



MSC 45A05

ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

А.С. Калитвин, А.И. Иноземцев

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, Россия, e-mail: kalitvinas@mail.ru, inozemcev.a.i@gmail.com

Аннотация. Получены критерии в пространствах $C(D)$, $L^1(D)$, $L^\infty(D)$ и достаточные условия в пространстве $L^p(D)$ ($1 < p < \infty$) сильной и равномерной непрерывности оператор-функций с многомерными частными интегралами, где $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Ключевые слова: оператор с частными интегралами, многомерные частные интегралы, сильная и равномерная непрерывность, пространства со смешанной нормой, регулярный и двойственный оператор.

1. Введение. Статья содержит условия сильной непрерывности и непрерывности по норме оператор-функций с многомерными частными интегралами в пространствах $C(D)$, где $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$, и $L^p(D)$, где $1 \leq p \leq \infty$. В случае $D = [a, b] \times [c, d]$ такие условия изучались в работах Ю. Аппелля, П. П. Забрейко, А. С. Калитвина, В.А. Калитвина, Е.В. Фроловой и содержатся в работах [1-4]. В работе установлены критерии сильной и равномерной непрерывности оператор-функций с многомерными частными интегралами в пространствах $C(D)$, $L^1(D)$ и $L^\infty(D)$ и приведены достаточные условия в $L^p(D)$ ($1 < p < \infty$), где $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Существенную роль при этом играют критерии и достаточные условия действия операторов с многомерными частными интегралами в заданных пространствах [1-4].

2. Критерии действия операторов с многомерными частными интегралами в пространствах $C(D)$, $L^\infty(D)$ и $L^1(D)$.

Определение 1. *Линейным оператором с многомерными частными интегралами называется оператор*

$$(Kx)(t) = \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} k_{\alpha}(t, S_{\alpha}) x(s_{\alpha}) dS_{\alpha}, \quad (1)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, причем $\alpha_j \in \{0, 1\}$ при $j = 1, \dots, n$, $t \in R^n$, $S_{\alpha} \subset \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$, $dS_{\alpha} \subset \{d\tau_1, d\tau_2, \dots, d\tau_n\}$.

Вектор s_{α} получается заменой компонент вектора t соответствующими элементами S_{α} , $j = 1, \dots, n$, $D_{\alpha} = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]^{\alpha_j}$ — измеримые множества, а интегралы понимаются в смысле Лебега. В случае $\alpha_k = 0$ получим $[a_k, b_k]^0$, тогда отрезок $[a_k, b_k]$ исключается из декартова произведения.



Обозначим

$$(|K|x)(t) = \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(t, S_{\alpha})| x(s_{\alpha}) dS_{\alpha}$$

и

$$(K^{\#}y)(t) = \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} k_{\alpha}^*(t, S_{\alpha}) y(s_{\alpha}) dS_{\alpha},$$

где $k_{\alpha}^*(t, S_{\alpha}) = k_{\alpha}(s_{\alpha}, t_{\alpha})$, t_{α} — набор координат t_j , для которых $\alpha_j = 1$.

Достаточные условия и критерий действия оператора (1) в пространстве $C(D)$ приведены в работе [5].

Критерии действия оператора (1) в пространствах $L^p(D)$, при $p = 1$ или $p = \infty$ содержатся в теоремах 1 и 2. Доказательства лемм 1 и 2 аналогично доказательствам, приведенным в работе [2].

Пусть (D, Σ) — пространство с σ -конечной полной мерой, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(D, \Sigma)$ — пространство всех вещественных измеримых почти всюду конечных функций на D . Эквивалентные функции отождествляются. Пространство \mathcal{M} линейно, в нем естественно вводится полуупорядоченность: для $x, y \in \mathcal{M}$ $x \leq y$, если $x(t) \leq y(t)$ почти всюду на D .

