MSC 34L40

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА ДИРАКА В ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. АНТИПЕРОДИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ И КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДИРИХЛЕ

Е.Ю. Романова

Воронежский Государственный Университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: vsu.romanova@gmail.com

Аннотация. В статье изучается оператор Дирака в лебеговых пространствах в случае антиперодических краевых условий и краевых условий Дирихле. Для исследования спектральных свойств данного оператора применяется метод подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра, а также оценки равносходимости спектральных разложений.

Ключевые слова: спектр оператора, оператор Дирака, метод подобных операторов, асимптотика спектра, спектральные разложения, равносходимость спектральных разложений.

Введение. Пусть $L_p[0,2\pi]$ – банахово пространство суммируемых со степенью $p \in [1,\infty)$ на $[0,2\pi]$ функций. Посредством $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ будем обозначать одно из введенных ниже пространств.

$L_p = L_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ — банахово пространство (пространство Лебега) суммируемых со степенью $p \in [1,\infty)$ на $[0,2\pi]$ и со значениями в $\mathbb{C}^2$ функций, для которых конечна величина

$$\|x\|_p = (\int\limits_0^{2\pi} \|x(t)\|^p_{\mathbb{C}^2} dt)^{1/p}, \quad t \in [0,2\pi];$$

$L_\infty = L_\infty([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ — банахово пространство существенно ограниченных измеримых функций с нормой

$$\|x\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup_{t\in[0,2\pi]} \|x(t)\|_{\mathbb{C}^2};$$

$C_b = C_b([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ — банахово пространство непрерывных и ограниченных функций на отрезке $[0,2\pi]$ и со значениями в $\mathbb{C}^2$ с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,2\pi]} \|x(t)\|_{\mathbb{C}^2}.$$

В случае, когда $\mathcal{F} = L_p$, определим пространство Соболева $W_p^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2) = \{y \in L_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2), p \geq 1 : y$ абсолютно непрерывна и $\dot{y} \in L_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2)\}$.

Через $C^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2) = \{y \in C_b([0,2\pi],\mathbb{C}^2) : \dot{y} \in C_b\}$ обозначим банахово пространство непрерывно дифференцируемых функций из C_b в случае, когда $\mathcal{F} = C_b$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 13-01-00378, 14-01-31196

Символ $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ будем использовать для обозначения одного из введенных выше пространств.

Рассмотрим оператор Дирака $L_{bc} : D(L_{bc}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, заданный дифференциальным выражением

$$l(y) = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{dy}{dt} - vy, \text{ где}$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,2\pi],$$

где $P, Q \in L_\infty([0,2\pi],\mathbb{C}^1)$, $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ – поле комплексных чисел и $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$.

Область определения оператора L_{bc} задается с помощью одного из краевых условий:

(a) антипериодические (bc=ap: $x(0) = -x(2\pi)$);

(b) Дирихле (bc=dir: $x_1(0) = x_2(0), x_1(2\pi) = x_2(2\pi)$).

Для исследования спектральных свойств оператора Дирака мы будем использовать метод подобных операторов, а также методы гармонического анализа. Именно методом подобных операторов исследовался оператор Дирака в статье [4] в гильбертовом пространстве $L_2([0,\pi],\mathbb{C}^2)$.

Для определения $D(L_{bc})$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\dot{U}(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}U(t),$$

где $U(0) = I-$ тождественный оператор в $\mathbb{C}^2$. Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\dot{U}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -iP(t) \\ iQ(t) & 0 \end{pmatrix}U(t)\,.$$

Согласно [1], операторпозначная функция U обратима. Рассмотрим семейство эволюционных операторов

$$\mathcal{U}(t,s) = \mathcal{U}(t)\mathcal{U}^{-1}(s)\,, \qquad t, s \in [0,2\pi]\,.$$

Функцию $x \in \mathcal{F}$ отнесем к области определения оператора Дирака

$$L_{bc} = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{d}{dt} - v\,,$$

если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что имеет место равенство

$$x(t) = \mathcal{U}(t,0)x(0) + \int\limits_0^t \mathcal{U}(t,s)f(s)ds\,,$$

где x удовлетворяет одному из краевых условий, определенных выше. Отметим, что функция x по определению непрерывна.

