MSC 35M10

НЕЛОКАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

С.Н. Сидоров

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: stsid@mail.ru

Аннотация. Для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области изучена обратная задача по поиску неизвестных правых частей с нелокальным граничным условием, связывающим значения решения по нормали на противоположных сторонах прямоугольной области, которые принадлежат разным типам изучаемого уравнения. Решения задач построены в виде сумм рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Установлены критерий единственности и доказана устойчивость решений поставленных обратных задач по граничным данным.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, обратная задача, спектральный метод, существование, единственность, устойчивость.

1. Введение. Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t + b^2 t^n u = f_1(x)\,, & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u = f_2(x)\,, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n > 0$, $m > 0$ и $b \geq 0$ – заданные действительные числа, $u(x,t)$ и $f_i(x)$, $i = 1, 2,$ – неизвестные функции. Поставим следующую задачу.

Задача. Найти в области D функции $u(x,t)$ и $f_i(x)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+), \tag{2}$$

$$f_i(x) \in C(0,1) \cap L_2[0,1], \tag{3}$$

$$Lu(x,t) \equiv f_i(x),\ \ (x,t) \in D_- \cup D_+, \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ \ -\alpha \leq t \leq \beta, \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x),\ \ 0 \leq x \leq 1, \tag{6}$$

$$u_t(x,-\alpha) = \psi(x),\ \ 0 \leq x \leq 1, \tag{7}$$

$$u_t(x,\beta) = g(x),\ \ 0 \leq x \leq 1, \tag{8}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

Отметим, что прямая начально-граничная задача (2), (4)–(6), где вместо условия (6) задано условие $u(x, -\alpha) = \chi(x)$, $0 \le x \le 1$, для уравнения (1) при $f_1(x) = f_2(x) \equiv 0$ в прямоугольной области D изучалась в работе [1] при всех $n > 0$ и $m > 0$. В работах [2, 3] исследована аналогичная задача для уравнения (1) при $n = 0$, $m \ge 0$ и $b \ge 0$. В [4] методами функционального анализа доказана однозначная разрешимость аналога задачи Трикоми в пространстве L_2 для уравнения типа (1) при $f(x) = 0$, $n = 0$, $b = 0$, $0 < m \le 1$ в смешанной области, параболическая часть которой совпадает с D_+, а гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник с основанием на линии вырождения. Статья [5] посвящена обратной задаче (2)–(8), где вместо условия (6) задано $u(x, -\alpha) = \psi(x)$ для уравнения (1) при $n = m = 0$. Обратные задачи для классических уравнений математической физики изучены достаточно полно (см. [6–10] и приведенную там обширную библиографию).

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия единственности решения. Решение задачи строится в виде суммы рядов по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании существования решения задачи возникают малые знаменатели [11, 12], затрудняющие сходимость построенных рядов. В связи с чем установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые позволили при некоторых условиях относительно функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ и параметра α доказать принадлежность построенного решения классам (2) и (3). Доказана также устойчивость решения по граничным функциям.

2. Единственность решения задачи. Пусть $u(x,t)$ и $f_i(x)$, $i = 1, 2$ – решение задачи (2)-(8). Следуя [1, 3] рассмотрим функции

$$u_k(t) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,t)\,\sin \pi k x\,dx, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{9}$$

На основании (9), введем функцию

$$u_k(t) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,t)\,\sin \pi k x\,dx, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{10}$$

Для функции (10) получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$u_k'(t) + (b^2 + (\pi k)^2)t^n u_k(t) = f_{1k}\,, \qquad t > 0\,, \tag{11}$$

$$u_k''(t) + (b^2 + (\pi k)^2)(-t)^m u_k(t) = f_{2k}\,, \quad t < 0\,, \tag{12}$$

где

$$f_{ik} = \sqrt{2}\int_0^1 f(x)\,\sin \pi k x\,dx\,, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{13}$$

Дифференциальные уравнения (11), (12) имеют общие решения [3]

$$u_k(t) = \begin{cases} a_k e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)} + f_{1k} I_k(t), & t > 0, \\ b_k \sqrt{-t}\, J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) + c_k \sqrt{-t}\, J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) + f_{2k} w_k(t)\,, & t < 0\,. \end{cases} \tag{14}$$

где a_k, b_k и c_k – произвольные постоянные, $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν, $\lambda_k^2 = b^2 + (\pi k)^2$,

$$I_k(t) = e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)} \int\limits_0^t e^{\lambda_k^2 s^{n+1}/(n+1)}\, ds\,, \tag{15}$$

$$w_k(t) = \frac{\pi}{2q \sin\frac{\pi}{2q}} \sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) \int\limits_t^0 J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\, ds -$$

$$- \frac{\pi}{2q \sin\frac{\pi}{2q}} \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) \int\limits_t^0 J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\, ds\,. \tag{16}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Функция $f_{1k} I_k(t)$ является решением неоднородного уравнения (11) и удовлетворяет следующим граничиым условиям:*

$$I_k(0) = 0, \quad I_k'(0) = 1.$$

Лемма 2. *Функция $f_{2k} w_k(t)$ является решением неоднородного уравнения (12) и удовлетворяет следующим граничиым условиям:*

$$w_k(0) = w_k'(0) = 0, \quad w_k''(0) = 1.$$

□ Доказательство лемм 1 и 2 проводится непосредственно на основании (15) и (16) ■.