Идеальным пространством (ИП) на D называется линейное множество X в \mathcal{M} такое, что из $x \in X$, $y \in \mathcal{M}$, $|y| \leq |x|$ следует $y \in X$. Для каждой функции x определяется носитель $\text{supp } x = \{t \in D: x(t) \neq 0\}$, а для пространства X носитель определяется как наименьшее измеримое множество, вне которого все функции из X равны нулю. В дальнейшем считаем, что D — носитель пространства X и пользуемся записью $X(D)$. Носители определяются с точностью до множества нулевой меры. ИП с монотонной нормой ($\|x\| \leq \|y\|$, если $x, y \in X$ и $|x| \leq |y|$) называется нормированным идеальным пространством (НИП), полное нормированное идеальное пространство называется банаховым идеальным пространством (БИП).

Определение 2. *Линейный оператор $A: X \rightarrow Y$ называется регулярным, если существует такой положительный оператор \tilde{A} , действующий из БИП X в БИП Y , что $|Ax| \leq \tilde{A}|x|$ ($x \in X$). (Оператор \tilde{A} называется положительным, если $\tilde{A}x \geq \theta$ при $x \geq \theta$). Оператор \tilde{A} называют мажорантой оператора A . Наименьшую мажоранту (в смысле индуцированной упорядоченности пространства линейных операторов) называют абсолютной величиной A и обозначают через $|A|$.*

Лемма 1. *Пусть оператор K с многомерными частными интегралами действует из БИП X в БИП Y . Тогда он является регулярным оператором в том и только в том случае, когда из X в Y действует оператор $|K|$. При этом $|K| = |K|$.*

□ **Достаточность.** Очевидное неравенство $|Kx| \leq |K||x|$ ($x \in X$), означает, что оператор $|K|$ является одной из мажорант оператора K . Получим $|K| \leq |K|$. Таким образом оператор K — регулярен.

Необходимость. Пусть K — регулярный оператор из X в Y . Для любой неотрицательной функции x из X $|K|x = \sup\{|Kz|: |z| \leq x\} \in Y$ [6]. В множестве $\{z: |z| \leq x\}$

существует счетное и плотное по метрике $\mathcal{M}(D)$ множество E функций, для которого $|K|x = \sup\{|Kz|: z \in E\}$ [7]. Построим такие последовательности множеств $D_{\alpha k}$, ($k = 1, 2, \dots$), что $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{mes}(D_{\alpha k}) = 0$, $D_\alpha = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{\alpha k}$ и каждая точка $t_\alpha \in D_\alpha$ принадлежит бесконечной последовательности множеств $D_{\alpha k}$, где $\text{mes}(D_{\alpha k})$ — мера множества $D_{\alpha k}$. Пусть $U_{\alpha k} = \left(\prod_{\beta \neq \alpha} D_\beta \right) \times D_{\alpha k}$ и

$$E^* = \left\{ y(t) \text{sign } k_{(0, \dots, 0)}(t) \prod_{\alpha} \chi_{U_{\alpha k}} + \sum_{\alpha} \left[v_{\alpha}(t) \prod_{\alpha} \chi_{U_{\alpha k}} \times \prod_{\alpha} \chi_{U'_{\alpha k}} \right] \right\},$$

где $v_{\alpha} \in E$, $k = 1, 2, \dots$, χ_U — характеристическая функция множества $U \subset D$, а $U' = D \setminus U$. Так как $E \subset E^* \subset \{z: |z| \leq x\}$, то $|K|x = \sup\{|Kz|: z \in E^*\}$, а так как E^* — счетное множество, то почти при всех $t \in D$

$$|K|x(t) = \sup\{|Kz(t)|: z \in E^*\}. \tag{2}$$

Пусть $t \in D$ — точка, для которой справедливо (2), и k_p — подпоследовательность, для которой $t_\alpha \in D_{\alpha k_p}$, и пусть $v_{\alpha p}$ — такие последовательности функций из E , для которых $v_{\alpha p}(\tau) \rightarrow \text{sign } k_{\alpha}(t, S_{\alpha})x(\tau)$. Положим

$$z_p(\tau) = x(\tau) \text{sign } k_{(0, \dots, 0)}(\tau) \prod_{\alpha} \chi_{\tilde{U}'_{\alpha k_p}}(\tau) + \sum_{\alpha} \left[v_{\alpha p}(\tau) \prod_{\alpha} \chi_{\tilde{U}'_{\alpha k_p}}(\tau) \times \prod_{\alpha} \chi_{\tilde{U}_{\alpha k_p}}(\tau) \right],$$

