теоремы 1, сформулированной во введении.

Для того, чтобы получить ограничение для первого слагаемого уравнения (1), воспользуемся явной формулой для кругового умножения

$$F_n\circ X=F_n\cdot X+[(F_n+1)\tau][(X+1)\tau]\,.$$

Теперь с помощью несложных преобразований можно получить, что

$$F_n\circ X=(F_n+F_{n-1}\tau)X+O(1)\,.$$

Затем воспользуемся формулой Бине для $n-$ого числа Фибоначчи

$$F_n=\frac{\widetilde{\tau}^{n+1}-(-\tau)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

и получим искомое ограничение

$$F_n\circ X\leq\frac{1}{\sqrt{5}}(\widetilde{\tau}^{n+1}+\widetilde{\tau}^n\tau)N+O(1)\,;$$

$$F_n\circ X\leq\widetilde{\tau}^n\cdot N+O(1)\,. \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение

$$K-L=C\,,\quad\text{где}\quad K\leq N'. \tag{3}$$

и обозначим через $S'_{n,m}(N')$ число решений уравнения (3) с дополнительными условиями

$$K = F_n \circ X\,, \qquad L = F_m \circ Y\,.$$

Так как $X \leq N$, то $K \leq X/\widetilde{\tau}^n + O(1)$, а значит,

$$S_{n,m}(N) = S'_{n,m}\left(\frac{N}{\widetilde{\tau}^n}\right) + O(1)\,. \tag{4}$$

Лемма 1. *Число* N *представимо в виде* $N = F_n \circ X$ *тогда и только тогда, когда* $\delta(N) \in I_n$, *где*

$$I_n = \begin{cases} (-\tau^{2k}; \tau^{2k-1}), & n = 2k-1, \\ (-\tau^{2k}; \tau^{2k+1}), & n = 2k. \end{cases}$$

□ Докажем, что $\delta(N) \in I_n$. Пусть $N = F_n \circ X$. Перепишем данное равенство в виде

$$\delta(N) = \delta(F_n \circ X)\,.$$

По предложениям 6 и 7 получим, что

$$\delta(N) = \delta(F_n) \cdot \delta(X) = (-\tau)^n \cdot \delta(X)\,.$$

Следовательно,

$$\delta(N) \in I_n\,.$$

Докажем обратное утверждение. Введем $\delta' = \delta(N)/(-\tau)^n$,

$$\delta(N) = a + b\tau\,, \quad a, b \in \mathbb{Z}\,.$$

Поскольку $\tau-$ обратимый элемент кольца $\mathbb{Z}[\tau]$, можно записать

$$\delta' = a' + b'\tau\,, \quad a', b' \in \mathbb{Z}\,.$$

Из выше изложенного следует $\delta' \in [-1; \tau)$, $\delta' \in \mathbb{Z}[\tau]$, откуда по предложению **??** получаем $\delta' = \delta(X)$.

Осталось показать, что X – искомое число. Проверим, что $\delta(F_n \circ X) = \delta(N)$. По предложению 7 имеем $\delta(F_n) \cdot \delta(X) = \delta(N)$, откуда $\delta(X) = \delta(N)/\delta(F_n) = \delta(N)/(-\tau)^n$, а значит,

$$\delta(X) = \delta'\,.$$

Таким образом, исходное уравнение (3) сводится к уравнению вида

$$K - L = C, \quad \delta(N) \in I_n\,, \quad \delta(M) \in I_m\,.$$

Используя свойства функции δ, получаем

$$\delta(K - L) \equiv \delta(K) - \delta(L) (\operatorname{mod} \widetilde{\tau})\,.$$

Тогда
$$\delta(K)-\delta(L)\equiv\delta(C),\quad K\le N. \tag{5}$$

Число решений уравнения (5) вычисляется следующим образом

$$S'_{n,m}(N)=\sum_{K\le N:\delta(K)\in I_n}\ \sum_{\substack{L:\delta(L)\in I_m,\\ \delta(K)-\delta(L)=\delta(C)}}1=\sum_{K\le N:\delta(K)\in I_n}\ \sum_{\substack{L:\delta(K)\in\delta(C)+I_m,\\ \delta(K)-\delta(L)=\delta(C)}}1=$$

$$=\sum_{\substack{K\le N:\delta(K)\in I_n,\\ \delta(K)\in\delta(C)+I_m}}1=\sum_{\substack{K\le N:\\ \delta(K)=I_n\cap(I_m+\delta(C))}}1=\sharp\{N_1\le N:\delta(N_1)\in I_n\cap(I_m+\delta(C))\}.$$

Таким образом получаем, что

$$S'_{n,m}(N)=\frac{|I_n\cap(I_m+\delta(C))|}{|[-1;\tau)|}N+o(N)\,. \tag{6}$$

Поскольку $\tau-$ иррационально, дробная доля $\{X\tau\}$ равномерно распределена но модулю 1. Справедливо более сильное утверждение [7].