По условию решение $u(x,t) \in C^1(\overline{D})$, тогда аналогично [3] из равенств

$$u_k(+0) = u_k(-0)\,, \quad u_k'(+0) = u_k'(-0)\,,$$

для функций (14) имеем

$$b_k = -f_{1k}\gamma_{1/(2q)}(k), \quad c_k = a_k \gamma_{-1/(2q)}(k)\,.$$

Здесь

$$\gamma_{1/(2q)}(k) = \frac{1}{2q}\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{1/(2q)}, \quad \gamma_{-1/(2q)}(k) = -\frac{1}{2q}\Gamma\left(-\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{-1/(2q)}.$$

С учетом найденных значений b_k и c_k функции (14) принимают вид

$$u_k(t) = \begin{cases} a_k e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)} + f_{1k} I_k(t), & t > 0, \\ a_k \gamma_{-1/(2q)}(k)\sqrt{-t}\, J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) - \\ \qquad -f_{1k}\gamma_{1/(2q)}(k)\sqrt{-t}\, J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) + f_{2k} w_k(t)\,, & t < 0\,. \end{cases} \tag{17}$$

Для нахождения коэффициентов a_k, f_{1k} и f_{2k} воспользуемся граничными условиями (6), (7), (8) и формулой (9):

$$u_k(-\alpha) - u_k(\beta) = \sqrt{2}\int_0^1 [u(x,-\alpha) - u(x,\beta)] \sin \pi k x\, dx = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x) \sin \pi k x\, dx = \varphi_k, \tag{18}$$

$$u'_k(-\alpha) = \sqrt{2}\int_0^1 u_t(x,-\alpha) \sin \pi k x\, dx = \sqrt{2}\int_0^1 \psi(x) \sin \pi k x\, dx = \psi_k, \tag{19}$$

$$u'_k(\beta) = \sqrt{2}\int_0^1 u_t(x,\beta) \sin \pi k x\, dx = \sqrt{2}\int_0^1 g(x) \sin \pi k x\, dx = g_k. \tag{20}$$

Удовлетворяя функции (17) условиям (18)-(20), относительно неизвестных a_k, f_{1k} и f_{2k} получим систему

$$u_k(t) = \begin{cases} a_k E_{1k}(\alpha) + f_{1k} F_{1k}(\alpha) + f_{2k} w_k(-\alpha) = \varphi_k\,, \\ a_k E_{2k}(\alpha) + f_{1k} F_{2k}(\alpha) + f_{2k} w'_k(-\alpha) = \psi_k\,, \\ -a_k \lambda_k^2 \beta^n e^{-\lambda_k^2 \beta^{n+1}/(n+1)} + f_{1k}\Big[-\lambda_k^2 \beta^n I_k(\beta) + 1\Big] = g_k\,, \end{cases} \tag{21}$$

где

$$E_{1k}(\alpha) = \sqrt{\alpha}\gamma_{-1/(2q)}(k) J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q) - e^{-\lambda_k^2 \beta^{n+1}/(n+1)}\,, \tag{22}$$

$$E_{2k}(\alpha) = \lambda_k \alpha^{q-1/2}\gamma_{-1/(2q)}(k) J_{1-1/(2q)}(p_k \alpha^q)\,, \tag{23}$$

$$F_{1k}(\alpha) = -\sqrt{\alpha}\gamma_{1/(2q)}(k) J_{1/(2q)}(p_k \alpha^q) - I_k(\beta)\,, \tag{24}$$

$$F_{2k}(\alpha) = \lambda_k \alpha^{q-1/2}\gamma_{1/(2q)}(k) J_{1/(2q)-1}(p_k \alpha^q)\,. \tag{25}$$

Вычислим определитель системы (21), с учетом равенств (15), (16), (22)–(25) и [13, с.21]:

$$J_\nu(z) J_{1-\nu}(z) + J_{-\nu}(z) J_{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi z}\sin(\nu\pi)\,.$$

Тогда получим

$$\Delta(k) = w_k(-\alpha)\Big[-E_{2k}(\alpha)\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta) + E_{2k}(\alpha) + \lambda_k^2\beta^n e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} F_{2k}(\alpha)\Big] -$$

$$-w'_k(-\alpha)\Big[-E_{1k}(\alpha)\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta) + E_{1k}(\alpha) - e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} + \lambda_k^2\beta^n e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} F_{1k}(\alpha)\Big] =$$

$$= \Big[- w_k(-\alpha)\lambda_k^3\alpha^{q-1/2}\gamma_{-1/(2q)}(k)J_{1-1/(2q)}(p_k\alpha^q)\beta^n I_k(\beta) +$$

$$+ w_k'(-\alpha)\lambda_k^2\sqrt{\alpha}\gamma_{-1/(2q)}(k)J_{-1/(2q)}(p_k\alpha^q)\beta^n I_k(\beta)\Big] +$$

