MSC 34L40

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ХИЛЛА-ШРЁДИНГЕРА

А.В. Карпикова

Воронежский Государственный Университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: karpikovaav@mail.ru

Аннотация. Для исследования спектральных свойств оператора Хилла-Шрёдингера используется метод подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра оператора Хилла-Шрёдингера, а также оценки сходимости спектральных разложений.

Ключевые слова: метод подобных операторов, оператор Хилла-Шрёдингера, спектр оператора, асимптотика спектра, спектральные разложения.

1. Введение. Пусть $L_2[0,2\pi]$ –гильбертово пространство комплексных, измеримых на $[0,2\pi]$ и суммируемых с квадратом нормы функций. Скалярное произведение в $L_2[0,2\pi]$ для удобства оценок определим как

$$(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau\,,\qquad x,y\in L_2[0,2\pi]\,.$$

Через $W_2^2[0,2\pi]$ обозначим пространство Соболева $\{y\in L_2[0,2\pi]: y'$ абсолютно непрерывна и $y''\in L_2[0,2\pi]\}$.

Рассматривается одномерный оператор Хилла-Шрёдингера

$$L: D(L)\subset L_2[0,2\pi]\mapsto L_2[0,2\pi]\,,$$

который определяется дифференциальным выражением

$$l(y)=-y''+vy\,,$$

с областью определения

$$D(L)=\left\{y\in W_2^2[0,2\pi]: y(2\pi)=y(0), y'(2\pi)=y'(0)\right\}\,,$$

т.е. задаваемой периодическими краевыми условиями.

Комплекснозначный потенциал v оператора считается принадлежащим $L_2[0,2\pi]$ и имеет ряд Фурье $v(t)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}v_ke^{ikt}$, $t\in[0,2\pi]$. В дальнейшем, делается предположение $v_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}v(t)dt=0$, которое не является ограничительным, так как сдвиг потенциала на постоянную сдвигает спектр на ту же постоянную и не меняет его собственных функций.

Отметим, что не налагаются ограничения на потенциал v, гарантирующие самосопряженность возмущения, и какие-либо дополнительные ограничения (типа гладкости), кроме принадлежности v гильбертову пространству $L_2=L_2[0,2\pi]$.

При изучении спектральных свойств оператора L обычно используются различные методы теории возмущенных линейных операторов [1-6]. В данном случае, в качестве невозмущенного оператора выбирается оператор Хилла-Шрёдингера

$$L_0 y = -y'', \quad y \in D(L_0)\,, \qquad D(L_0) = D(L) \subset L_2[0, 2\pi]\,; \qquad L_0 D(L_0) \mapsto L_2[0, 2\pi]\,.$$

Он является самосопряженным оператором с компактной резольвентой. Спектр $\sigma(L_0)$ и собственные функции имеют вид:

$$\sigma(L_0) = \{n^2, n \in \mathbb{N} \cup 0 = \mathbb{Z}_+\}\,,$$

$e_n(t) = e^{int}, e_{-n}(t) = e^{-int}, t \in [0, 2\pi]$, — собственные функции для собственного значения $\lambda_n = n^2, n \geq 1$, и $e_0(t) = 1, t \in [0, 2\pi]$ – собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda_0 = 0$.

Основные результаты статьи связаны с изучением асимптотики собственных значений и получением оценок равносходимости спектральных разложений для оператора L. А именно, уточняется (наиболее точная из известных) асимптотика собственных значений из монографии В.А.Марченко [2]; соответствующий результат содержится в теореме 1. Результат о равносходимости спектральных разложений содержится в теореме 3.

Здесь впервые при исследовании таких операторов применяется метод подобных операторов, развиваемый в статьях [3-7]. Суть этого метода состоит в преобразовании подобия исследуемого (возмущенного) оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора (в данном случае оператор L_0). Тем самым существенно упрощается изучение оператора L.

2. Основные результаты. Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, End$\mathcal{X}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$.

