МАТЕМАТИКА

MSC 35M10

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ ПЕРЕХОДА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А.А. Гималтдинова

Поволжская социально-гуманитарная академия,
ул. М.Горького, 65/67, Самара, 443099, Россия, e-mail: alfiragimaltdinova@mail.ru

Аннотация. Для уравнения эллиптико-гиперболического типа с двумя внутренними перпендикулярными линиями степенного и разрывного вырождения изучена первая краевая задача. Методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения поставленной задачи. Решение построено в виде суммы ряда Фурье-Бесселя.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, задача Дирихле, биортогональная система функций, полнота, существование и единственность решения.

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} y)|y|^n u_{xx} + (\operatorname{sgn} x)u_{yy} = 0\,, \quad n > 0\,, \tag{1}$$

в области $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$.

Обозначим $D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_3 = D \cap \{x < 0, y < 0\}$, $D_4 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$.

В области D для уравнения (1) поставим следующую задачу.

Задача Дирихле. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4)\,, \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0,\ \ (x,y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4\,, \tag{3}$$

$$u(x,y)\Big|_{x=1} = u(x,y)\Big|_{x=-1} = 0,\ \ y \in [-\alpha, \beta]\,, \tag{4}$$

$$u(x,y)\Big|_{y=\beta} = \varphi(x), \quad u(x,y)\Big|_{y=-\alpha} = \psi(x)\,,\ \ x \in [-1,1]\,, \tag{5}$$

где φ и ψ – заданные достаточно гладкие функции.

Краевые задачи для уравнений смешанного типа с одной или несколькими линиями изменения или вырождения типа были объектом изучения многих авторов.

В работе [1] построена теория задачи Трикоми для уравнений смешанного типа в классической смешанной области, в которой гиперболическая часть состоит из двух подобластей, ограниченных характеристиками уравнения и линиями изменения типа. Там приведен достаточно полный обзор работ, посвященных данному направлению.

В работе [2] предложена задача для уравнения с двумя линиями вырождения в смешанной области, состоящей из четырех эллиптических подобластей и четырех гиперболических подобластей, последние из которых ограничены характеристиками данного уравнения и линиями изменения типа.

Многие авторы, например, [4]- [7], занимались поиском областей, в которых является корректной задача Дирихле для уравнений смешанного типа. В этих работах единственность решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа с одной линией вырождения или изменения типа доказана с помощью принципа экстремума или методом интегральных тождеств, а существование – методом интегральных уравнений или разделения переменных.

В работах [8,9] исследована задача Дирихле для уравнения смешанного типа с одной внутренней линией степенного вырождения и вырождением на границе в прямоугольной области и методом спектрального анализа установлен критерий единственности, решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций.

В настоящей работе на основании работы [8] установлен критерий единственности и построено решение задачи (2)-(5) в прямоугольной области, состоящей из двух гиперболических и двух эллиптических подобластей, в виде суммы ряда по системе собственных функций одномерной задачи Штурма-Лиувилля. При доказательстве единственности решения поставленной задачи использовалась только полнота построенной системы собственных функций аналогично тому, как это было сделано в [10] при доказательстве единственности решения смешанной задачи для гиперболических уравнений. При доказательстве существования решения задачи (2)-(5) аналогично [8, 11, 12] возникла так называемая «проблема малых знаменателей», которая создает трудности при обосновании сходимости построенного ряда в классе функций (2). При определенных ограничениях на параметры α, β получены оценки об отделимости малых знаменателей от нуля с соответствующей асимптотикой, которые позволили обосновать сходимость построенных рядов в классе функций (2).

2. Построение частных решений. После разделения переменных посредством подстановки $u(x,y) = X(x)Y(y)$ в уравнении (1) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения с разрывными коэффициентами и условиями сопряжения:

$$(\operatorname{sgn} x)X'' + d \cdot X = 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1)\,, \tag{6}$$

$$X(+0) = X(-0), \;\; X'(+0) = X'(-0), \quad X(1) = X(-1) = 0\,, \tag{7}$$

$$Y'' - d(\operatorname{sgn} y)|y|^n Y = 0, \quad y \in (-\alpha,0) \cup (0,\beta), \tag{8}$$

$$Y(+0) = Y(-0), \;\; Y'(+0) = Y'(-0), \tag{9}$$

где $d = \mu^2 \in \mathbb{C}$.