где $\tilde{U}_{\alpha k_p} = \left(\prod_{\beta \neq \alpha} D_\beta \right) \times D_{\alpha k_p}$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |Kz_p(t)| = \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(t, S_{\alpha})| x(s_{\alpha}) dS_{\alpha} = |K|x(t),$$

а так как $z_p \in E^*$ ($p = 1, 2, \dots$), то

$$|K|x(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} |Kz_p(t)| \leq \sup\{|Kz|: z \in E^*\}(t).$$

Из полученного неравенства и (2) получим

$$|K|x(t) \leq |K|x(t),$$

тогда $|K|x \leq |K|x$ и, следовательно, $|K| \leq |K|$. То есть оператор $|K|$ неотрицательные функции из X преобразует в функции из Y . Но каждую функцию из X можно представить в виде разности неотрицательных функций из X , тогда $|K|$ преобразует любые функции из X в функции из Y , т.е. $|K|$ действует из X в Y . По доказанному $|K| \leq |K|$, учитывая $|K| \leq |K|$, получим $|K| = |K|$. ■



Теорема 1. Оператор (1) действует в $L^\infty(D)$ тогда и только тогда, когда

$$\|K\| = \operatorname{vraisup}_D \left[\sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(t, S_{\alpha})| dS_{\alpha} \right] < \infty.$$

□ Ввиду того, что любой непрерывный в L^∞ линейный оператор регулярен, то в силу леммы 1 достаточно доказать, что $\|K\| = \operatorname{vraisup}_D \left[\sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(t, S_{\alpha})| dS_{\alpha} \right]$. Если $[K] = \sup\{|Kx(t)|: \|x\| \leq 1\}$ — абстрактная норма действующего в L^∞ оператора (1), то $[K] = \|[K]\|$, где в силу леммы 1 $|K| = [K]$. Получим $\|K\|_{L^\infty} = \|[K]\|_{L^\infty} = \|[K]\|_{L^\infty} = \|[K]e\|_{L^\infty} = \operatorname{vraisup}_D \left[\sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(t, S_{\alpha})| dS_{\alpha} \right]$, где $e(t) \equiv 1$. ■

Определение 3. Линейный оператор A' называется двойственным к линейному оператору A , действующему из БИП X в БИП Y , если выполняется равенство $(Ax, y) = (x, A'y)$ ($x \in X, y \in Y'$), где (Ax, y) — действие функционала Ax на y и $(x, A'y)$ — действие функционала x на $A'y$.

Аналогично [1,2] доказывается

Лемма 2. Пусть оператор K с многомерными частными интегралами действует из БИП X в БИП Y . Тогда он обладает двойственным оператором и $K'y = K^\#y$ ($y \in Y', K^\#y \in \mathcal{M}(D)$), где $\mathcal{M}(D)$ — пространство измеримых по совокупности переменных на D вещественных или комплексных функций.

Из теоремы 1 и леммы 2 вытекает

Теорема 2. Оператор (1) действует в $L^1(D)$ тогда и только тогда, когда

$$\|K\| = \operatorname{vraisup}_D \left[\sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(t, S_{\alpha})| dS_{\alpha} \right] < \infty.$$

2. Оператор-функции с многомерными частными интегралами в $C(D)$.

Определение 4. Оператор-функцией с многомерными частными интегралами называется оператор-функция

$$K(\varphi)x(t) = \sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha})x(s_{\alpha}) dS_{\alpha}, \quad (3)$$

где k_{α} — измеримые по совокупности переменных $\varphi \in J, t_{\alpha}, \tau_{\alpha} \in D_{\alpha}$ функции, J — конечный или бесконечный промежуток в $(-\infty, +\infty)$.

При каждом фиксированном φ оператор-функция вида (3) есть оператор вида (1). Будем рассматривать оператор-функции (3) со значениями в пространстве $\mathcal{K}_n(X)$ операторов с многомерными частными интегралами, действующих в пространстве $X =$



$L^p(D)$ ($1 \leq p \leq \infty$) или в $X = C(D)$ непрерывных по совокупности переменных па D функций; в любом случае для любого $\varphi \in J$ $K(\varphi) \in \mathcal{K}_n(X)$.