Согласно [2], спектр оператора L_{bc} не зависит от выбора пространства $\mathcal{F}$, в котором он действует. Поскольку метод подобных операторов относится к возмущениям, область определения которых содержит область определения невозмущенного оператора, то изучение оператора Дирака будем осуществлять в пространстве $\mathcal{F}$ при условии, что $P, Q \in \mathcal{F}$. И ввиду сказанного спектры таких операторов совпадают.

Если $v = 0$ (нулевой потенциал), то оператор L_{bc} далее обозначается символом L^0_{bc}. Оператор L^0_{bc} будем называть *свободным оператором Дирака*, который при изучении оператора L_{bc} будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор умножения на потенциал v — возмущения.

Спектр $\sigma(L^0_{bc})$ и собственные функции для L^0_{bc} не зависят от выбора рассматриваемых пространств и легко определяются следующим образом:

(a) $\sigma(L^0_{\mathrm{ap}}) = \mathbb{Z} + 1/2$; соответствующие собственные функции имеют вид:

$$e^1_n = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_n t} \\ 0 \end{pmatrix}, e^2_n = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

где $\lambda_n = n + 1/2, n \in \mathbb{Z}$;

(b) $\sigma(L^0_{\mathrm{dir}}) = \mathbb{Z}$; каждое собственное значение простое и соответствующая нормированная собственная функция имеет вид $s_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e^1_n + e^2_n)$, где $\lambda_n = n, n \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что оператор Дирака, определенный выше, ранее не рассматривался (кроме как для $P, Q \in L_2[0, 2\pi]$). Заметим также, что в статьях [8]- [10] изучался оператор Дирака с потенциалом в пространстве $C[0, 1]$, и была получена асимптотика собственных значений, построена асимптотика решений соответствующих параболических уравнений.

2. Основные результаты. Основная идея метода подобных операторов [3]- [4], [11]- [12] состоит в следующем. Пусть A — линейный хорошо изученный оператор, действующий в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ (он обычно называется невозмущенным оператором), и B — другой оператор, который в некотором смысле "мал" по сравнению с A. При определенных условиях естественно ожидать, что оператор $A - B$ подобен оператору $A - B_0$, где B_0 имеет несложную по отношению к A структуру. Оказалось, что процедура построения оператора B_0 и оператора преобразования оператора $A - B$ в $A - B_0$ тесно связана с гармоническим анализом линейных операторов из некоторого пространства возмущений оператора A, которому принадлежит и B. Проверка условия подобия операторов $A - B$ и $A - B_0$ обычно приводит к вопросу разрешимости некоторых нелинейных уравнений в пространстве возмущений.

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора $L_{bc}, bc \in \{\mathrm{ap}, \mathrm{dir}\}$, свободный оператор L^0_{bc} будем считать невозмущенным оператором. Он будет обозначаться также символом A. Таким образом, $L_{bc} = A - B$, где B-оператор умножения на потенциал v.

Всюду в дальнейшем $\mathcal{X} = \mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$ будем отождествлять с банаховым пространством $\mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ периодических периода 2π функций одного из пространств, включенных в $\mathcal{F}$.

Через $L_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ обозначим банахову алгебру периодических периода 2π локально суммируемых функций. Тогда на $\operatorname{End}\mathfrak{X}$ введем структуру банахова $L_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ — модуля, определенную следующим образом:

$$\varphi X = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)T(t)XT(-t)x dt\,, \tag{1}$$

где $\varphi \in L_1^{2\pi}(\mathbb{R}), X \in \operatorname{End}\mathfrak{X}, T(t) : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathfrak{X}$ — периодическая периода 2π изометрическая сильно непрерывная группа операторов.

Заметим, что $\|\varphi X\| \le \|\varphi\|_1\|X\|$.