$$+ \Big[w_k(-\alpha)\lambda_k\alpha^{q-1/2}\gamma_{-1/(2q)}(k)J_{1-1/(2q)}(p_k\alpha^q) - w_k'(-\alpha)\sqrt{\alpha}\gamma_{-1/(2q)}(k)J_{-1/(2q)}(p_k\alpha^q)\Big] +$$

$$+ \Big[w_k(-\alpha)\lambda_k^3\alpha^{q-1/2}\gamma_{1/(2q)}(k)J_{1/(2q)-1}(p_k\alpha^q)\beta^n e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} +$$

$$+ w_k'(-\alpha)\lambda_k^2\alpha^{q-1/2}\gamma_{1/(2q)}(k)J_{1/(2q)}(p_k\alpha^q)\beta^n e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}\Big] + w_k'(-\alpha)e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} =$$

$$= -\lambda_k^2\gamma_{-1/(2q)}(k)\beta^n I_k(\beta)\int\limits_{-\alpha}^{0} J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\,ds +$$

$$+ \gamma_{-1/(2q)}(k)\int\limits_{-\alpha}^{0} J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\,ds -$$

$$- e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}\Big[\lambda_k^2\beta^n\gamma_{-1/(2q)}(k)\int\limits_{-\alpha}^{0} J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\,ds - w_k'(-\alpha)\Big]. \qquad (26)$$

Тогда система (21) имеет единственное решение

$$a_k = (\Delta(k))^{-1}\varphi_k\Big[- \lambda_k^2\beta^n I_k(\beta)w_k'(-\alpha) + w_k'(-\alpha)\Big] -$$

$$-(\Delta(k))^{-1}\psi_k\Big[- \lambda_k^2\beta^n I_k(\beta)w_k(-\alpha) + w_k(-\alpha)\Big] +$$

$$+(\Delta(k))^{-1}g_k\Big[F_{1k}(\alpha)w_k'(-\alpha) - F_{2k}(\alpha)w_k(-\alpha)\Big] \qquad (27)$$

$$f_{1k} = -(\Delta(k))^{-1}\varphi_k\Big[\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta)w_k'(-\alpha)\Big] + (\Delta(k))^{-1}\psi_k\Big[\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta)w_k(-\alpha)\Big] -$$

$$-(\Delta(k))^{-1}g_k\Big[E_{1k}(\alpha)w_k'(-\alpha) - e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}w_k'(-\alpha) - E_{2k}(\alpha)w_k(-\alpha)\Big], \qquad (28)$$

$$f_{2k} = -(\Delta(k))^{-1}\varphi_k\Big[- E_{2k}(\alpha)\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta) + E_{2k}(\alpha) + F_{2k}(\alpha)\lambda_k^2\beta^n e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}\Big] -$$

$$-(\Delta(k))^{-1}\psi_k\Big[- E_{1k}(\alpha)\lambda_k^2\beta^n I_k(\beta) + E_{1k}(\alpha) - e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} + \lambda_k^2\beta^n e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}F_{1k}(\alpha)\Big] +$$

$$+(\Delta(k))^{-1}g_k\Big[E_{1k}(\alpha)F_{2k}(\alpha) - F_{2k}(\alpha)e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} - E_{2k}(\alpha)F_{1k}(\alpha) + E_{2k}(\alpha)I_k(\beta)\Big], \qquad (29)$$

если при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta(k) \neq 0. \qquad (30)$$

Таким образом, найден окончательный вид функций $u_k(t)$, которые определяются по формуле (17), а коэффициенты a_k, f_{1k} и f_{2k} находятся по формулам (27), (28) и (29).

Исходя из формул (17), (28) и (29) докажем единственность решения задачи (2)–(8). Пусть $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$ и при всех k выполнено условие (30). Тогда все $\varphi_k = \psi_k = g_k \equiv 0$ и из формул (17), (28) и (29) следует, что $u_k(t) \equiv 0$ па $[-\alpha, \beta]$ и $f_{ik} = 0$ $(i = 1, 2)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, из (9) и (13) имеем

$$\int\limits_0^1 u(x,t)\,\sin\pi kx\,dx = 0, \quad \int\limits_0^1 f_i(x)\,\sin\pi kx\,dx = 0, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда в силу полноты системы синусов в пространстве $L_2[0, 1]$ следует, что $u(x, t) = 0$ и $f(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку $u(x, t) \in C(\overline{D})$ и $f_i(x) \in C(0, 1)$, то $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{D}$ и $f_i(x) \equiv 0$ па $(0, 1)$.