Определение 5. Оператор-функция $K(\varphi)$ со значениями в пространстве $\mathcal{K}_n(X)$ называется *сильно непрерывной*, если $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \|K(\varphi)x - K(\varphi_0)x\|_X = 0$ для любого $x \in X$ и *равномерно непрерывной или непрерывной по норме*, если $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \|K(\varphi) - K(\varphi_0)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

Несмотря па то, что оператор-функция (3) задает в пространстве $\mathcal{K}_n(X)$ семейство операторов, зависящих от параметра φ , каждый из которых определяется функциями $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$, сильная и равномерная непрерывность оператор-функции (3) не характеризуется свойствами непрерывности по φ заданных функций [1-4]. В связи с этим возникает вопрос о зависимости свойств функций $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ от φ , которая приводит к сильной или равномерной непрерывности оператор-функции (3).

Оценка нормы оператора $K(\varphi) - K(\varphi_0)$ приводит к условиям равномерной непрерывности оператор-функции (3) в $\mathcal{L}(X)$. Ограниченность нормы оператор-функции (3) на J и сходимостъ $K(\varphi)x \rightarrow K(\varphi_0)x$ при $\varphi \rightarrow \varphi_0$ на некотором множестве функций x , линейная оболочка которых всюду плотна в X , с применением теоремы Банаха-Штейнгауза приводит к условиям сильной непрерывности. В различных пространствах получим различные условия сильной непрерывности оператор-функции (3).

В теоремах 3 и 4 приведены критерии сильной и равномерной непрерывности соответственно оператор-функции (3) в $\mathcal{L}(C)$.

Пусть $D_\alpha = \prod_j [a_j, b_j]^{\alpha_j}$ ($j = \overline{1, n}$),

$$B(\varphi, t) = \sum_\alpha \int_{D_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) dS_\alpha, \tag{4}$$

$$B_\alpha(\varphi, t) = \int_D x_\alpha dg(\varphi, t, \tau) = \sum_\alpha (-1)^{\dim D_\alpha} \left\{ \int_{D_\alpha} g(\varphi, t, \tau) dx_\alpha \Big|_{D_\alpha} \right\}, \tag{5}$$

$$\gamma(\varphi, t) = \sum_\alpha \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)| dS_\alpha, \tag{6}$$

где

$$g(\varphi, t, \tau) = \sum_\alpha \int_{D_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, \bar{S}_\alpha) d\bar{S}_\alpha \chi(t_{\bar{\alpha}}, \tau_{\bar{\alpha}}),$$

$D_\alpha = \prod_\alpha [a_i, \tau_i]^{\alpha_i}$, $\alpha_i = 0$ или 1 ; $t_{\bar{\alpha}} = s_\alpha \setminus S_\alpha$, $\tau_{\bar{\alpha}} = \tau \setminus S_\alpha$, \bar{S}_α — набор переменных

интегрирования $\bar{\tau}_\alpha$, $\chi(t_{\bar{\alpha}}, \tau_{\bar{\alpha}}) = \begin{cases} 1, & \forall i \tau_i \geq t_i > a_i \text{ или } \tau_i > t_i = a_i, \\ 0, & \exists i \tau_i < t_i \text{ или } \tau_i = t_i = a_i. \end{cases}$

В силу критерия действия оператора (3) в пространстве $C(D)$ [5] имеют место следующие теоремы.



Теорема 3. Оператор-функция (3) является сильно непрерывной в пространстве $\mathcal{L}(C)$ тогда и только тогда, когда функции (4), (5) непрерывны, а функция (6) ограничена на каждом ограниченном подмножестве своей области определения.

□ Пусть $K(\varphi)$ сильно непрерывна в $\mathcal{L}(C)$. Из равенств $B(\varphi, t) = K(\varphi)1(t)$, $B_\alpha(\varphi, t) = K(\varphi)x_\alpha$, $\sup_D \gamma(\varphi, t) = \|K(\varphi)\|$, где $x_\alpha = \prod_{j=1}^n x_{\xi_j}^{\alpha_j}(t_j)$, с $\alpha_j = 0$ или 1 ($j = 1, 2, \dots, n$), и

$$x_{\xi_j}(t_j) = \begin{cases} \xi_j - t_j & \text{при } a_j \leq t_j \leq \xi_j \leq b_j, \\ 0 & \text{при } b_j > t_j > \xi_j > a_j, \end{cases}$$

из теоремы Банаха-Штейнгауза следует непрерывность функций (4), (5) и ограниченность (6) на каждом ограниченном множестве своей области определения.

