MSC 35K45, 65M32

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

С.Г. Пятков, Е.И. Сафонов

Югорский Государственный Университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск, 628012, Россия, e-mail: s_pyatkov@ugrasu.ru;
dc.gerz.hd@gmail.com

Аннотация. В работе рассмотрены вопросы корректности линейных обратных задач для параболических уравнений и систем. По интегральным условиям переопределения вместе с решением восстанавливается правая часть системы. Доказаны теоремы существования и единственности решений в классах Соболева. Показано, что подходящем выборе интегральных условий переопределения возможен предельный переход по параметру и предельное решение – решение обратной задачи, где условия переопределения – значения решения в отдельных точках.

Ключевые слова: параболическая система, обратная задача, задача управления, краевая задача, корректность.

Введение

Мы рассматриваем вопрос об определении вместе с решением правой части специального вида в параболических уравнениях и системах. Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса C^{2m} и $Q = G \times (0,T)$. Параболическое уравнение имеет вид

$$u_t + A(t,x,D)u = \sum_{i=1}^{r} b_i(t,x)q_i(t) + f\,, \quad (t,x) \in Q\,, \tag{1}$$

где A – матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размерности $h \times h$, представимый в виде

$$A(t,x,D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(t,x)D^\alpha\,, \ D = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_n})\,.$$

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(t,x)D^\beta u|_S = g_j(t,x)\,, \tag{2}$$

где $m_j < 2m$, $j = 1,2,\ldots,m$ и $S = (0,T) \times \Gamma$. Неизвестными в (1), (2) являются решение u и функции $q_i(t)$ $(i = 1,2,\ldots,r)$, входящие в правую часть (1). Мы рассматриваем 2 вида условий переопределения. В первом случае условия переопределения имеют вид

$$\int_{G_i} u\varphi_i(x)dx = \psi_i(t)\,, \quad i = 1,2,\ldots,s\,, \tag{3}$$

где $\varphi_i(x), \psi_i(t)$ – некоторые гладкие функции, условия па которые мы уточним ниже, и $G_i \subset G$ некоторые области. Во втором случае рассматриваем условия вида

$$u(x_i, t) = \psi_i(t)\,,\ x_i \in G\,,\quad i = 1, 2 \ldots, s\,. \tag{4}$$

Параметры s, r связаны равенством $r = sh$. Задача о нахождении функций u, q_i с использованием краевых условий и условий переопределения может быть сформулирована и как некоторая задача управления. Обратные задачи подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях ([1]- [4]). Одной из моделей, возникающей при описании процессов тепломассопереноса, является система уравнений Навье-Стокса, дополненная уравнениями для температуры и концентраций переносимых веществ. По данным измерений на сечениях канала или некоторым другим характеристикам определяются те или иные параметры в задаче. Это или коэффициенты уравнений или плотности источников (правая часть) (см., например, [1], [4]- [9]). В простейших случаях при описании процессов тепломассопереноса используются параболические уравнения и системы. В литературе рассматривались как условия переопределения вида (3) так и условия переопределения (4). В частности обратные задачи об определении коэффициентов уравнения (1), зависящих от переменной t, с условием переопределения (3), где $r = 1$ и $G_i = G$, рассматривались в [10]- [16]. Соответственно линейные обратные задачи об определении правой части исследовались в [9, 17]. Аналогично, как линейные так и коэффициентные обратные задачи с условием переопределения (4) рассматривались в [8, 18] и в ([19]- [21]) соответственно. Однако, отметим, что большинство работ посвящено модельным уравнениям и случаю $n = 1$. Можно отметить работы [22, 23] одного из авторов, где были рассмотрены задачи вида (1), (2), (4) в общей постановке. Мы также сошлемся на монографии [2, 10, 18, 24, 25], где имеется большое количество постановок обратных задач для параболических уравнений и систем, и ряд результатов.

В настоящей работе, при определенных естественных условиях па данные задачи мы показываем, что задача (1)-(3) имеет единственное решение. Далее, выбирая подходящим образом функции $\varphi_i = \varphi_i(x, \varepsilon)$, зависящее от параметра $\varepsilon > 0$ (фактически мы строим приближение δ-функции Дирака, см. ниже), мы показываем, что решение u_ε задачи (1)-(3) сходится к решению задачи (1), (2), (4) при $\varepsilon \to 0$. Теоремы подобного рода важны при построении численных алгоритмов построения решений задач вида (1), (2), (4), поскольку для этих задач приходится вычислять производные высокого порядка для приближенных решений, что является некорректной задачей, и по этим причинам иногда возникают и излишние условия па коэффициенты уравнения (см., например, [8]). Опишем содержание работы. В следующем параграфе мы приводим вспомогательные утверждения и условия па данные. В параграфе 2 мы формулируем и доказываем наши основные утверждения – теоремы 2.1, 2.2, 2.4.