Можно доказать, что постоянная d может принимать значения $d_k = \mu_k^2 > 0$ и $d_k = -\mu_k^2 < 0$, $k \in \mathbb{N}$, и решениями задачи (6), (7) будут соответственно функции

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} X_{k,+}^{(1)}(x) = \dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, & x > 0, \\[2ex] X_{k,-}^{(1)}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x < 0\,, \end{cases} \qquad X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x > 0\,, \\[2ex] \dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, & x < 0\,, \end{cases} \tag{10}$$

где μ_k – положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{th}\mu$, для них справедливо асимптотическое представление

$$\mu_k = -\frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k})\,, \quad k \in \mathbb{N}\,. \tag{11}$$

В силу того, что система $\{X_k^{(1)}(x),\ X_k^{(2)}(x)\}$ не ортогональна в $L_2[-1,1]$, рассмотрим задачу, сопряженную к задаче (6), (7), т.е. задачу

$$\operatorname{sgn} x \cdot Z'' + d \cdot Z = 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1)\,, \tag{12}$$

$$Z(-0) = -Z(+0), \ \ Z'(-0) = -Z'(+0), \ \ Z(-1) = Z(1) = 0\,. \tag{13}$$

Решениями задачи (12), (13) являются функции

$$Z_k^{(1)}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, & x > 0\,, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x < 0\,, \end{cases} \qquad Z_k^{(2)}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x > 0\,, \\[2ex] \dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, & x < 0\,. \end{cases} \tag{14}$$

Лемма 1. *Система $\{Z_k^{(1)}(x),\ Z_k^{(2)}(x)\}$ полна в $L_2[-1,1]$ и образует базис Рисса.*

□ Доказательство леммы основано на работе [13] и приведено в [14].■

Найдем общее решение уравнения (8):

$$Y(y) = \begin{cases} C_1^+ \sqrt{y}\, I_{1/2q}\big(\sqrt{d}\, y^q/q\big) + C_2^+ \sqrt{y}\, K_{1/2q}\big(\sqrt{d}\, y^q/q\big), & y > 0, \\ C_1^- \sqrt{-y} J_{1/2q}\big(\sqrt{d}\,(-y)^q/q\big) + C_2^- \sqrt{-y}\; Y_{1/2q}\big(\sqrt{d}\,(-y)^q/q\big), & y < 0, \end{cases} \tag{15}$$

где $q = (n+2)/2$, $J_{1/2q}(\cdot)$, $Y_{1/2q}(\cdot)$ – функции Бесселя порядка $1/2q$ первого и второго рода соответственно, $I_{1/2q}(\cdot)$, $K_{1/2q}(\cdot)$ – модифицированные функции Бесселя порядка $1/2q$ первого и третьего рода соответственно.

1) Пусть $d_k = \mu_k^2 > 0$. Аналогично [15] и [9] можно показать, что условия (9) выполнены только при $C_2^- = -\dfrac{\pi}{2}\, C_2^+$ и $C_1^- = -C_1^+ + C_2^+ \dfrac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{4q}$.

Тогда функции (15) можно привести к виду:

$$Y_k^{(1)}(y) = \begin{cases} a_k^{(1)} \sqrt{y}\; I_{1/2q}\big(\mu_k\, y^q/q\big) + b_k^{(1)} \sqrt{y}\; K_{1/2q}\big(\mu_k\, y^q/q\big), & y > 0, \\ -a_k^{(1)} \sqrt{-y}\; J_{1/2q}\big(\mu_k(-y)^q/q\big) + b_k^{(1)} \sqrt{-y}\; \overline{Y}_{1/2q}\big(\mu_k(-y)^q/q\big), & y < 0, \end{cases} \tag{16}$$

где

$$\overline{Y}_{1/2q}\big(\mu_k(-y)^q/q\big) = \frac{\pi}{2\sin(\pi/2q)}\left[J_{1/2q}\big(\mu_k(-y)^q/q\big) + J_{-1/2q}\big(\mu_k(-y)^q/q\big)\right].$$

2) При $d_k = -\mu_k^2 > 0$ аналогично найдем:

$$Y_k^{(2)}(y) = \begin{cases} -a_k^{(2)}\sqrt{y}\,J_{1/2q}\big(\mu_k y^q/q\big) + b_k^{(2)}\sqrt{y}\,\overline{Y}_{1/2q}\big(\mu_k y^q/q\big), & y > 0, \\ a_k^{(2)}\sqrt{-y}\,I_{1/2q}\big(\mu_k\,(-y)^q/q\big) + b_k^{(2)}\sqrt{-y}\,K_{1/2q}\big(\mu_k\,(-y)^q/q\big), & y < 0. \end{cases} \tag{17}$$

В формулах (16) и (17) коэффициенты $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$, $j = 1, 2,$ – произвольные постоянные.