Обратно. Покажем, что функция $K(\varphi)x$ непрерывна по φ на J для некоторого множества M функций $x \in C$, всюду плотного в пространстве C . В качестве M возьмем линейную оболочку функций x_α . Тогда любую функцию $x \in M$ можно представить в виде линейной комбинации этих функций. Из того, что функции $K(\varphi)x_\alpha$ непрерывны по φ на R , следует, что по φ на J непрерывна и функция $K(\varphi)x(t)$, которая в силу линейности $K(\varphi)$ является их линейной комбинацией. ■

Теорема 4. Пусть значения оператор-функции (3) при любом $\varphi \in J$ принадлежат $\mathcal{K}_n(C)$. Тогда она является непрерывной по норме операторов $\mathcal{L}(C)$ в том и только в том случае, когда функция $k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t)$ равномерно относительно t непрерывна по φ на J , а функции k_α обладают следующими свойствами:

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \sup_D \text{mes} \{S_\alpha : |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| > \theta\} = 0, \quad (7)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \sup_D \int_{A_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha = 0 \quad (\text{mes}(A_\alpha) \rightarrow 0), \quad (8)$$

где $\text{mes}(A)$ — мера множества A .

□ Пусть $K(\varphi)$ — непрерывная по норме оператор-функция в пространстве $\mathcal{K}_n(C)$. Тогда для любого $\varphi_0 \in J$ в силу критерия действия оператора (1) в $C(D)$ [5] получим

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \sup_D |k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t) - k_{(0, \dots, 0)}(\varphi_0, t)| = 0, \quad (9)$$

из чего следует утверждение теоремы для функции $k_{(0, \dots, 0)}$.

Равенство

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \sup_D \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha = 0 \quad (10)$$

и оценки

$$\text{mes}(\{S_\alpha : |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| \geq \theta\}) \leq \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha,$$



$$\int_{A_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha \leq \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha$$

влекут (8).

Пусть для любого $\varphi \in J$ $K(\varphi)$ — непрерывный линейный оператор в пространстве $C(D)$, функция $k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t)$ равномерно относительно t непрерывна по φ на J и выполнены равенства (7) и (8). В силу критерия действия оператора (1) в $C(D)$ достаточно показать справедливость равенств (9) и (10).

Равенство (9) очевидно. Докажем равенство (10). Для любого $\epsilon > 0$ в неравенстве

$$\int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha \leq \theta \cdot \mu(D_\alpha) + \int_{A_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha,$$

где $A_\alpha = \{S_\alpha : |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| \geq \theta\}$, $\mu(D_\alpha)$ — мера множества D_α , положим $\theta = \frac{\epsilon}{2\mu(D_\alpha)}$. В силу (8) $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \sup_D \text{mes}(A_\alpha) = 0$, отсюда и (9) вытекает равенство

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \sup_D \int_{A_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha = 0.$$

Следовательно,

$$\sup_D \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)| dS_\alpha \leq \frac{\epsilon}{2\mu(D_\alpha)} \cdot \mu(D_\alpha) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

при $\varphi \rightarrow \varphi_0$. ■

Определение 6. Функции $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ называются L^1 -непрерывными, если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t_0, S_\alpha)| dS_\alpha = 0,$$

где $r = |\varphi - \varphi_0| + \sum_{j=1}^n |t_j - t_{j0}|$, и L^1 -ограниченными при каждом φ , если

$$\sup_D \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)| dS_\alpha = K_\alpha(\varphi) < \infty.$$

Теорема 5. Пусть функция $k_{(0, \dots, 0)}$ непрерывна по совокупности переменных, а функции $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ L^1 -непрерывны и L^1 -ограничены для любого φ . Тогда оператор-функция $K(\varphi)$ непрерывна по норме операторов пространства $\mathcal{L}(C)$.