1. Определения и вспомогательные результаты

Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство сильно измеримых функций, определенных на G со значениями в

E и конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ [26]. Мы также используем пространства $C^k(\overline{G})$, состоящие из функций, имеющих в G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение па замыкание $\overline{G}$. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G;E)$, $W_p^s(Q;E)$ и т.д. стандартные (см. [26, 27]). Если $E=\mathbb{C}$ или $E=\mathbb{C}^n$, то вместо $W_p^s(G;E)$ или $C^k(\overline{G};E)$ используем обозначения $W_p^s(G)$ или $C^k(\overline{G})$. Таким образом, включение $u\in W_p^s(G)$ (или $u\in C^k(\overline{G})$) для данной вектор-функции $u=(u_1,u_2,\dots,u_k)$ означает, что каждая из компонент u_i принадлежит пространству $W_p^s(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). В этом случае под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Будем считать, что аналогичное соглашение справедливо и для матриц, т.е. включение $a\in W_p^s(G)$ для данной матрицы-функции $a=\{a_{ij}\}_{j,i=1}^k$ означает, что $a_{ij}(x)\in W_p^s(G)$ для всех i,j. Для данного интервала $J=(0,T)$, положим $W_p^{s,r}(Q)=W_p^s(J;L_p(G))\cap L_p(J;W_p^r(G))$, Соответственно, $W_p^{s,r}(S)=W_p^s(J;L_p(\Gamma))\cap L_p(J;W_p^r(\Gamma))$. Через $\rho(x,M)$ обозначаем расстояние от точки x до множества M. Условие $\Gamma\in C^\alpha$ ($\alpha\geq 1$ означает, что для любой точки $x_0\in\Gamma$ найдется окрестность U (координатная окрестность) и система координат y (локальная система координат), полученная путем поворота и переноса начала координат из исходной, в которой

$$\overline{U}\cap G=\{y\in\mathbb{R}^n: y'\in\overline{B_r}, \omega(y')<y_n\leq\omega(y')+\delta\},$$

$$\overline{U}\cap(\mathbb{R}^n\setminus\overline{G})=\{y\in\mathbb{R}^n:\omega(y')-\delta\leq y_n<\omega(y')\},$$

$$\Gamma\cap\overline{U}=\{y\in\mathbb{R}^n: y'\in\overline{B_r},\ y_n=\omega(y')\},$$

где $y'=(y_1,y_2,\dots,y_{n-1})$, $B_r=\{y':\ |y'|<r\}$, $\delta>0$ – некоторая постоянная и $\omega\in C^\alpha(\overline{B_r})$. Без ограничения общности, считаем, что для локальной системы координат ось y_n направлена но нормали к Γ в точке x_0.

Условия согласования и гладкости. Фиксируем $p>n+2m$. Приведем, используемые ниже условия на данные задачи.

$$u_0(x)\in W_p^{2m-2m/p}(G),\quad g_j(x,t)\in W_p^{k_j,2mk_j}(S),\ k_j=1-\frac{m_j}{2m}-\frac{1}{2pm}, \tag{5}$$

где $j=1,2,\dots,m$.

$$f\in L_p(Q), \tag{6}$$

$$g_j(x,0)=B_j(x,0)u_0(x)|_{\partial G},\ j=1,2,\dots,m. \tag{7}$$

$$\psi_i(t)\in W_p^1(0,T),\ \psi_i(0)=\int\limits_{G_i}u_0(x)\varphi_i(x)dx,\ i=1,2,\dots,s, \tag{8}$$

$$\psi_i(t)\in W_p^1(0,T),\ \psi_i(0)=u_0(x_i),\ i=1,2,\dots,s. \tag{9}$$

Условия на коэффициенты операторов A,B_j более или менее стандартные. Более того, для простоты выкладок мы будем использовать не самые точные условия на коэффициенты. Мы считаем, что

$$\begin{gathered}a_\alpha(t,x)\in L_\infty(Q)\ (|\alpha|<2m),\quad a_\alpha\in C(\overline{Q})\ (|\alpha|=2m),\\ b_{j\beta}\in C^{2m-m_j}(\overline{S})\ (j=1,\dots,m,\ |\beta|\leq m_j),\end{gathered} \tag{10}$$