3. Единственность решения задачи (2)-(5). Пусть существует решение $u(x,y)$ задачи (2)-(5). Рассмотрим функции

$$u_k^{(1)}(y) = \int\limits_{-1}^{1} u(x,y)Z_k^{(1)}(x)dx, \quad u_k^{(2)}(y) = \int\limits_{-1}^{1} u(x,y)Z_k^{(2)}(x)dx\,, \; k \in \mathbb{N}\,, \tag{18}$$

где $Z_k^{(j)}(x)$ определены но формуле (14). Можно доказать, что $u_k^{(1)}(y)$ является решением уравнения (8) и удовлетворяют условиям (9), то есть $u_k^{(1)}(y) \equiv Y_k^{(1)}(y)$, следовательно, функции $u_k^{(1)}(y)$ определяются но формулам (16).

Аналогично доказывается, что $u_k^{(2)}(y) = Y_k^{(2)}(y)$, т.е. функции $u_k^{(2)}(y)$ определяются по формулам (17).

Для нахождения постоянных $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$ воспользуемся граничными условиями (5) и формулами (16) и (17):

$$\begin{aligned} u_k^{(1)}(\beta) &= \int\limits_{-1}^{1} u(x,\beta)Z_k^{(1)}(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x)Z_k^{(1)}(x)dx = \varphi_k^{(1)}, \\ u_k^{(2)}(\beta) &= \int\limits_{-1}^{1} u(x,\beta)Z_k^{(2)}(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x)Z_k^{(2)}(x)dx = \varphi_k^{(2)}, \\ u_k^{(1)}(-\alpha) &= \int\limits_{-1}^{1} u(x,-\alpha)Z_k^{(1)}(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} \psi(x)Z_k^{(1)}(x)dx = \psi_k^{(1)}, \\ u_k^{(2)}(-\alpha) &= \int\limits_{-1}^{1} u(x,-\alpha)Z_k^{(2)}(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} \psi(x)Z_k^{(2)}(x)dx = \psi_k^{(2)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Тогда на основании (16), (17) и (19) получим системы для нахождения неизвестных коэффициентов $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$:

$$\begin{cases} a_k^{(1)} I_{1/2q}(\mu_k \beta_q) + b_k^{(1)} K_{1/2q}(\mu_k \beta_q) = \dfrac{\varphi_k^{(1)}}{\sqrt{\beta}}, \\ -a_k^{(1)} J_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) + b_k^{(1)} \overline{Y}_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) = \dfrac{\psi_k^{(1)}}{\sqrt{\alpha}}, \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} -a_k^{(2)} J_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q) + b_k^{(2)} \overline{Y}_{-1/(2q)}(\mu_k \beta_q) = \dfrac{\varphi_k^{(2)}}{\sqrt{\beta}}, \\ a_k^{(2)} I_{1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) + b_k^{(2)} K_{-1/(2q)}(\mu_k \alpha_q) = \dfrac{\psi_k^{(2)}}{\sqrt{\alpha}}, \end{cases} \tag{21}$$

где $\alpha_q = \alpha^q/q$, $\beta_q = \beta^q/q$.

Если при всех $k \in \mathbb{N}$ определители систем (20) и (21) отличны от нуля:

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta) = \overline{Y}_{1/(2q)}(\mu_k\alpha_q) I_{1/(2q)}(\mu_k\beta_q) + J_{1/(2q)}(\mu_k\alpha_q) K_{1/(2q)}(\mu_k\beta_q) \neq 0, \tag{22}$$

$$\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta) = I_{1/(2q)}(\mu_k\alpha_q) \overline{Y}_{1/(2q)}(\mu_k\beta_q) + K_{1/(2q)}(\mu_k\alpha_q) J_{1/(2q)}(\mu_k\beta_q) \neq 0, \tag{23}$$

то они имеют единственное решение:

$$a_k^{(1)} = \frac{\sqrt{\alpha}\,\varphi_k^{(1)}\,\overline{Y}_{1/(2q)}(\mu_k\alpha_q) - \sqrt{\beta}\,\psi_k^{(1)}\,K_{1/(2q)}(\mu_k\beta_q)}{\sqrt{\alpha\beta}\,\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)},$$

$$b_k^{(1)} = \frac{\sqrt{\alpha}\,\varphi_k^{(1)}\,J_{1/(2q)}(\mu_k\alpha_q) + \sqrt{\beta}\,\psi_k^{(1)}\,I_{1/(2q)}(\mu_k\beta_q)}{\sqrt{\alpha\beta}\,\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)},$$