□ Для действия оператора $K(\varphi)$ в $C(D)$ достаточно непрерывности функции $k_{(0, \dots, 0)}$, L^1 -непрерывности и L^1 -ограниченности функций $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ для любого φ .

Покажем, что $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \|K(\varphi) - K(\varphi_0)\| = 0$. Имеем



$$\begin{aligned} \|K(\varphi) - K(\varphi_0)\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(K(\varphi) - K(\varphi_0))x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \max_D |(K(\varphi) - K(\varphi_0))x(t)| \leq \\ &\leq \sum_{\alpha} \max_D \int_{\tilde{D}_{\alpha}} |k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha}) - k_{\alpha}(\varphi_0, t, S_{\alpha})| dS_{\alpha}. \end{aligned}$$

В силу непрерывности по φ функции $k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t)$ в точке (φ_0, t) и L^1 -непрерывности функций $k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha})$ для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} |k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t) - k_{(0, \dots, 0)}(\varphi_0, t)| &< \frac{\epsilon}{2^n}, \\ \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha}) - k_{\alpha}(\varphi_0, t, S_{\alpha})| dS_{\alpha} &< \frac{\epsilon}{2^n} \quad (|\varphi - \varphi_0| < \delta). \end{aligned}$$

Отсюда получаем $\|K(\varphi) - K(\varphi_0)\| < 2^n \cdot (\epsilon/2^n) = \epsilon$ при $|\varphi - \varphi_0| < \delta$. ■

Условие данной теоремы и L^1 -непрерывность ядер $k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha})$ выполняются, если $k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha})$ — непрерывные по совокупности переменных функции. Аналогично [4], из приведенного утверждения вытекает

Следствие 1. Пусть для всех $\varphi \in J$, $t \in D$, $\|k_{\alpha}(t, \cdot)\|_{L^{p_{\alpha}}} \leq A < \infty$, для любого α $1 < p_{\alpha} < \infty$, и пусть ядра $k_{\alpha}(t, S_{\alpha})$ имеют разрывы только вдоль конечного числа поверхностей $\tau_{\alpha} = \varphi_{\alpha}(t)$, где τ_{α} — набор τ_j из S_{α} , $\varphi_{\alpha}(t)$ — набор непрерывных функций $\varphi_{\alpha}^j(t)$ таких, что $\tau_j = \varphi_{\alpha}^j(t)$. Тогда ядра $k_{\alpha}(t, S_{\alpha})$ L^1 -непрерывны.

3. Оператор-функции со значениями в $\mathcal{K}_n(L^{\infty})$ и $\mathcal{K}_n(L^1)$.

Теорема 6. Оператор-функция (3) сильно непрерывна в пространстве $\mathcal{L}(L^{\infty})$ тогда и только тогда, когда функция (6) ограничена в существенном на $J \times D$ для каждого ограниченного промежутка $J \subset (-\infty, +\infty)$, вектор-функция $\varphi \rightarrow k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t)$ непрерывна как функция со значениями в $L^{\infty}(D)$, а вектор-функции аргумента φ

$$\int_{\tilde{D}_{\alpha}} k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha}) dS_{\alpha}$$

непрерывны по φ при каждом измеримом $\tilde{D}_{\alpha} \subset D_{\alpha}$, как функции со значениями в $L^{\infty}(D)$.

Аналогично, оператор-функция (3) сильно непрерывна в пространстве $\mathcal{L}(L^1)$ в том и только в том случае, когда:

$$\sum_{\alpha} \int_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(\varphi, t, S_{\alpha})| dS_{\alpha} \leq \text{const} < \infty$$

для почти всех t на каждом ограниченном промежутке $J \subset (-\infty, +\infty)$; вектор-функция $\varphi \rightarrow k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t)$ непрерывна как функция со значениями в $L^{\infty}(D)$; вектор-функции



аргумента φ

$$\int_{\tilde{D}_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) dS_\alpha$$

непрерывны по φ при каждом измеримом $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$, как функции со значениями в $L^1(D)$.