Теорема Нидеррайтера. *Пусть дана последовательность дробных долей* $\{i\alpha\}$, *где* $i=1,2,...,N$ *и* $\alpha=[q_0,q_1,q_2,...]$ – *разложение в цепную дробь иррационального числа* α *с ограниченными неполными частными* $q_i\le K$ *для всех* $i\ge1$, *и пусть*

$$A([\beta,\gamma);N)=\sharp\{i:\{i\alpha\}\in[\beta,\gamma),i=1,2,...,N\}\,,$$

$$D_N=\sup_{0\le\beta<\gamma\le1}\left|\frac{A([\beta,\gamma);N)}{N}-(\gamma-\beta)\right|$$

– *верхняя граница отклонений по всем полуинтервалам для числа попаданий* $A([\beta,\gamma);N)$ *последовательности* $\{i\alpha\}$ *в полуинтервал* $[\beta,\gamma)$. *Тогда для* D_N *имеет место следующее неравенство*

$$ND_N\le3+\left(\frac{1}{\ln\widetilde{\tau}}+\frac{K}{\ln K+1}\right)\ln N\,.$$

Согласно предложению 1, справедлива формула $\delta(x)=-1+\widetilde{\tau}\langle(x+1)\tau\rangle$. Отсюда вытекает, что значения $\delta(X)$ равномерно распределены на интервале $[-1;\tau)$. По теореме Нидеррайтера остаточный член имеет порядок $O(\ln N)$. Тогда

$$S'_{n,m}(N)=\frac{|I_n\cap(I_m+\delta(C))|}{|[-1;\tau)|}N+O(\ln N)\,.$$

Воспользовавшись формулой (2) можно записать искомое выражение для числа решений уравнения (1)

$$S_{n,m}(N)=\frac{|I_n\cap(I_m+\delta(C))|}{|[-1;\tau)|}\widetilde{\tau}^nX+O(\ln N)\,, \tag{7}$$

откуда следует, что

$$S_{n,m}(N) = |I_n \cap (I_m + \delta(C))|\widetilde{\tau}^{n-1}X + O(\ln N)\,. \tag{8}$$

Таким образом, теорема **??** доказана с $\hat{c}_{n,m}(x) = |I_n| \cap (I_m + x)$. ■

4. Вычисление функции плотности. Перейдем к вычислению функции плотности, введенной в теореме 1.

Теорема 2. *Пусть $\hat{c}_{n,m}(x)$ – функция плотности. Тогда для нее справедливы следующие явные формулы:*

$$\hat{c}_{1,1}(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in [-\tau; 0), \\ 1-x, & x \in [0;\tau), \\ \tau^2, & x \in [-1;-\tau); \end{cases} \qquad \hat{c}_{1,2}(x) = \begin{cases} \tau + x, & x \in [-\tau; 0), \\ \tau, & x \in [0;\tau^2), \\ 1-x, & x \in [\tau^2;\tau), \\ -\tau - x, & x \in [-1;-\tau). \end{cases}$$

Для $n = 1, m > 2$

$$\hat{c}_{1,m}(x) = \begin{cases} R_m + x + \tau^2, & x \in [-\tau^2 - \tau^{m-1} - L_m; -\tau^2 - L_m), \\ \tau^{m-1}, & x \in [-\tau^2 - L_m; \tau - \tau^{m-1} - L_m), \\ \tau - L_m - x, & x \in [\tau - \tau^{m-1} - L_m; \tau), \\ -1 - L_m - x, & x \in [-1; -1 - L_m), \\ 0, & x \in [-1 - L_m; -\tau^2 - \tau^{m-1} - L_m)\,. \end{cases}$$

Для $n \geq 2, m \geq 2$

$$\hat{c}_{n,m}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1 - L_m; L_n - L_m - \tau^{m-1}), \\ \frac{R_m - L_n + x}{\tau^{n-1}}, & x \in [L_n - L_m - \tau^{m-1}; L_n - L_m), \\ \tau^{m-n}, & x \in [L_n - L_m; R_n - L_m - \tau^{m-1}), \\ \frac{R_n - L_m - x}{\tau^{n-1}}, & x \in [R_n - L_m - \tau^{m-1}; R_n - L_m), \\ 0, & x \in [R_n - L_m; \tau - L_m). \end{cases}$$