$$a_k^{(2)} = \frac{-\sqrt{\alpha}\,\varphi_k^{(2)}\,K_{1/(2q)}(\mu_k\alpha_q) + \sqrt{\beta}\,\psi_k^{(2)}\,\overline{Y}_{1/(2q)}(\mu_k\beta_q)}{\sqrt{\alpha\beta}\,\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)},$$

$$b_k^{(2)} = \frac{\sqrt{\alpha}\,\varphi_k^{(2)}\,I_{1/(2q)}(\mu_k\alpha_q) + \sqrt{\beta}\,\psi_k^{(2)}\,J_{1/(2q)}(\mu_k\beta_q)}{\sqrt{\alpha\beta}\,\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)}.$$

Тогда с учетом найденных значений $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$ функции (18) примут вид:

$$u_k^{(1)}(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{\alpha\beta}\,\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)} \left[\sqrt{\alpha}\,\varphi_k^{(1)}\,\Delta_k^{(1)}(\alpha,y) - \sqrt{\beta}\,\psi_k^{(1)} M_k(y,\beta)\right], & y>0, \\ \dfrac{\sqrt{-y}}{\sqrt{\alpha\beta}\,\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)} \left[\sqrt{\alpha}\,\varphi_k^{(1)}\,N_k(\alpha,-y) + \sqrt{\beta}\,\psi_k^{(1)}\Delta_k^{(1)}(-y,\beta)\right], & y<0, \end{cases} \tag{24}$$

$$u_k^{(2)}(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{\alpha\beta}\,\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)} \left[\sqrt{\alpha}\,\varphi_k^{(2)}\,\Delta_k^{(2)}(\alpha,y) - \sqrt{\beta}\,\psi_k^{(2)} N_k(y,\beta)\right], & y>0, \\ \dfrac{\sqrt{-y}}{\sqrt{\alpha\beta}\,\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)} \left[\sqrt{\alpha}\,\varphi_k^{(2)}\,M_k(\alpha,-y) + \sqrt{\beta}\,\psi_k^{(2)}\Delta_k^{(2)}(-y,\beta)\right], & y<0, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$M_k(c,d) = I_{1/(2q)}(\mu_k c^q/q)K_{1/(2q)}(\mu_k d^q/q) - K_{1/(2q)}(\mu_k c^q/q)I_{1/(2q)}(\mu_k d^q/q), \qquad (26)$$

$$N_k(c,d) = J_{1/(2q)}(\mu_k c^q/q)\overline{Y}_{1/(2q)}(\mu_k d^q/q) - \overline{Y}_{1/(2q)}(\mu_k c^q/q)J_{1/(2q)}(\mu_k d^q/q). \qquad (27)$$

Пусть $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ на $[-1,1]$ и выполнены условия (22) и (23) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда па основании (18), (19), (24) – (25) получим

$$\int\limits_{-1}^{1} u(x,y)Z_k^{(j)}(x)dx = 0, \quad j = 1,2, \ k = 1,2,3,\ldots .$$

Отсюда в силу полноты системы $\{Z_k^{(1)}(x),\ Z_k^{(2)}(x)\}$ в $L_2[-1,1]$ имеем, что функция $u(x,y) = 0$ почти всюду при $x \in [-1,1]$ при любом $y \in [-\alpha,\beta]$. А в силу непрерывности $u(x,y)$ в $\overline{D}$ будет $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, β и $k = s \in \mathbb{N}$ нарушено одно из условий (22) или (23). Пусть, например, $\Delta_s^{(1)}(\alpha,\beta) = 0$, $\Delta_s^{(2)}(\alpha,\beta) \neq 0$. Тогда однородная задача (2) – (5) (где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_s(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\mu_s(x-1)\sqrt{y}\,\Delta_s^{(1)}(\alpha,y)}{\cos\mu_s\, J_{1/(2q)}(\mu_s\alpha_q)}, & (x,y) \in D_1, \\[2ex] \dfrac{\sin\mu_s(x-1)\sqrt{-y}\,N_s(\alpha,-y)}{\cos\mu_s\, J_{1/(2q)}(\mu_s\alpha_q)}, & (x,y) \in D_2, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}\mu_s(x+1)\sqrt{-y}\,N_s(\alpha,-y)}{\operatorname{ch}\mu_s\, J_{1/(2q)}(\mu_s\alpha_q)}, & (x,y) \in D_3, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}\mu_s(x+1)\sqrt{y}\,\Delta_s^{(1)}(\alpha,y)}{\operatorname{ch}\mu_s\, J_{1/(2q)}(\mu_s\alpha_q)}, & (x,y) \in D_4. \end{cases}$$