Определение 1. *Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in End\mathcal{X}$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1 U x = U A_2 x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется оператором преобразования оператора A_1 в A_2.*

Методом подобных операторов были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Оператор L является оператором с компактной резольвентой, и его спектр представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \cup \left(\bigcup_{|n| \geq m+1} \sigma_n \right)\,, \tag{1}$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$, где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом элементов, не превосходящим $2m+1$, а множества σ_n, $|n| \geq m+1$, не более чем двухточечные и определяются равенством

$$\sigma_n = n^2 - \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}: \\ k \neq 0, k \neq -2n}} \frac{\omega_k}{k(k+2n)} \pm \sqrt{\widetilde{\omega}_n} + \beta_n^{\pm}\,, \qquad |n| \geq m+1, \tag{2}$$

где $\omega_k, \widetilde{\omega}_n$ выражаются через коэффициенты Фурье потенциала v, а остаток ряда представим в виде $\beta_n^{\pm} = \alpha(n)/\sqrt{n}$, $\sum\limits_{|n|\geq m+1} |\alpha(n)|^{\frac{4}{3}} < \infty$.

В следующей теореме символами $\widetilde{P}_m, \widetilde{P}_n, |n| \geq m+1$, будут обозначаться спектральные проекторы Рисса, построенные но оператору L и множествам $\sigma_{(m)}, \sigma_n, |n| \geq m+1$, соответственно. Далее через $P_{(m)}$ будет обозначаться проектор $\sum\limits_{|k|\leq m} P_k$, который является проектором Рисса, построенным но конечному множеству $\sigma_m^0 = \{-m, ..., m\}$. Для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+ \backslash \sigma_m^0$ символом $P(\Omega)$ обозначим спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} P_k$, а через $\widetilde{P}(\Omega)$ — спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k$.

Отметим, что

$$I = \sum_{|k|\geq m+1} P_k + P_{(m)}\,, \qquad I = \sum_{|k|\geq m+1} \widetilde{P}_k + \widetilde{P}_{(m)}\,. \tag{3}$$

Далее, для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, где $\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ — идеал операторов Гильберта–Шмидта [7], и любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}$ через $\alpha(\Omega, X)$ обозначим величину $\max\limits_{n\in\Omega} \alpha_n(X)$, где $\alpha_n(X)$ — двусторонняя последовательность из метода подобных операторов, рассматриваемая в статье [6].

Лемма 1. *Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ и любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+ \backslash \sigma_m^0$ имеет место оценка*

$$\max\{\|P(\Omega)X\|_2, \|XP(\Omega)\|_2\} \leq C(X)\alpha(\Omega, X)\,,$$

где величина $C(X) > 0$ зависит от оператора X и не зависит от выбора Ω.

Теорема 2. *Система проекторов Рисса $\widetilde{P}_n, n \in \mathbb{Z}$ обладает следующим свойством*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq C_1 \left(\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, JB) + \alpha(\Omega, B\Gamma B)\right) \frac{1}{m(\Omega)}\,. \tag{4}$$

где $C_1 > 0$ — постоянная, независящая от Ω, $m(\Omega) = \max\limits_{k\in\Omega} k, n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 3. *Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений операторов L и L_0:*

$$\|\widetilde{P}_m + \sum_{|k|=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} P_k\|_2 \leq C_1(\alpha_{n+1}(\Gamma B) + \alpha_{n+1}(JB) +$$
$$+ \alpha_{n+1}(B\Gamma B))\frac{1}{m+1}\,, \tag{5}$$

где $n \geq m+1, C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от n.

Литература

1. Джаков П., Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Успехи математических наук. – 2006. – 61:4. – С.77-182.

2. Марченко В.А., Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения / М.: Наука, 1977.
3. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / Воронеж:изд-во Воронежского государственного университета, 1987. – 168 с.
4. Баскаков А.Г. Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – 50:4. – С.435-457.
5. Баскаков А.Г. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов // Известия РАН. Сер.матем. – 1994. – 58:4. – С.3-32.
6. Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Известия РАН, серия математическая. – 2011. – 75:3. – С.4-28.
7. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию несамосопряженных линейных операторов в гильбертовом пространстве / М.: Наука, 1965.

SPECTRAL ANALYSIS OF HILL-SCHRODINGER's OPERATOR

A.V. Karpikova

Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia. e-mail: karpikovaav@mail.ru

Abstract. The similar operators method is used for spectral analysis of Hill-Schrodinger's operator. Asymptotic of the Hill-Schrodinger operator spectrum and convergence estimates of spectral decompositions are obtained.

Key words: similar operators method, Hill-Schrodinger's operator, operator spectrum, spectrum asymptotic, spectral distribution.