Рассмотрим последовательности трансформаторов, входящих в допустимую тройку метода подобных операторов [3]:

$$J_m X = JX - J(f_m X) + f_m X = J(X - f_m X) + f_m X\,,$$
$$\Gamma_m X = \Gamma X - \Gamma(f_m X) = \Gamma(X - f_m X) = (f * (1 - f_m))X\,,$$

где

$$(JX)x = X_0 x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(t)XT(-t)x\,dt = \varphi X, \varphi \equiv 1\,,$$

$$(\Gamma X)x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)T(t)XT(-t)x\,dt = fX,$$

$$f_m(t) = \sum_{n=-m}^{m}(1 - \frac{|n|}{m})e^{int}, \|f_m\| = 1, f(t) = i(t - \pi)\,,$$
$$t \in [0, 2\pi), \quad x \in \mathfrak{X}, X \in \operatorname{End}\mathfrak{X}, m \in \mathbb{Z}_+\,.$$

Теперь, пользуясь формулами, определенными выше, выпишем представление операторов $JB = J_{bc}B$, $\Gamma B = \Gamma_{bc}B$, где $bc \in \{\mathrm{per}, \mathrm{dir}\}$.

Отметим, что оператор L_{ap} подобен оператору $L^0_{\mathrm{per}} - \widehat{B} - I$, где L_{per} — оператор Дирака, определяемый периодическими краевыми условиями $x(0) = x(2\pi)$ [12]; $\widehat{B}$ — оператор умножения на потенциал $\widehat{v}(s) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-is}P(s) \\ e^{is}Q(s) & 0 \end{pmatrix}$, $s \in [0, 2\pi]$. Поэтому изучение спектральных свойств оператора L_{ap} сводится к изучению спектральных свойств оператора Дирака $L^0_{\mathrm{per}} - \widehat{B}$.

Таким образом, по существу можно ограничиться изучением операторов L_{per} и L_{dir}. Имеют место следующие равенства.

$$((J_{\mathrm{per}}B)x)(s) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & P((s+\tau)/2) \\ Q((s+\tau)/2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau\,, \tag{2}$$

$$((\Gamma_{\mathrm{per}}B)x)(s) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & f\Big(\frac{s-\tau}{2}\Big)P\Big(\frac{s+\tau}{2}\Big) \\ f\Big(\frac{\tau-s}{2}\Big)Q\Big(\frac{s+\tau}{2}\Big) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau\,, \quad (3)$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$, $p \geq 1$, $s \in [0, 2\pi]$, $f(t) = i(t-\pi)$, $t \in [0,\pi)$, $f \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

$$((J_{\mathrm{dir}}B)x)(s) = \frac{1}{16\pi}\int_0^{8\pi}\mathcal{K}_{\mathrm{dir}}(s,\tau)x(\tau)d\tau, \quad x \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)\,, \quad s \in [0, 2\pi]\,, \quad (4)$$

$$((\Gamma_{\mathrm{dir}}B)x)(s) = \frac{1}{16\pi}\int_0^{8\pi}\widetilde{\mathcal{K}}_{\mathrm{dir}}(s,\tau)x(\tau)d\tau, \quad x \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)\,, \quad s \in [0, 2\pi]\,, \quad (5)$$

где

$$\mathcal{K}_{\mathrm{dir}}(s,\tau) = \begin{pmatrix} \Phi\left(\frac{s-\tau}{2}\right) & \Phi\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \\ \Phi\left(\frac{-s-\tau}{2}\right) & \Phi\left(\frac{-s+\tau}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathcal{K}}_{\mathrm{dir}}(s,\tau) = \begin{pmatrix} f\left(\frac{s+\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{s-\tau}{2}\right) & f\left(\frac{s-\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \\ f\left(\frac{\tau-s}{2}\right)\Phi\left(\frac{-s-\tau}{2}\right) & f\left(\frac{-s-\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{-s+\tau}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$\Phi(u) = \frac{P(u)+Q(-u)}{2}\,, \quad \Phi \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)\,.$$

Методом подобных операторов были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если число* $m \in \mathbb{Z}_+$ *таково, что* $\|\Gamma_m B\|_1 < 1$, *(т.е. оператор* $I + \Gamma_m B$ *обратим), то оператор* $L_{bc} = A - B$, *где* $A = L^0_{bc}$, B *— оператор умножения на* v, *подобен оператору* $\widetilde{L_{bc}} = L^0_{bc} - \widetilde{B}$, *где*

$$\widetilde{B} = J_m B + (I + \Gamma_m B)^{-1}(B\Gamma_m B - (\Gamma_m B)J_m B)\,,$$

причем имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma_m B) = (I + \Gamma_m B)(A - \widetilde{B})\,.$$