Здесь

$$L_i = -\tau^{2\left[\frac{i+1}{2}\right]}; \qquad R_i = \begin{cases} \tau^i, & i - \text{нечетно}, \\ \tau^{i+1}, & i - \text{четно}. \end{cases}$$

□ Рассмотрим случай, когда $n = 1$ и $m = 1$. Зафиксируем один из отрезков, например I_n, а другой, I_m, будем смещать на величину x. Стоит заметить, что в этом случае функция плотности никогда не примет нулевого значения, поскольку суммарная длина двух интервалов I_1 будет больше $\Big|[-1;\tau)\Big|$, а значит их пересечение будет всегда непустым.

Функция плотности примет свое максимальное значение только тогда, когда оба рассматриваемых интервала наложатся друг на друга (см. рис. 1) и будет равно $|I_1|$, то есть

$$\hat{c}_{1,1}(0) = \tau^0 = 1\,.$$

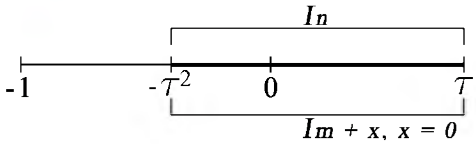

Рис. 1. Полное наложение интервалов I_n и I_m друг на друга.

Для дальнейшего доказательства, необходимо убедиться в том, что L_i и R_i действительно являются соответственно левой и правой границей интервала $[-1;\tau)$. Перепишем I_n, заданный в лемме 1 в виде

$$I_n = \begin{cases} (-\tau^{n+1};\tau^n), & n - \text{нечетное}, \\ (-\tau^n;\tau^{n+1}), & n - \text{четное}. \end{cases}$$

Легко видеть, что R_i является правой границей данного интервала. Теперь, если преобразовать левую границу I_n как $-\tau^{2\left[\frac{n+1}{2}\right]}$, то получим, что L_i– левая граница.

Теперь рассмотрим такой вариант, что $L_m + x \in [-1;\tau^2)$ или $x \in [-\tau;0)$ (см. рис. 2), тогда функция $\hat{c}_{1,1}(x)$ будет принимать значения

$$\hat{c}_{1,1}(x) = \Big|I_1 \cap |I_1 + x|\Big| = R_m + \tau^2 + x = \tau + \tau^2 + x = 1 + x\,.$$

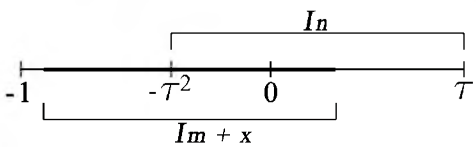

Рис. 2. Наложение интервалов I_n и I_m друг на друга при $x \in [-\tau;0)$.

В этом случае остался последний интервал (см. рис. 3), а именно, $L_m + x \in [-\tau^2;\tau)$ или $x \in [0;1)$, но так как x не может выходить за пределы интервала $[-1;\tau)$, необходимо разбить полученный интервал на два: $x \in [0;\tau)$ и $x \in [-1;-\tau)$. Тогда в первом случае функция плотности примет вид

$$\hat{c}_{1,1}(x) = R_n - (L_n + x) = \tau - (-\tau^2 + x) = 1 - x\,,$$

а во втором насколько пересечение с одним концом фиксированного интервала уменьшится, настолько увеличится с другим, а, следовательно, значение $\hat{c}_{1,1}(x)$ станет постоянным и будет равняться

$$\hat{c}_{1,1}(x) = |I_1| + |I_1| - \widetilde{\tau} = \tau^2\,.$$

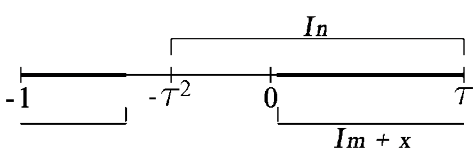

Рис. 3. Наложение интервалов I_n и I_m друг на друга при $x \in [0,\tau)$ и $x \in [-1,-\tau)$.

Кроме того, это значение является минимальным для рассматриваемого случая (см. рис. 4).