Предположим, что условие (30) нарушено при некоторых α, β, b, m, n и $k = l$, т.е. $\Delta(l) = 0$. Тогда однородная задача (2)–(8) (где $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_l(x,t) = u_l(t)\sin\pi lx, \tag{31}$$

где

$$u_l(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_l^2 t^{n+1}/(n+1)} + f_l I_l(t), & t > 0, \\ E_{1l}(t) + f_{1l}(F_{1l}(t) - w_l(t)) + f_{2l} w_l(t), & t < 0, \end{cases}$$

$$f_{1l}(x) = f_{1l}\sin\pi lx, \quad f_{1l} = \frac{\lambda_l^2\beta^n e^{-\lambda_l^2\beta^{n+1}/(n+1)}}{-\lambda_l^2\beta^n I_l(\beta) + 1}\,. \tag{32}$$

$$f_{2l}(x) = f_{2l}\sin\pi lx, \quad f_{2l} = -\frac{E_{2l}(\alpha) + f_{1l}F_{2l}(\alpha)}{w_l'(-\alpha)}\,. \tag{33}$$

Лемма 3. *При любом фиксированном $\beta > 0$ и больших k для функции $I_k(\beta)$ справедлива оценка*

$$|I_k(\beta)| \le \widetilde{C}_0 k^{-2}\,, \tag{34}$$

где $\widetilde{C}_0$ – положительная иостояииая, зависящая от β и n.

□ Перепишем выражение $I_k(\beta)$ из (15) в следующем виде:

$$I_k(\beta) = \int\limits_0^\beta e^{-\lambda_k^2\frac{\beta^{n+1} - s^{n+1}}{n+1}}\,ds\,.$$

Введем замену $t = (\beta^{n+1} - s^{n+1})/(n + 1)$, тогда имеем

$$I_k(\beta) = \beta_2\int\limits_0^{\beta_1}(\beta_1 - t)^{-\frac{n}{n+1}} e^{-\lambda_k^2 t}\,dt, \quad \beta_1 = \frac{\beta^{n+1}}{n+1}, \quad \beta_2 = (n+1)^{-\frac{n}{n+1}}\,.$$

Применяя к последнему интегралу формулу [13, с. 324]

$$\int\limits_0^a x^{\alpha-1}(a-x)^{\beta-1}e^{-px}\,dx = B(\alpha,\beta)a^{\alpha+\beta-1}\,{}_1F_1(\alpha,\alpha+\beta;-ap)\,,$$

имеем

$$I_k(\beta) = \beta_2 B\left(1,\frac{1}{n+1}\right)\beta_1^{\frac{1}{n+1}}\,{}_1F_1\left(1,1+\frac{1}{n+1};-\beta_1\lambda_k^2\right)\,.$$

Используя асимптотику для функции ${}_1F_1(a,c;z)$ при $Re(z)\to-\infty$ [14, с. 266]

$${}_1F_1(a,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}[1+O(|z|^{-1})]\,,$$

получаем

$$I_k(\beta) = \beta_2 B\left(1,\frac{1}{n+1}\right)\beta_1^{\frac{1}{n+1}}\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}\left(\beta_1\lambda_k^2\right)^{-1}[1+O(|\beta_1\lambda_k^2|^{-1})] =$$

$$= \beta^{-n}\lambda_k^{-2}[1+O(k^{-2})] = \beta^{-n}\lambda_k^{-2}+O(k^{-4})\,. \tag{35}$$

Отсюда получаем требуемую оценку (34). ■

Лемма 4. *При любых фиксированных $\beta>0$, $b\geq 0$, $m>0$, $n>0$ и достаточно больших k выражение $\Delta(k)$ имеет счетное множество нулей относительно $\alpha_q=\alpha^q/q$.*

□ Следуя работам [3, 15], на основании (26) и (35) выражение $k^{2+\lambda}\Delta(k)$ ($\lambda=1/2-1/(2q)$) представим в следующем виде:

$$k^{2+\lambda}\Delta(k) = B_{1k}+B_{2k}\,, \tag{36}$$

где

$$B_{1k} = -k^{2+\lambda}O(k^{-4})\beta^n\lambda_k^2\gamma_{-1/(2q)}(k)\int\limits_{-\alpha}^0 J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\,ds\,,$$

$$B_{2k} = -k^{2+\lambda}e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)}\left[\lambda_k^2\beta^n\gamma_{-1/(2q)}(k)\int\limits_{-\alpha}^0 J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q)\sqrt{-s}\,ds - w_k'(-\alpha)\right]\,.$$

Рассмотрим соотношение B_{1k}. На основании первой теоремы о среднем, имеем

$$B_{1k} = k^{2+\lambda}O(k^{-4})\beta^n\lambda_k^2\gamma_{-1/(2q)}(k)\frac{1}{q}J_{-1/(2q)}(p_k\alpha^q\theta)\int\limits_0^{\alpha^q} t^{\frac{3}{2q}-1}\,dt\,,$$

где $0<\theta<1$. С учетом асимптотической формулы [16, с. 98] для функции

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-5/2})\,,\ \ z\to\infty\,, \tag{37}$$

при $k > k_1$, где k_1 – достаточно большое натуральное число, имеем

$$B_{1k} = B_k \sin\left(\lambda_k \alpha_q \theta + \pi \frac{q+1}{4q}\right) + O(k^{-2}) = B_{1k}^{(1)} + B_{1k}^{(2)} . \tag{38}$$