Докажем существование нулей выражения $\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)$. Для этого представим его в виде

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta) = I_{1/(2q)}(\mu_k\beta_q)\delta_k^{(1)}(\alpha,\beta), \qquad (28)$$

где

$$\delta_k^{(1)}(\alpha,\beta) = J_{1/(2q)}(\mu_k\alpha_q)\frac{K_{1/(2q)}(\mu_k\beta_q)}{I_{1/(2q)}(\mu_k\beta_q)} + \overline{Y}_{1/(2q)}(\mu_k\alpha_q) = \gamma_k(\alpha,\beta) + \sigma_k(\alpha). \qquad (29)$$

Существование нулей $\delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)$ относительно α следует из того, что функции $J_{1/(2q)}(\mu_k z)$ и $\overline{Y}_{1/(2q)}(\mu_k z)$, $z = \alpha_q$, являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя

$$y''(z) + \frac{1}{z}y'(z) + \left[\mu_k^2 - \left(\frac{1}{2qz}\right)^2\right]y(z) = 0\,. \qquad (30)$$

Тогда функции $J_{1/(2q)}(\mu_k z)$ и $\delta_k^{(1)}(z^{1/q}, \beta)$ также являются линейно независимыми решениями уравнения (30). Из общей теории линейных дифференциальных уравнений известно, что нули двух линейно независимых решений уравнения Бесселя строго чередуются, т.е. на интервале между любыми двумя последовательными нулями каждого из этих решений содержится ровно один нуль другого решения. Функция $J_{1/(2q)}(\mu_k z)$ имеет счетное множество положительных нулей, тогда функция $\delta_k^{(1)}(z^{1/q}, \beta)$ также имеет счетное множество положительных нулей.

Таким образом, доказан следующий критерий единственности.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2)-(5), *то оно единственно, только если для всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполняются условия* $\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta) \neq 0$, $j = 1, 2$.

4. Существование решения задачи Дирихле. Из формул (24) и (25) видно, что выражения $\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta)$ являются знаменателями дробей и могут обратиться в нуль, т.е. возникает проблема «малых знаменателей» [8, 11, 12]. Поэтому для обоснования существования решения задачи (2)-(5) необходимо показать существование чисел α и β таких, что при больших k выражения $\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta)$ отделены от нуля.

Исходя из представления (29), рассмотрим выражение

$$\overline{\sigma}_k(\alpha) = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2q}\right)\sigma_k(\alpha) = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2q}\right)\overline{Y}_{1/(2q)}(\mu_k\alpha_q) = J_{1/2q}(\mu_k\alpha_q) + J_{-1/2q}(\mu_k\alpha_q). \quad (31)$$

На основании асимптотической формулы для функции Бесселя [16, с.98]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad z \to \infty, \quad (32)$$

при достаточно больших k выражение (31) примет вид

$$\overline{\sigma}_k(\alpha) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi\mu_k\alpha_q}}\cos\left(\mu_k\alpha_q - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4q} + O(k^{-3/2}). \quad (33)$$

С учетом (11) из равенства (33) имеем

$$\sqrt{k}\,\overline{\sigma}_k(\alpha) = A_k\cos\left[\pi k\alpha_q - \frac{\pi}{4}(\alpha_q + 1) + O(e^{-2\pi k})\right] + O(k^{-1}), \quad (34)$$

где $A_k = 2\sqrt{2}\pi^{-1}\cos\dfrac{\pi}{4q}\left[\pi\alpha_q\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) + O\left(\dfrac{e^{-2\pi k}}{k}\right)\right]^{-1/2}$, причем величина A_k ограничена и отделена от нуля: $0 < A < A_k < B = A_\infty$.

Пусть $\alpha_q = p/h$ – рациональное число, $p, h \in \mathbb{N}$, $(p, h) = 1$. Разделим pk на h с остатком: $pk = sh + r$, $r, s \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq r \leq h - 1$, и оценим первое слагаемое в (34) следующим образом:

$$\left|A_k\cos\left[\pi k\alpha_q - \frac{\pi}{4}(\alpha_q + 1) + O(e^{-2\pi k})\right]\right| \geq \frac{A}{2}\left|\cos\left[\frac{\pi r}{h} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{p}{h} + 1\right)\right]\right| = \tilde{K}_1 \geq 0\,. \quad (35)$$

В (35) потребуем, чтобы $\tilde{K}_1 > 0$, а это возможно только при $\dfrac{\pi r}{h} - \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{p}{h}+1\right) \neq \dfrac{\pi}{2} + d\pi$, $d \in \mathbb{Z}$, т.е.

$$\frac{4r-p-3h}{4h} \neq d\,,\quad d \in \mathbb{Z}\,,\quad 0 \le r \le h-1\,. \tag{36}$$

В частности, если $h=1$, то $r=0$, и условие (36) примет вид $p \neq 4d-3$, $d \in \mathbb{N}$.