$$b_i(x,t) \in L_\infty(0,T;L_p(G)),\ i=1,2,\ldots,r, \tag{11}$$

Пусть $\{G_j\}$ – набор областей с границей класса C^1 вложенных в G. Мы будем использовать два вида условий на весовые функции $\{\varphi_j(x)\}$:

$$\operatorname{supp}\varphi_j \subset \overline{G_j},\ \varphi_j \in W_q^1(G_j) \qquad \left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1\right),\ j=1,2,\ldots,s, \tag{12}$$

$$\operatorname{supp}\varphi_j \subset G_j,\ \varphi_j \in L_1(G),\ j=1,2,\ldots,s. \tag{13}$$

При выполнении минимальных требований (13) нам понадобятся дополнительные условия на данные задачи Пусть $G_0 = \bigcup_{j=1}^s G_j$, $Q_0 = G_0 \times (0,T)$.

$$\nabla f \in L_p(Q_0),\ \nabla b_j \in L_\infty(0,T,L_p(G_0)), \tag{14}$$

$$\nabla u_0 \in W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G_0),\ \nabla a_\alpha(x,t) \in W_\infty^1(Q_0),\ (|\alpha| \le 2m). \tag{15}$$

Пусть $B_\rho(x)$ - шар радиуса ρ с центром в точке x. Найдется $\delta_0>0$ такое, что $B_{\delta_0}(x_i)\cap B_{\delta_0}(x_j)=\emptyset$ при $i\neq j$ и $B_{\delta_0}(x_i)\cap \partial G=\emptyset$ для всех $i,j=1,2,\ldots,r$. Положим $G^\delta=\bigcup_i B_\delta(x_i)$. В случае задачи (1)-(3) определим матрицу $B(t)$ размера $r\times r$, строки которой с номерами $(k-1)h+1,\ kh,\ (k=1,2,...,s)$ занимают матрицы размера $h\times r$ со столбцами $\int\limits_G b_1\varphi_k dx, ..., \int\limits_G b_r\varphi_k dx$. Можно показать, используя условия (11)-(12) (соответственно, (13), (14)) и теоремы вложения, что элементы этой матрицы принадлежит $L_\infty(0,T)$. В случае задачи (1)-(2), (4) мы будем дополнительно требовать, что выполнены условия (13), (10), где в качестве области G_0 берется δ-окрестность G^δ множества $\{x_j\}_{j=1}^s$ с $\delta<\delta_0$. В качестве матрицы B возьмем матрицу, строки которой с номерами $(k-1)h+1,\ kh,\ (k=1,2,...,s)$ занимают матрицы размера $h\times r$ со столбцами $b_1(x_k,t),...,b_r(x_k,t)$. Опять при выполнении условий (13), (10) элементы этой матрицы принадлежит $L_\infty(0,T)$. В обоих случаях мы требуем, чтобы существовала постоянная $\delta_0>0$ такая, что

$$|\det B(t)| \ge \delta_0, \quad \text{для п.в.} \quad t\in[0,T]\,. \tag{16}$$

Рассмотрим оператор: $A_0(t,x,D)=\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x,t)D^\alpha$ и предположим, что оператор $\partial_t + A_0$ параболичен, т.е. найдется постоянная $\delta_1>0$ такая, что любой корень p многочлена

$$\det\left(A_0(t,x,i\xi)+pE\right)=0,$$

(E – единичная матрица) удовлетворяет неравенству:

$$\operatorname{Re} p \le -\delta_1|\xi|^{2m},\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall(x,t)\in Q. \tag{17}$$

Условие Лопатинского запишется в виде: для любой точки $(t_0,x_0)\in S$ запишем операторы A_0, B_{j0} $(B_{j0}=\sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta}D^\beta)$ в локальной системе координат y и предположим, что система

$$\big(\lambda E + A_0(i\xi',\partial_{y_n})\big)v(z)=0,\quad B_{j0}(t_0,x_0)(i\xi',\partial_{y_n})v(0)=h_j\,, \tag{18}$$

($\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $y_n \in \mathbb{R}^+$, $j = 1, 2, \dots, m$) имеет единственное решение из $C(\overline{\mathbb{R}^+}; E)$ убывающее на бесконечности для всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg \lambda| \le \pi/2$ и $h_j \in E$ таких что $|\xi'| + |\lambda| \ne 0$.