Здесь

$$B_k = \frac{2^{3/2}(\alpha^q)^{\frac{3}{2q}-\frac{1}{2}}\beta^n}{3\sqrt{\pi\theta}} \cdot \frac{k^{2+\lambda}O(k^{-4})\lambda_k^2 \gamma_{-1/(2q)}(k)}{\sqrt{p_k}} .$$

Отметим, что величина B_k при $k > k_1$ ограничена и отделена от нуля $0 < B < B_k < \sqrt{2}B$, $B = 2^{1/2-1/(2q)}\pi^{-1-1/(2q)}(\alpha^q)^{3/(2q)-1/2}\beta^n\Gamma(1/(2q))q/(3\sqrt{\theta})$. Выражение $B_{1k}^{(1)}$ имеет счетное множество положительных нулей относительно $\alpha_q = \alpha^q/q$. Выражения $B_{1k}^{(2)}$ и B_{2k} являются бесконечно малыми при $k \to \infty$. Тогда $\Delta(k)$ имеет счетное множество положительных нулей относительно α_q. ■

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,t)$ и $f_i(x)$ $(i = 1,2)$ задачи (2)–(8), то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия (30).*

3. Существование решения задачи. Так как выражение $\Delta(k)$ находится в знаменателе функций $u_k(t)$ то при достаточно больших k оно может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема «малых знаменателей» [11, 12, 3]. Покажем, что при достаточно больших k выражение $\Delta(k)$ отделено от нуля.

Лемма 5. *Если выполнено одно из условий: 1) $\alpha_q\theta$ – любое натуральное число; 2) $\alpha_q\theta = p/t$ – любое дробное число, где p и t – взаимно-простые натуральные числа и $r/t \neq (3q-1)/(4q)$, где $r = \overline{0, t-1}$, то существуют положительные постоянные $k_0 \in \mathbb{N}$ и C_0, такие, что при любых $k > k_0$ и фиксированных $b \geq 0$, $\beta > 0$, $m > 0$ и $n > 0$ справедлива оценка*

$$|k^{2+\lambda}\Delta(k)| \geq C_0 > 0, \quad \lambda = 1/2 - 1/(2q) . \tag{39}$$

□ Пусть $k_2 \in \mathbb{N}$ такое, что при $k > k_2$

$$0 < \frac{b}{\pi k} < 1 .$$

Тогда в силу работы [3], имеем представление

$$\lambda_k = \sqrt{b^2 + (\pi k)^2} = \pi k + \theta_k , \tag{40}$$

где для θ_k справедлива оценка

$$\frac{b^2}{4\pi k} < \theta_k < \frac{b^2}{2\pi k} . \tag{41}$$

Рассмотрим $B_{1k}^{(1)}$ из (38). С учетом (40), перепишем его в следующем виде

$$B_{1k}^{(1)} = B_k \sin\left(\pi k \alpha_q \theta + \theta_k \alpha_q \theta + \pi \frac{q+1}{4q}\right) . \tag{42}$$

Пусть $\alpha_q\theta = p/t$ – дробное число. Разделим kp на t с остатком: $kp = st + r$, $0 \le r < t$, $s, r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда выражение (42) оценим следующим образом:

$$|B_{1k}^{(1)}| = B_k \left| \sin\left(\pi s + \pi\frac{r}{t} + \theta_k\frac{p}{t} + \pi\frac{q+1}{4q}\right)\right| \ge \frac{B}{2}\left|\sin\left(\pi\frac{r}{t} + \pi\frac{q+1}{4q}\right)\right| = C_1 \ge 0\,,$$

так как в силу оценки (41) существует конечный предел

$$\lim_{k\to\infty} |B_{1k}^{(1)}| = C_1\,.$$

Теперь потребуем, чтобы постоянная C_1 была больше нуля. Это возможно только тогда, когда

$$\pi\frac{r}{t} + \pi\frac{q+1}{4q} \ne \pi d \ \text{ или } \ \frac{r}{t} + \frac{q+1}{4q} \ne d\,, \ \ d \in \mathbb{N}\,,$$

или

$$\frac{1}{q} \ne -1 + 4d - 4\frac{r}{t}\ . \tag{43}$$

Если число q – иррациональное, то неравенство (43) при всех r и t имеет место. Пусть q – рациональное число и $t = 1$, т.е. в этом случае $\alpha_q\theta = p$ – натуральное число, поэтому, $r = 0$, тогда неравенство (43) выполняется при всех $q > 1$ и $d \in \mathbb{N}$. Если $t \ge 2$, то в силу оценки

$$\frac{1}{4} < \frac{r}{t} + \frac{q+1}{4q} < 1 + \frac{1}{2}\ ,$$

неравенство (43) имеет место при всех $d \ge 2$. Если $d = 1$, то можно подобрать число r/t, такое, что нарушается условие (43), т.е. выполняется равенство

$$\frac{r}{t} = \frac{3q-1}{4q}\ ,$$

но этот случай по условию исключается.