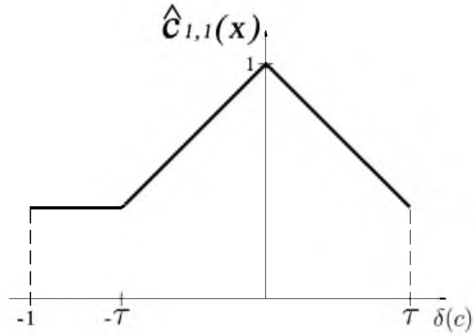

Рис. 4. Функция плотности для $n = 1$ и $m = 1$.

Теперь рассмотрим случай для $n = 1$ и $m = 2$. Здесь функция плотности обратится в ноль в единственном случае, когда левая граница смещаемого интервала будет равна (-1). При $L_m + x \in [-1; -\tau^2)$ или $x \in [-\tau; 0)$,

$$\hat{c}_{1,2}(x) = (R_m + x) - L_n = \tau + x\,.$$

При $L_m + x \in [-\tau^2; 0)$ или $x \in [0; \tau^2)$, функция $\hat{c}_{1,2}(x)$ будет принимать значение, равное длине интервала I_2, то есть

$$\hat{c}_{1,2}(x) = \tau\,.$$

При $L_m + x \in [0; \tau)$ или $x \in [\tau^2; 1)$, снова вышли за пределы кольца $\mathbb{Z}[\tau]$, поэтому следует разбить его на две части $x \in [\tau^2; \tau)$ и $x \in [-1; -\tau)$.

Для первого интервала получим функцию плотности

$$\hat{c}_{1,2}(x) = R_n - (L_m + x) = \tau + \tau^2 - x = 1 - x\,,$$

а для второго имеются две известные точки $(-1; \tau^2)$ и $(-\tau; 0)$, проведя прямую через которые, получим что

$$\hat{c}_{1,2}(x) = -\tau - x \quad \text{(см. рис. 5).}$$

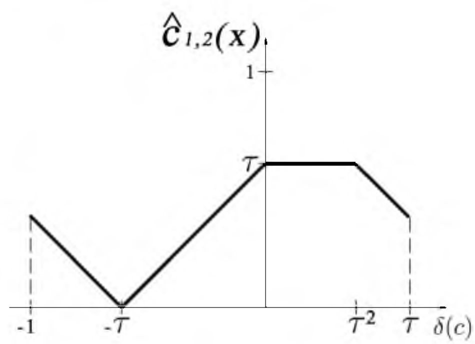

Рис. 5. Функция плотности для $n = 1$ и $m = 2$.

Перейдем к рассмотрению случая при $n = 1$ и $m > 2$. Теперь функция плотности будет обращаться в ноль на целом интервале, поскольку длина смещаемого интервала $|I_m| < \Big| |[-1;\tau)| - |I_1| \Big|$. Тогда функция будет принимать нулевые значения при $L_m + x \in [-1; L_n - \tau^{m-1})$ или $x \in [-1 - L_m; -\tau^2 - \tau^{m-1} - L_m)$.

Функция плотности будет принимать максимальные значения, равные $|I_m|$ в том случае, когда I_m полностью входит в фиксированный I_n. Это будет происходить при $L_m + x \in [-\tau^2; \tau - \tau^{m-1})$ или $x \in [-\tau^2 - L_m; \tau - \tau^{m-1} - L_m)$.

Когда $L_m + x \in [-\tau^2 - \tau^{m-1}; -\tau^2)$ или $x \in [-\tau^2 - \tau^{m-1} - L_m; -\tau^2 - L_m)$, $\hat{c}_{1,m}(x)$ примет вид

$$\hat{c}_{1,m}(x) = R_m + x + \tau^2 .$$

Когда $L_m + x \in [\tau - \tau^{m-1}; \tau)$ или $x \in [\tau - \tau^{m-1} - L_m; \tau - L_m)$, снова выйдем за допустимые границы, что потребует разбить полученный полуинтервал на два новых: $x \in [\tau - \tau^{m-1} - L_m; \tau)$ и $x \in [-1; -1 - L_m)$. Для первого получим зависимость

$$\hat{c}_{1,m}(x) = R_n - (L_m + x) = \tau - L_m - x ,$$

а во втором проведем прямую через точки $(-1; -L_m)$ и $(-1 - L_m; 0)$ и запишем соотношение

$$\hat{c}_{1,m}(x) = -1 - L_m - x \qquad \text{(см. рис. 6).}$$

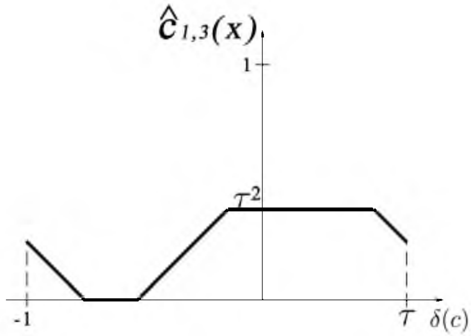

Рис. 6. Функция плотности для $n = 1$ и $m > 2$.