Алгебраические условия, гарантирующие выполнение (18) могут быть найдены, например, в [28]. Положим $G_{\delta,i} = \{x \in G_i : \rho(x, \partial G_i) > \delta\}$, $Q^{\gamma}_{\delta,i} = G_{\delta,i} \times (0, \gamma)$, $G_\delta = \bigcup_{i=1}^{s} G_{\delta,i}$ и $Q_\delta = G_\delta \times (0, T)$, $Q^{\gamma}_{\delta} = G_\delta \times (0, \gamma)$ ($\delta \ge 0$), $Q^\gamma = G \times (0, \gamma)$.

Справедлива следующая теорема

Теорема 1.1. *Пусть G – ограниченная область с границей класса C^{2m}, выполнены условия (5), (10), (17), (18) и $k_j \ne 1/p$ для всех $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда если $g \in L_p(Q)$, то существует единственное решение $u \in W_p^{1,2m}(Q)$ задачи*

$$u_t + A(t, x, D_x)u = g\,, \quad u|_{t=0} = u_0(x)\,, \quad B_j u|_S = g_j\,, \tag{19}$$

удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} \le c\Big[\|g\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{W_p^{k_j,2mk_j}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)}\Big]\,, \tag{20}$$

где c – постоянная, не зависящая от данных задачи g, g_j, u_0 и решения u. Если дополнительно выполнено условие (15) и $\nabla g \in L_p(Q_0)$, то решение u обладает свойством $\nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta)$, $\forall \delta > 0$.

□ Первое утверждение – следствие из теоремы 10.4 в [28]. Получим второе утверждение. Покажем, что полученное решение обладает большей гладкостью в областях $Q_{\delta,j}$. Фиксируем $\delta_2 > \delta_1 > \delta$ (считаем, что δ_2 достаточно мало и таким образом $G_{\delta_2,j} \ne \emptyset$). Построим функцию $\psi_0(x) \in C_0^\infty(R^n)$; $\psi_0 \equiv 1$ в $G_{\delta_2,j}$ и $\psi_0 \equiv 0$ в $G \setminus G_{\delta_1,j}$. Положим $\Delta_i u = (u(x + e_i\eta) - u(x))/\eta$ (e_i – i-й координатный вектор), где $|\eta| < \delta - \delta_1$. Тогда функция $\tilde{v} = \psi_0(x)\Delta_i u$ есть решение задачи

$$\begin{gathered}\tilde{v}_t + A_0(t, x, D)\tilde{v} = \psi_0[A_0, \Delta_i]u + \psi_0\Delta_i g + [A_0, \psi_0]\Delta_i u + \\ + \psi_0\Delta_i((A_0 - A)(u + \Phi)), \\ B_r\tilde{v}|_S = 0 \;\; (r = 1, 2, \dots, m), \; \tilde{v}|_{t=0} = \psi_0(x)\Delta_i u_0.\end{gathered} \tag{21}$$

где $[A_0, \Delta_i] = A_0\Delta_i - \Delta_i A_0$, $[A_0, \psi] = A_0\psi - \psi A_0$ и т.д. (т.е. квадратные скобки обозначают соответствующий коммутатор). Тогда функция $\tilde{v}$ удовлетворяет оценке (20), где правая часть, граничные функции g_j и функция u_0 заменяются па выражения, входящие в правые части в (21), соответствующие нормы которых оцениваются постоянной не зависящей от параметра h. Используя лемму 4.6 главы 2 в [29], получим, что обобщенная производная $\partial_{x_i} v$ принадлежит $W_p^{1,2m}(Q_{\delta_2,j})$ и удовлетворяет оценке

$$\|v_{x_i}\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_2,j})} \le c_0\Big[\|\nabla g\|_{L_p(Q_0)} + \|\nabla u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G_0)} + \|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)}\Big]\,. \tag{22}$$

В силу произвольности δ_2, δ_1 и i, j заключаем, что $\nabla v \in W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1})$ для всех $\delta_1 > 0$. ■

Как следствие теоремы 1.1 имеем

Теорема 1.2. *Пусть G – ограниченная область с границей класса C^{2m}, выполнены условия* (10), (17), (18), $k_j \neq 1/p$ *для всех* $j = 1, 2, \ldots, m$ *и* $g \in L_p(Q^\gamma)$ $(\gamma \in (0, T])$. *Тогда существует единственное решение* $u \in W_p^{1,2m}(Q^\gamma)$ *задачи*

$$u_t + A(t, x, D_x)u = g, \quad u|_{t=0} = 0, \quad B_j u|_S = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, m)\,, \tag{23}$$

удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q^\gamma)} \leq c\|g\|_{L_p(Q^\gamma)}\,, \tag{24}$$

где c – постоянная, не зависящая от γ.