Поскольку выражения $B_{1k}^{(2)}$ из (38), B_{2k} и B_{3k} из (36) являются бесконечно малыми при $k \to \infty$, то существует $k_3 \in \mathbb{N}$, такое, что при указанных $\alpha_q\theta$ и всех $k > k_3$ справедливы неравенства

$$|B_{1k}^{(1)}| > \frac{1}{2}C_1 = C_2, \quad |B_{1k}^{(2)}| < \frac{C_2}{4}, \quad |B_{2k}| < \frac{C_2}{4}, \quad |B_{3k}| < \frac{C_2}{4}\ . \tag{44}$$

Здесь и далее C_i – положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α, β, b, n и m. Тогда из представления (36) на основании оценок (44), получим

$$|k^{-2+\lambda}\Delta(k)| \ge |B_{1k}^{(1)}| - |B_{1k}^{(2)}| - |B_{2k}| - |B_{3k}| > \frac{C_2}{4} = C_0 > 0$$

при $k > k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$. ■

Замечание. Отметим, что условие

$$\frac{r}{t} \ne \frac{3q-1}{4q} \tag{45}$$

в лемме 4 существенно, так как в противном случае оценка (39) не имеет место.

Действительно, пусть нарушается условие (45). Тогда последовательность $B_{1k}^{(11)}$ является бесконечно малой:

$$|B_{1k}^{(1)}| = B_k \left|\sin\left(\theta_k \frac{p}{t}\right)\right| \leq C_3|\theta_k| \leq \frac{C_4}{k} ,$$

с другой стороны, при больших k в силу неравенства $\sin x \geq 2x/\pi$, $0 \leq x \leq \pi/2$, и оценки (41) имеем

$$|B_{1k}^{(1)}| = B_k \left|\sin\left(\theta_k \frac{p}{t}\right)\right| \geq C_5|\theta_k| \geq \frac{C_6}{k} .$$

В этом случае вместо оценки (39) можно получить другую более худшую оценку.

При выполнении оценки (39) при всех $k > k_0$ и неравенства (30) при $k = 1, 2, ..., k_0$ решение задачи (2)–(8) будем искать в виде сумм рядов

$$u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin\pi k x, \tag{46}$$

$$f_i(x) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} f_{ik}\sin\pi k x, \quad i = 1, 2, \tag{47}$$

где $u_k(t)$ и f_{ik} – определены соответственно по формулам (17), (28) и (29).

Лемма 6. *При любом фиксированном $t \in [-\alpha, 0)$ и больших k для функции ${}_1F_2(a; b, c; z)$ справедлива оценка*

$$\left|{}_1F_2\left(a;\ \ b,\ \ c;\ \ -\frac{(p_k t^q)^2}{4}\right)\right| \leq C_7 k^{2\eta}, \ \ \eta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}(b+c) \ . \tag{48}$$

□ Доказательство оценки (48) следует из асимптотического представления для функции ${}_1F_2(a; b, c; z)$ [17, с. 221]. ■

Лемма 7. *При любых $t \in [-\alpha, 0]$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливы оценки:*

$$|w_k(t)| \leq C_8, \ \ |w_k'(t)| \leq C_9 k^2 , \ \ |w_k''(t)| \leq C_{10}k^2 . \tag{49}$$

□ Доказательство проводится на основании равенства (16), леммы 6 и формулы [18, с. 37]

$$\int_0^x t^\lambda J_\nu(t)dt = \frac{x^{\lambda+\nu+1}}{2^\nu(\lambda+\nu+1)\Gamma(\nu+1)} \times \ {}_1F_2\left(\frac{\lambda+\nu+1}{2};\ \frac{\lambda+\nu+3}{2};\ \nu+1,\ -\frac{x^2}{4}\right), \tag{50}$$

где $Re(\lambda+\nu) > -1$. ■

Следствие. *При $t = -\alpha$ справедливы следующие оценки:*

$$|w_k(-\alpha)| \le C_{11}k^{-2}, \ \ |w_k'(-\alpha)| \le C_{12}k^{-1}.$$

Лемма 8. *Если выполнена оценка (39) при $k > k_0$, тогда для таких k справедливы оценки*

$$|u_k(t)| \le M_1(k^{1+\lambda}|\varphi_k| + k^{\lambda}|\psi_k| + k|g_k|),$$

$$|u_k'(t)| \le M_2(k^{3+\lambda}|\varphi_k| + k^{2+\lambda}|\psi_k| + k^3|g_k|), \ \ t \in [0, \beta];$$

$$|u_k(t)| \le M_3(k^3|\varphi_k| + k^2|\psi_k| + k^{2+\lambda}|g_k|),$$

$$|u_k'(t)| \le M_4(k^5|\varphi_k| + k^4|\psi_k| + k^{4+\lambda}|g_k|),$$

$$|u_k''(t)| \le M_5(k^5|\varphi_k| + k^4|\psi_k| + k^{4+\lambda}|g_k|), \ \ t \in [-\alpha, 0],$$

$$|f_{1k}| \le M_6(k^{1+\lambda}|\varphi_k| + k^{\lambda}|\psi_k| + k|g_k|),$$

$$|f_{2k}| \le M_7(k^3|\varphi_k| + k^2|\psi_k| + k^{2+\lambda}|g_k|).$$

Здесь и далее M_i – положительные постоянные.