Таким образом, при выполнении условия (36) при достаточно больших k имеем, что выражение $\sqrt{k}\,\overline{\sigma}_k(\alpha)$ отделено от нуля, и в силу известных асимптотических формул [16, с.99]

$$I_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi z}}\,e^z\,,\quad K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\,,\quad \overline{Y}(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\frac{\cos(z-\pi/4)}{\sin(\nu\pi/2)}\,,\qquad z \to +\infty\,, \tag{37}$$

величина $\gamma_k(\alpha,\beta)$ из (29) есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\sigma_k(\alpha)$.

Тогда из (28) с учетом (37) получим, что $|\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)| \ge R_1\, e^{\pi k\beta_q}/k$.

Итак, нами доказано утверждение.

Лемма 2. *Если $\alpha_q = p/h$, $p,h \in \mathbb{N}$, $(p,h)=1$ и выполнено условие (36), то существуют положительные постоянные R_1 и k_1, $k_1 \in \mathbb{N}$, зависящие, вообще говоря, от α, β, n, такие, что при всех $k > k_1$ справедлива оценка*

$$|\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)| \ge R_1\frac{e^{\pi k\beta_q}}{k} > 0\,. \tag{38}$$

Аналогично доказывается

Лемма 3. *Если $\beta_q = p/h$, $p,h \in \mathbb{N}$, $(p,h)=1$ и выполнено условие (36), то существуют положительные постоянные R_2 и k_2, $k_2 \in \mathbb{N}$, зависящие, вообще говоря, от α, β, n, такие, что при всех $k > k_2$ справедлива оценка*

$$|\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)| \ge R_2\frac{e^{\pi k\alpha_q}}{k} > 0\,. \tag{39}$$

Если $\Delta_k^{(j)}(\alpha,\beta) \neq 0$, $j=1,2$, при $k < \max\{k_1,k_2\}$ для указанных α и β из лемм 1 и 2 и выполнены оценки (38) и (39), то решение задачи (2)-(5) можно искать в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(u_k^{(1)}(y)X_k^{(1)}(x) + u_k^{(2)}(y)X_k^{(2)}(x)\right). \tag{40}$$

Покажем, что при определенных условиях на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ряд (40) сходится равномерно в области $\overline{D}$ и его там можно почленно дифференцировать по x и y, и дважды дифференцировать по x и y в $\overline{D_i}$, $i=\overline{1,4}$.

Исходя из формул (24), (26), (27), рассмотрим следующие отношения:

$$A_k(y) = \sqrt{y}\,\Delta_k^{(1)}(\alpha,y)/\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta),\quad B_k(y) = \sqrt{y}\,M_k(y,\beta)/\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta),\quad y \in [0,\beta],$$

$$C_k(y) = \sqrt{-y}\, N_k(\alpha, -y)/\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta), \quad D_k(y) = \sqrt{-y}\, \Delta_k^{(1)}(-y, \beta)/\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta), \quad y \in [-\alpha, 0].$$

Далее через P_i будем обозначать положительные постоянные.

Используя асимптотические формулы (32) и (37), легко доказать следующие утверждения.

Лемма 4. *При выполнении условия* (38) *для достаточно больших* k *справедливы следующие оценки:*

$$|A_k(y)| \le P_1, \quad |A_k'(y)| \le P_1\, k, \quad |A_k''(y)| \le P_1\, k^2,$$

$$|B_k(y)| \le P_2 k^{1/2-\lambda}, \quad |B_k'(y)| \le P_2 k^{1/2+\lambda}, \quad |B_k''(y)| \le P_2 k^{5/2-\lambda}, y \in [0, \beta],$$

$$|C_k(y)| \le P_3 k^{1/2+\lambda} e^{-kd}, \quad |C_k'(y)| \le P_3 k e^{-kd}, \quad |C_k''(y)| \le P_3 k^{5/2+\lambda} e^{-kd},$$

$$|D_k(y)| \le P_4 k^{1/2+\lambda}, \quad |D_k'(y)| \le P_4 k^{1+\lambda}, \quad |D_k''(y)| \le P_4 k^{5/2+\lambda}, y \in [-\alpha, 0],$$

где $d = \pi\beta_q$, $\lambda = 1/(2q)$.