□ Заметим, что сильная непрерывность оператор-функции (3) в заданных пространствах равносильна сильной непрерывности оператор-функций

$$K_\alpha(\varphi)x(t) = \int_{\tilde{D}_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)x(s_\alpha) dS_\alpha.$$

Выбирая в качестве всюду плотного множества линейные комбинации функций $\chi(\tilde{D}_\alpha, t_\alpha)$, где $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$ — измеримые множества, а $\chi(\tilde{D}_\alpha, t_\alpha)$ — их характеристические функции, и используя теоремы 1 и 2 получим требуемые утверждения. ■

Пусть $X_\alpha = L^1(D_\alpha)$, $L^p = L^p(D)$ ($1 \leq p \leq \infty$), а $L^p[X_\alpha]$ — пространства со смешанной нормой, состоящие из измеримых по совокупности переменных функций $x_\alpha(t, S_\alpha)$, для которых конечны нормы

$$\| \|x_\alpha(t, \cdot) \|_{X_\alpha} \|_{L^p}.$$

Из теоремы 6 следует критерий непрерывности по норме оператор-функции (3) в $\mathcal{L}(L^\infty)$ и в $\mathcal{L}(L^1)$.

Теорема 7. Оператор-функция (3) непрерывна по норме в $\mathcal{L}(L^\infty)$ (в $\mathcal{L}(L^1)$) в том и только в том случае, когда вектор-функции $\varphi \rightarrow k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ ($\varphi \rightarrow k_\alpha(\varphi, s_\alpha, t_\alpha)$) непрерывны как вектор-функции со значениями в L^∞ , $L^\infty[X_\alpha]$.

Так как $C(D) \subset L^\infty(D)$, то из теорем 3 и 6 следует еще один критерий сильной непрерывности оператор-функции (3) в $C(D)$.

Следствие 2. Пусть оператор-функция (3) принимает значения в $\mathcal{K}_n(C)$. Тогда она сильно непрерывна в том и только в том случае, когда функция (6) ограничена на $J \times D$ для каждого ограниченного промежутка $J \subset (-\infty, +\infty)$, вектор-функция $\varphi \rightarrow k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t)$ непрерывна как вектор-функция со значениями в $L^\infty(D)$, а вектор-функции аргумента φ

$$\int_{\tilde{D}_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) dS_\alpha$$

непрерывны по φ при каждом $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$ как функции со значениями в $L^\infty(D)$.

4. Оператор-функции со значениями в $\mathcal{K}_n(L^p)$ где $1 < p < \infty$. Критерии сильной непрерывности и непрерывности по норме оператор-функции (3) со значениями в $\mathcal{K}_n(L^p)$ ($1 < p < \infty$) неизвестны, но со значениями в пространстве $\mathcal{K}_r(L^p)$ ($1 < p < \infty$) регулярных в L^p операторов (1) с частными интегралами имеются признаки ее сильной непрерывности и непрерывности по норме. Пусть $\mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)$ — множество измеримых



по совокупности переменных функций $k_\alpha(t, S_\alpha): D \times D_\alpha \rightarrow (-\infty, +\infty)$, для которых конечна норма

$$\|k_\alpha\|_{\mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)} = \sup_{\|x\|_{L^p} \leq 1} \left\| \int_{D_\alpha} |k_\alpha(t, S_\alpha)| x(s_\alpha) dS_\alpha \right\|_{L^p}.$$

Аналогично [2], регулярность в L^p оператора (1) означает, что $k_{(0, \dots, 0)}(t) \in L^\infty$, $k_\alpha(t, S_\alpha) \in \mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)$.

Определение 7. Оператор-функция (3) со значениями в $\mathcal{K}_r(L^p)$ абсолютно сильно непрерывна, если при $\varphi \rightarrow \varphi_0$ $\| |K(\varphi) - K(\varphi_0)|x \| \rightarrow 0$ ($x \in L^p$) и абсолютно непрерывна по норме, если $\| |K(\varphi) - K(\varphi_0)| \| \rightarrow 0$.

Из абсолютной сильной непрерывности оператор-функции (3) в $\mathcal{K}_n(L^p)$, следует ее сильная непрерывность, из абсолютной непрерывности по норме следует непрерывность по норме. Обратное утверждение не верно при $1 < p < \infty$ уже для $n = 2$ [2]. Из теоремы Банаха-Штейнгауза вытекает критерий абсолютной сильной непрерывности оператор-функции (3) со значениями в $\mathcal{L}(L^p)$.