□ С учетом следствия и асимптотической формулы (37) оценим выражения (22)-(25).

$$|E_{1k}(\alpha)| \le C_{13}k^{-\lambda} + e^{-\lambda_k^2\beta^{n+1}/(n+1)} \le C_{14}k^{-\lambda}, \ \ |E_{2k}(\alpha)| \le C_{15}k^{1-\lambda}, \tag{51}$$

$$|F_{1k}(\alpha)| \le C_{16}k^{-1+\lambda} + C_{17} \le C_{18}, \ \ |F_{2k}(\alpha)| \le C_{19}k^{\lambda}. \tag{52}$$

С помощью оценок (34), (51), (52) и следствия получим оценки для выражений (27)-(25).

$$|a_k| \le C_{20}(k^{1+\lambda}|\varphi_k| + k^{\lambda}|\psi_k| + k^{2\lambda}|g_k|), \tag{53}$$

$$|f_{1k}| \le M_6(k^{1+\lambda}|\varphi_k| + k^{\lambda}|\psi_k| + k|g_k|)\,, \tag{54}$$

$$|f_{2k}| \le M_7(k^3|\varphi_k| + k^2|\psi_k| + k^{2+\lambda}|g_k|)\,. \tag{55}$$

При любом $t \in [0, \beta]$ из (15) имеем

$$|I_k(t)| \le C_{21}, |I_k'(t)| \le k^2 C_{22}\,. \tag{56}$$

Заметим также, что при любом $t \in [-\alpha, 0]$ справедливы неравенства:

$$\left|\gamma_{\pm 1/(2q)}\sqrt{-t}J_{\pm 1/(2q)}(p_k(-t)^q)\right| \le C_{23}\,, \tag{57}$$

$$\left|\gamma_{-1/(2q)}(-t)^{q-1/2}J_{1-1/(2q)}(p_k(-t)^q)\right| \le C_{24}k\,, \tag{58}$$

$$\left|\gamma_{1/(2q)}(-t)^{q-1/2}J_{1/(2q)-1}(p_k(-t)^q)\right| \le C_{25}k^{-1+\lambda}\,. \tag{59}$$

На основании (17), с учетом оценок (53)–(59), получаем требуемые оценки. ■

В силу леммы 8, ряд (46) и его производные первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$ и производные второго порядка соответственно в областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ и ряды (47) на $[0,1]$ мажорируются рядом

$$M_8 \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \left(k^5|\varphi_k| + k^4|\psi_k| + k^{4+\lambda}|g_k|\right) . \tag{60}$$

Лемма 9. *Пусть* $\varphi(x) \in C^6[0,1]$, $\psi(x) \in C^5[0,1]$, $g(x) \in C^{5+\mu}[0,1]$, $\lambda < \mu < 1$, $\varphi^i(0) = \varphi^i(1) = \psi^i(0) = \psi^i(1) = g^i(0) = g^i(1) = 0$, $i = 1, 2$. *Тогда справедливы представления:*

$$\varphi_k = -\frac{1}{\pi^6 k^6}\,\varphi_k^{(6)}, \quad \psi_k = \frac{1}{\pi^5 k^5}\,\psi_k^{(5)}, \quad |g_k| \le \frac{M_9}{k^{5+\mu}} ,$$

где

$$\varphi_k^{(6)} = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi^{VI}(x)\sin\pi kx\,dx\,, \quad \psi_k^{(5)} = \sqrt{2}\int_0^1 \psi^{V}(x)\cos\pi kx\,dx\,,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi_k^{(6)}|^2 \le ||\varphi^{VI}||^2_{L_2}\,, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} |\psi_k^{(5)}|^2 \le ||\psi^{V}||^2_{L_2}\,.$$

При выполнении условий леммы 8 ряд (60) оценивается числовым рядом

$$M_{10} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(|\varphi_k^{(6)}| + |\psi_k^{(5)}| + \frac{1}{k^{\mu-\lambda}}\right). \tag{61}$$

В силу сходимости ряда (61), следует равномерная сходимость ряда (46), рядов из производных первого порядка членов этого ряда в $\overline{D}$ и возможность его почленного дифференцирования по x и t дважды при $t \le 0$ и любое число раз при $t > 0$, и рядов (47) на $[0,1]$.