Такие же оценки справедливы и для аналогичных отношений из (25).

Лемма 5. *Пусть выполнена оценка* (38). *Тогда при любом* $y \in [-\alpha, \beta]$ *для достаточно больших* k *справедливы оценки*

$$|u_k^{(1)}(y)| \le P_5 k^{1/2+\lambda}(|\varphi_k| + |\psi_k|), \quad |(u_k^{(1)}(y))'| \le P_6 k(|\varphi_k| + k^{\lambda}|\psi_k|),$$

$$|(u_k^{(1)}(y))''| \le P_7 k^{5/2+\lambda}(|\varphi_k| + |\psi_k|).$$

Аналогичное утверждение справедливо и для $u_k^{(2)}(y)$ и ее производных. Доказательство лемм 4 и 5 проводится аналогично работе [15].

Из леммы 5 следует, что ряд (40) и его производные первого порядка в $\overline{D}$, а производные второго порядка в $\overline{D_i}$, $i = \overline{1, 4}$, мажорируются числовым рядом

$$P_8 \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2+\lambda}(|\varphi_k| + |\psi_k|)\,. \tag{41}$$

Лемма 6. *Если* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^1[-1, 1] \cap C^3[-1, 0] \cap C^3[0, 1]$ *и на этих сегментах имеют кусочно-непрерывные четвертые производные, причем* $\varphi(\pm 1) = \varphi''(\pm 1) = 0$, $\psi(\pm 1) = \psi''(\pm 1) = 0$, $\varphi''(+0) = -\varphi''(-0)$, $\varphi'''(+0) = -\varphi'''(-0)$, $\psi''(+0) = -\psi''(-0)$, $\psi'''(+0) = -\psi'''(-0)$, *то справедливы соотношения*

$$\varphi_k^{(1)} = \frac{p_k^{(1)}}{\mu_k^4}\,, \quad \varphi_k^{(2)} = \frac{p_k^{(2)}}{\mu_k^4}\,, \quad \psi_k^{(1)} = \frac{q_k^{(1)}}{\mu_k^4}\,, \quad \psi_k^{(2)} = \frac{q_k^{(2)}}{\mu_k^4}\,,$$

где $p_k^{(j)} = \int\limits_{-1}^{1} \varphi^{IV}(x) Z_k^{(j)}(x) dx$, $q_k^{(j)} = \int\limits_{-1}^{1} \psi^{IV}(x) Z_k^{(j)}(x) dx$, $j = 1, 2$.

Тогда легко получить сходимость ряда (41) и равномерную сходимость ряда (40), а также рядов, полученных однократным дифференцированием но переменным x и y, в $\overline{D}$, а ряды из вторых производных сходятся равномерно в замкнутых областях $\overline{D}_i$, $i = \overline{1,4}$.

Если при указанных в леммах 2 и 3 числах α и β и некоторых $k = k_1, k_2, \ldots, k_l$, где $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_l \le k_0$, одно из выражений $\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta) = 0$ (пусть для определенности $\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) = 0$ при этих k_i, $\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta) \neq 0$), то для разрешимости системы (20) относительно $a_k^{(1)}$ и $b_k^{(1)}$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sqrt{\lambda}\varphi_{k_i}^{(1)} J_{1/(2q)}(\mu_{k_i}\alpha_q) + \sqrt{\beta}\psi_{k_i}^{(1)} I_{1/(2q)}(\mu_{k_i}\beta_q) = 0, \quad i = \overline{1,l}. \tag{42}$$

Тогда при $k = k_1, k_2, \ldots, k_l$ функции (16) примут вид:

$$Y_k^{(1)}(y) = \begin{cases} Y_{k,+}^{(1)}(y) = \dfrac{\sqrt{y} I_{1/(2q)}(\mu_k y_q)}{\sqrt{\beta} I_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q)} - C_k \sqrt{y} \dfrac{M_k(y, \beta)}{I_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q)} \,, & y > 0, \\ Y_{k,-}^{(1)}(y) = -\dfrac{\sqrt{-y} J_{1/(2q)}(\mu_k (-y)_q)}{\sqrt{\beta} I_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q)} + C_k \sqrt{-y} \dfrac{\Delta_k^{(1)}(-y, \beta)}{I_{1/(2q)}(\mu_k \beta_q)} \,, & y < 0, \end{cases} \tag{43}$$

где C_k – произвольная постоянная.