Теорема 8. Пусть $1 < p < \infty$ и $k_\alpha(t, S_\alpha)$ — измеримые по совокупности переменных функции. Оператор-функция (3) со значениями в $\mathcal{K}_n(L^p)$ абсолютно сильно непрерывна тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1. Вектор-функция $\varphi \rightarrow k_{(0, \dots, 0)}(\varphi, t)$ принимает значения в $L^\infty(D)$ при любом $\varphi \in J$, ограничена на каждом отрезке из J как вектор-функция со значениями в $L^\infty(D)$ и непрерывна как вектор-функция со значениями в $L^1(D)$.
2. Вектор-функции $\varphi \rightarrow k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ при каждом $\varphi \in J$ принимают значения в $\mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)$ и как вектор-функции со значениями в $\mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)$ ограничены на каждом отрезке из J .
3. Для любых измеримых множеств $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$ вектор-функции

$$\varphi \rightarrow k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) \prod_{\alpha} \chi(\tilde{D}_\alpha, S_\alpha)$$

со значениями в $L^p[X_\alpha]$, непрерывны на J , где $\chi(\tilde{D}_\alpha, S_\alpha)$ — характеристическая функция множества \tilde{D}_α , а $L^p[X_\alpha]$ — пространства со смешанной нормой.

Сильная непрерывность оператор-функции (3) со значениями в $\mathcal{K}_n(L^p)$ сохранится, если в теореме условие 3 заменить условием:

3'. для любых измеримых множеств $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$ непрерывны по $\varphi \in J$ следующие вектор-функции со значениями в L^p :

$$\int_{\tilde{D}_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) dS_\alpha.$$



Следующая теорема содержит условия непрерывности по норме оператор-функции (3) со значениями в $\mathcal{K}_r(L^p)$

Теорема 9. Пусть $1 < p < \infty$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Пусть, далее, выполнены условия:

1. Функция $\varphi \rightarrow k_{(0,0,\dots,0)}(\varphi, t)$ непрерывна как вектор-функция со значениями в $L^\infty(D)$.
2. Функции $\varphi \rightarrow k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ непрерывна как вектор-функция со значениями в одном из пространств со смешанной нормой $L^p[L^q]$ или $L^\infty[L^q[L^p]]$, где норма в $L^p(D_\alpha)$, $L^q(D_\alpha)$, $L^\infty(D_\alpha)$ вычисляется по переменным t_α , S_α , $t_{\bar{\alpha}}$, соответственно.
3. Функция $\varphi \rightarrow k_{(1,1,\dots,1)}(\varphi, t, \tau)$ непрерывна как вектор-функция со значениями в $L^p[L^q]$ или $L^q[L^p]$, где норма в $L^p(D)$ ($L^q(D)$) вычисляется по переменным t (τ).

Тогда вектор-функция (3) непрерывна по норме пространства $\mathcal{K}_r(L^p)$.

□ Доказательство теоремы получается применением неравенства Гельдера и обобщенного неравенства Минковского. ■

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.
2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.
3. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.
4. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория / Липецк: ЛГПУ, 2004. – 195 с.
5. Иноземцев А.И. Критерий определенности на $C(D)$ линейных операторов с многомерными частными интегралами // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2014. – №5(176). Вып. 34. – С.17-26.
6. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах / М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 548 с.
7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ / М.: Наука, 1977. – 744 с.

OPERATOR-FUNCTIONS WITH MULTIDIMENSIONAL PARTIAL INTEGRALS

A.S. Kalitvin, A.I. Inozemtsev

Lipetsk State Pedagogical University,
 Lenin St., 42, Lipetsk, 398020, Russia, e-mail: kalitvinas@mail.ru, inozemcev.a.i@gmail.com

Abstract. Criteria on spaces $C(D)$, $L^1(D)$, $L^\infty(D)$ and sufficient conditions on the space $L^p(D)$ ($1 < p < \infty$) of strong and norm continuity of operator-functions with multidimensional partial integrals are found where $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Key words: operator with partial integrals, multidimensional partial integrals, strongly continuous and norm-continuous operator functions, spaces with mixed norm, regular and associate operator.