Осталось рассмотреть общий случай для всех $n \geq 2$ и $m \geq 2$.

С увеличением номера интервала, его границы стремятся к нулю. Следовательно, если смещаемый интервал целиком помещается между левыми или правыми границами интервалов $[-1; \tau)$ и I_n, то $\hat{c}_{n,m}(x) = 0$. Такое возможно при $L_m + x \in [R_n; \tau)$ или $x \in [R_n - L_m; \tau - L_m)$.

Максимальные значения функция плотности будет принимать тогда, когда меньший интервал будет целиком входить в больший, тогда, при $L_m + x \in [L_n; R_n - \tau^{m-1})$ или $x \in [L_n - L_m; R_n - L_m - \tau^{m-1})$, получим

$$\hat{c}_{n,m}(x) = \frac{\tau^{m-1}}{\tau^{n-1}} = \tau^{m-n}.$$

Осталось рассмотреть два случая. В первом $L_m + x \in [L_n - \tau^{m-1}; L_n)$ или $x \in [L_n - L_m - \tau^{m-1}; L_n - L_m)$ и

$$\hat{c}_{n,m}(x) = \frac{R_m - L_n + x}{\tau^{n-1}} ,$$

а во втором $L_m + x \in [R_n - \tau^{m-1}; R_n)$ или $x \in [R_n - L_m - \tau^{m-1}; R_n - L_m)$ и

$$\hat{c}_{n,m}(x) = \frac{R_n - L_m - x}{\tau^{n-1}} \qquad \text{(см. рис. 7).}$$

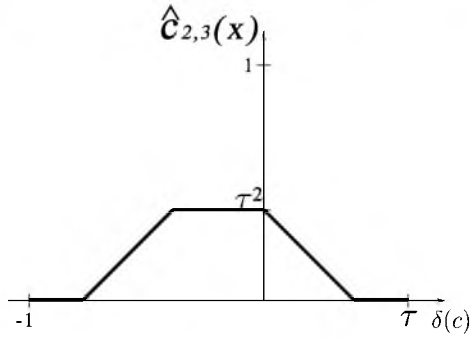

Рис. 7. Функция плотности для $n \geq 2$ и $m \geq 2$.

Таким образом, теорема 2 доказана. ■

Литература

1. Матиясевич Ю.В. Связь систем уравнений в словах и длинах с 10-й проблемой Гильберта // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1968. – 8.
2. Knuth D. Fibonacci multiplication // Appl. Math. Lett. – 1988. – C.57-60.
3. Журавлев В.Г. Суммы квадратов над $\circ$-кольцом Фибоначчи // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2006. – 337. – С.165-190.
4. Журавлев В.Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распределение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. – 2008. – 20. – №18 – С.18-46.
5. Лаптев А.В. Пифагоровы и фибоначчевы тройки // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физикаю. – 2012. – Вып.26. – С.240-244.
6. Швагирева И.К. Бинарная аддитивная задача $F_n \circ N_1 + F_m \circ N_2 = D$ над $\circ$-прогрессиями Фибоначчи // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения:тез. докл. VIII Международной конференции, посвященной 190-летию П.Л. Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова (Саратов, 12-17 сентября 2011 г.) / Саратов: СГУ, 2011. – С.79-80.
7. Кейперс Л., Нидеррайтор Г. Равномерное распределение последовательностей // М.: Наука, 1985.

ON ONE DIOPHANTINE EQUATION OVER FIBONACCI's $\circ$-RING

D.V. Kuznetsova, A.V. Laptev, A.V. Shutov

Vladimir State University,
Stroiteley Av., 11, Vladimir, 600024, Russia, e-mail: WolvShatakeruk@hotmail.ru,
oxoron30189@yandex.ru, a1981@mail.ru

Abstract. The equation $F_n \circ X - F_m \circ Y = C, X \leq N \in \mathbb{N}$ is studied. Asymptotic formula for the number of its solutions is proved.

Key words: circle multiplication, Fibonacci's sequence, diophantine equations.