Поэтому решение задачи (2)-(5) в этом случае определяется в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{k_1 - 1} + \sum_{k=k_1+1}^{k_2 - 1} + \cdots + \sum_{k=k_{l-1}+1}^{k_l - 1} + \sum_{k=k_l+1}^{\infty} \right) u_k^{(1)}(y) X_k^{(1)}(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(2)}(y) X_k^{(2)}(x) + \sum_{k=k_1, k_2, \ldots, k_l} \tilde{u}_k(x, y) \,, \tag{44}$$

где $\tilde{u}_k(x, y)$ определяются формулой

$$\tilde{u}_k(x, y) = \begin{cases} X_{k,+}^{(1)}(x) Y_{k,+}^{(1)}(y), & (x, y) \in D_1 \,, \\ X_{k,+}^{(1)}(x) Y_{k,-}^{(1)}(y), & (x, y) \in D_2 \,, \\ X_{k,-}^{(1)}(x) Y_{k,-}^{(1)}(y), & (x, y) \in D_3 \,, \\ X_{k,-}^{(1)}(x) Y_{k,+}^{(1)}(y), & (x, y) \in D_4 \,, \end{cases}$$

$X_{k,\pm}^{(1)}(x)$ задаются формулой (10), $Y_{k,\pm}^{(1)}(y)$ – формулой (43), конечные суммы считаем равными нулю, если нижний предел суммирования больше верхнего.

Аналогичное решение строится в случае, когда при некоторых k будет $\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta) = 0$, $\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) \neq 0$, или если оба знаменателя обращаются в нуль.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 6 и выполнены оценки (38), (39) при $k > k_0$. Тогда если при указанных в леммах 2 и 3 значениях α и β при всех $k = \overline{1, k_0}$ выполнены условия (22), (23), то существует единственное решение задачи (2)-(5) и оно определяется рядом (40).*

Если $\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \ldots, k_l \le k_0$, и $\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta) \neq 0$ при всех $k = \overline{1, k_0}$, то задача (2)-(5) разрешима только тогда, когда выполнены условия (42), и решение определяется в виде суммы ряда (44).

Литература

1. Сабитов К.Б., Биккулова Г.Г., Гималтдинова А.А. К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа / Уфа: Гилем, 2006. – 150 с.
2. Rassias J.M. The exterior Tricomi and Frankl problems for quaterelliptic-quatergiperbolic equations with eight parabolic lines // European journal of pure and applied mathematics. – 2011. – 4, №2. – P.186-208.
3. Шабат Б.В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // ДАН СССР. – 1957. – 112, №3. – С.386-389.
4. Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinious coefficient // Ann. math. pure and appl. – 1963. – 62. – P.371-377.
5. Нахушев А.М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. – 1970. – 6, №1. – С.190-191.
6. Хачев М.М. О задаче Дирихле для одного уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. – 1976. – 12, №1. – С.137-143.
7. Солдатов А.П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. I, II // Докл. РАН. – 1993. – 332, №6. – С.696-698; 333, №1. – С. 16-18.
8. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. – 2007. – 413, №1. – С.23-26.
9. Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2013. – 49, №1. – С.68-78.
10. Ильин В.А. Единственность и принадлежность W_2^1 классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения // Мат. заметки. – 1975. – 17,№1. – С.91-101.
11. Арнольд В.И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. – 1961. – 25. – С.21-86.
12. Ломов И.С. Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1993. – 29, №12. – С.2079-2089.
13. Ломов И.С. Негладкие собственные функции в задачах математической физики // Дифференц. уравнения.2011. – 47,№3. – С.358-365.
14. Гималтдинова А.А. О полноте системы собственных функций дифференциального оператора с разрывным коэффициентом // Труды междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы»: в 2-х т. (26-30 июня 2013 г., г. Стерлитамак). – Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. – Т.1. – С.39-47.
15. Сабитов К.Б., Сидоренко О.Г. Задача с условиями периодичности для вырождающегося уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. – 2010. – 46, №1. – С.105-113.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / М., 1966. – 296 с.

DIRICHLET's PROBLEM FOR A MIXED TYPE EQUATION WITH TWO PERPENDICULAR TRANSITION LINES IN RECTANGULAR DOMAIN

A.A. Gimaltdinova

Samara State Academy of Social Sciences and Humanities,
M.Gorky, 65/67, Samara, 443099, Russia, e-mail: alfiragimaltdinova@mail.ru

Abstract. First boundary-value problem for an equation of elliptic-hyperbolic type with two perpendicular lines of internal power and burst degeneration is studied. Uniqueness criterion of solution is proved by spectral analysis. The solution is built as the Fourier-Bessel sum.