Если при некоторых $k = l = k_1, k_2, ..., k_m$, где $1 \le k_1 < k_2 < ... < k_m \le k_0$, где k_n, $n = \overline{1,m}$, m – заданные натуральные числа, $\Delta(l) = 0$, то для разрешимости задачи (2)–(8) достаточно, чтобы

$$\int_0^1 \varphi(x)\sin\pi lx\,dx = \int_0^1 \psi(x)\sin\pi lx\,dx = \int_0^1 g(x)\sin\pi lx\,dx = 0, \quad l = k_1, ..., k_m. \tag{62}$$

Тогда решение задачи (2)-(8) определяется в виде сумм рядов

$$u(x,t) = \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \cdots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{\infty}\right) u_k(t)\sin\pi kx + \sum_{l} A_l u_l(x,t), \tag{63}$$

$$f_{ik}(x) = \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \cdots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{\infty}\right) f_{ik}\sin\pi kx + \sum_{l} A_{il} f_{il}(x), \quad i = 1, 2, \tag{64}$$

где функции $u_k(t)$, f_{ik}, $u_l(x,t)$ и $f_{il}(x)$ определяются соответственно по формулам (17), (28), (29), (31)–(33), A_{il} – произвольная постоянная, в суммах $\sum_l$ индекс l принимает значения $k_1, k_2, ..., k_l$, конечные суммы выражений (63), (64) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям леммы 9 и выполнена оценка (39) при $k > k_0$. Тогда если $\Delta(k) \neq 0$ при всех $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (2)-(8) и это решение определяется рядами (46), (47); если $\Delta(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, ..., k_m \leq k_0$, то задача (2)-(8) разрешима тогда, когда выполняются условия ортогональности (62) и решение в этом случае определяется рядами (63), (64).*

4. Устойчивость решения задачи. Введем следующие известные нормы:

$$||u(x,t)||_{L_2[0,1]} = ||u(x,t)||_{L_2} = \left(\int_0^1 |u(x,t)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

$$||f(x)||_{L_2} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad ||u(x,t)||_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}} |u(x,t)|.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и $\Delta(k) \neq 0$ при всех $k \leq k_0$. Тогда для решения (46), (47) задачи (2)–(8) имеют место оценки:*

$$||u(x,t)||_{L_2} \leq M_{11} \left(||\varphi'''(x)||_{L_2[0,1]} + ||\psi''(x)||_{L_2[0,1]} + ||g'''(x)||_{L_2[0,1]} \right),$$

$$||f_1(x)||_{L_2} \leq M_{12} \left(||\varphi''(x)||_{L_2[0,1]} + ||\psi'(x)||_{L_2[0,1]} + ||g'(x)||_{L_2[0,1]} \right),$$

$$||f_2(x)||_{L_2} \leq M_{13} \left(||\varphi'''(x)||_{L_2[0,1]} + ||\psi''(x)||_{L_2[0,1]} + ||g'''(x)||_{L_2[0,1]} \right),$$

$$||u(x,t)||_{C(\overline{D})} \leq M_{14} \left(||\varphi^{IV}(x)||_{C[0,1]} + ||\psi'''(x)||_{C[0,1]} + ||g^{IV}(x)||_{C[0,1]} \right),$$

$$||f_1(x)||_{C(\overline{D})} \leq M_{15} \left(||\varphi'''(x)||_{C[0,1]} + ||\psi''(x)||_{C[0,1]} + ||g''(x)||_{C[0,1]} \right),$$

$$||f_2(x)||_{C(\overline{D})} \leq M_{16} \left(||\varphi^{IV}(x)||_{C[0,1]} + ||\psi'''(x)||_{C[0,1]} + ||g^{IV}(x)||_{C[0,1]} \right),$$

где постоянные M_i не зависят от функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$.

□ Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы работы [3]. ■

Литература

1. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии // Дифференц. уравнения. – 2011. – 47, № 1. – С.1-8.
2. Сабитов К.Б. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. – 2011. – 89, №4. – С.596-602.
3. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2014. – 50, №3. – С.356-365.

4. Капустин Н.Ю. Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. I. // Дифференц. уравнения. – 1987. – 23, №1. – С.72-78.
5. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // ДАН. – 2009. – 429, №4. – С.451-454.
6. Иванов В.К., Васин В.В., Танан В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / М.: Наука, 1978.
7. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.: Наука, 1980.
8. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач / М.: МГУ, 1994.
9. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / New-York: Marcel Dekker, 2000.
10. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи / Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
11. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. – 1963. – 18, №6. – С.91-192.
12. Ломов И.С. Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1993. – 29, №12. – С.2079-2089.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды / М.: Наука, 1981. – 800 с.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. 2-е изд. / М.: Наука, 1973.
15. Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. – 2013. – 49, №1. – С.68-78.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. 2-е изд. / М.: Наука, 1974.
17. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / М.: Мир, 1980.
18. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции / М.: Наука, 1983.

NONLOCAL INVERSE PROBLEM OF RIGHT PARTS DETERMINING OF THE MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE DEGENERATE EQUATION

S.N. Sidorov

Sterlitamak department of Bashkir State University,
Lenin Av., 37, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: stsid@mail.ru

Abstract. The inverse boundary problem in rectangular region is studied for equation of mixed parabolic-hyperbolic type. It consists of finding the unknown right-hand parts with a nonlocal boundary condition, connecting values of the derived solution on opposite sides normals of the rectangular domain which belong to different types of the equation under study. Solutions are built in the form of sums over eigenfunctions system that corresponds to one-dimensional spectral problem. It is set the criterion of solution uniqueness and it is proved the solution stability of inverse problems on boundary data.

Key words: equation of mixed type, inverse problem, spectral method, existence, uniqueness, stability.