Операторы $J_m B$, $\Gamma_m B$, $B\Gamma_m B$, $(\Gamma_m B)(J_m B)$, $\widetilde{B}$ *являются компактными.*

Теорема 2. *Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ таково, что $\|\Gamma_m B\|_1 < 1$. Тогда оператор $L_{bc} = A - B$ подобен оператору вида*

$$A - J(\widetilde{X} - f_m\widetilde{X}) = A - J_m\widetilde{X} = A - B_0\,, \tag{6}$$

где оператор $\widetilde{X}$ — решение уравнения $X = B\Gamma_m X - (\Gamma_m X)(J_m X) + B = \Phi(X)$, которое можно найти методом последовательных приближений.

Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$ осуществляет оператор $I + \Gamma_m\widetilde{X}$.

Непосредственно из теоремы 2 следует

Теорема 3. *Возмущенный оператор является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений,что $\sigma(L_{bc})$ представим в виде*

$$\sigma(L_{bc}) = \sigma_{(m)} \bigcup \Big(\bigcup_{|n| \geq m+1} \sigma_n \Big)\,, \tag{7}$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество, а $\sigma_n, |\, n \,| \geq m+1$, определяются равенствами

$$\sigma_n = \{n + 1/2 + \alpha_n^{\pm}\}, \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{\pm} = 0\,, \quad \text{если } bc = \text{ap}\,;$$

$$\sigma_n = \{n + \gamma_n\}, \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0\,, \quad \text{если } bc = \text{dir}\,.$$

Поскольку P_n — проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_n\} \subset \sigma(L_{bc}^0), n \in \mathbb{N}$, тогда в следующей теореме $\widetilde{P}_{(m)}, \widetilde{P}_n, n \geq m+1,$ — проекторы Рисса, построенные по оператору L_{bc} и множествам $\sigma_{(m)}, \sigma_n, n \geq m+1$, соответственно.

Теорема 4. *Имеет место равносходимость спектральных разложений операторв L_{bc} и L_{bc}^0 :*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_n - P_n\| = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) P_k\| = 0\,. \tag{9}$$

Литература

1. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / М: Наука, 1970.
2. Диденко В.Б. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемых линейным отношением // Матем. заметки. – 2011. – 89, №2. – С.226–240.
3. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / Воронеж: Воронежский государственный университет, 1987. – 165 с.
4. Баскаков А.Г. Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – 50:4. – С.435-457.
5. Баскаков А.Г. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов // Известия РАН. Сер.матем. – 1994. – 58:4 – С.3-32.

6. Баскаков А.Г. Метод подобных операторов и формулы и регуляризованных следов // Изв. ВУЗов. Сер. матем.– 1984. – №3. – С.3-12.
7. Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Известия РАН, серия матем. – 2011. – 75:3. – С.4-28.
8. Бурлуцкая М.Ш., Корнев В.В., Хромов А.П. Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2012. – 52:9. – С.1621–1632.
9. Бурлуцкая М.Ш. , Курдюмов В.П., Хромов А.П. Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака с недифференцируемым потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – 12:3. – С.22–30.
10. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Функционально- дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями // Доклады академии наук. – 2014. – 454:1. – С.15-17.
11. Романова Е.Ю. Метод подобных операторов в спектральном анализе дифференциального оператора с инволюцией // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – 2014. – 176:5. – С.73-78.
12. Romanova E.Yu. Similar operators method in spectral analysis of Dirac's operator in the Lebesgue spaces // Spectral and evolution problems. – 21, Issue 2. – 2011. – P.185-186.

SPECTRAL ANALYSIS OF DIRAC OPERATOR IN THE LEBESGUE SPACES. ANTIPERIODIC BOUNDARY CONDITIONS AND DIRICHLET's BOUNDARY CONDITIONS

E.Yu. Romanova

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: vsu.romanova@gmail.com

Abstract. Dirac's operator in the Lebesgue spaces in case of antiperiodic boundary conditions and Dirichlet's boundary conditions is studied. Method of similar operators is used to analyze spectral properties of the operator. The asymptotic of spectrum and estimates of equiconvergence of spectral decomposition are obtained.

Key words: spectrum of operator, Dirac's operator, similar operators method, asymptotic of spectrum, spectral decomposition, equiconvergence of spectral decomposition.