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2 и условия* (15) *на коэффициенты a_α. Тогда решение u задачи* (23) *при фиксированном $\delta_1 > 0$ удовлетворяет оценке*

$$\|\nabla u\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^\gamma)} \leq c(\|g\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|\nabla g\|_{L_p(Q_0^\gamma)})\,, \tag{25}$$

где постоянная c не зависит от γ.

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (5)-(8), (10)-(12), (16)-(18). *Тогда существует единственное решение* $(u, q_1, .., q_r)$ *задачи* (1)-(3) *такое, что*

$$u \in W_p^{1,2m}(Q), \ q_i(t) \in L_p(0, T)\,, \quad i = 1, 2, ..., r.$$

Решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \sum_{i=1}^{r} \|q_i(t)\|_{L_p(0,T)} \leq$$

$$c(\|f\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^{s} \|\psi_i\|_{W_p^1(0,T)})\,.$$

□ Продолжим граничные данные внутрь области, построив функцию $\Phi \in W_p^{1,2m}(Q)$ такую, что $\Phi|_{t=0} = u_0(x)$, $B_j\Phi|_S = g_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. В качестве функции Φ возьмем решение задачи (19) (см. теорему 1.1), где $g = f$. Тогда, если u решение задачи (1)-(3), то функция $v = u - \Phi$ есть решение задачи

$$v_t + Av = \sum_{i=1}^{r} f_i(t, x)q_i(t)\,, \quad v|_{t=0} = 0, \quad B_j v|_S = 0\,, \ j = 1, 2, ..., m\,, \tag{26}$$

$$\int_G v\varphi_i dx = \psi_i - \int_G \Phi\varphi_i dx = \tilde{\psi}_i \in W_p^1(0, T)\,. \tag{27}$$

Интегрируем (26) с весом φ_i и используем (27). Имеем

$$\int_G \varphi_i(x) v_t dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_G \varphi_i(x) v(x,t) dx = \tilde{\psi}_{it} \,,$$

$$\tilde{\psi}_{it} + \int_G \varphi_i A v dx = \sum_{j=1}^{r} q_j \int_G \varphi_i f_j(t,x) dx \,, \quad i = 1, 2, \ldots, s \,. \tag{28}$$

На равенство можно смотреть как па уравнение для нахождения функций $q_i(t)$. Действительно, пусть B – матрица, определенная после формулы (15). Правая часть (28) записывается в виде $B\vec{q}$, $\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_r)$. Равенство (28) перепишется в виде

$$B\vec{q} = \vec{\psi} + R(\vec{q}) \,, \tag{29}$$

где компоненты векторов $R(\vec{q})$, $\vec{\psi}$ с номерами $(k-1)h+1,\ kh$, $(k = 1, 2, ..., s)$ занимают столбцы $\int_G \varphi_k A v dx$ и $\tilde{\psi}_{kt}$, соответственно, причем v решение задачи (26) и значит

$$v = (\partial_t + A)^{-1} \Big(\sum_{j=1}^{r} f_i q_i(t) \Big)$$

или

$$\vec{q} = B^{-1}\vec{\psi} + B^{-1} R(q) = \vec{\psi}_0 + R_0(\vec{q}) \,. \tag{30}$$

Покажем, что уравнение (30) разрешимо в $L_p(0,T)$. Получим оценки. Оценим $\|R_0 \vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)}$. По условию матрица B обратима, и в силу условия (16) имеем

$$\|R_0(\vec{q})\|_{L_p(0,\gamma)} \leq c_0 \|R(q)\|_{L_p(0,\gamma)} \leq \sum_{i=1}^{s} c_0 \| \int\limits_G A v \varphi_i dx \|_{L_p(0,\gamma)} \,. \tag{31}$$

Имеем $Au = A_0 v + A_1 v$, где $A_0 v = \sum\limits_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha v$ и $A_1 v = \sum\limits_{|\alpha|<2m} a_\alpha D^\alpha v$. При $|\alpha| \leq 2m-1$, получим

$$\Big| \int_G a_\alpha D^\alpha u \varphi_i \Big| \leq M \Big(\int_G |D^\alpha v|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_G |\varphi_i|^q dx \Big)^{\frac{1}{q}} \leq c \|u\|_{W_p^{2m-1}(G)} \,,$$

$$c = M \max_i \Big(\int_G |\varphi_i|^q dx \Big)^{\frac{1}{q}}, \quad M = \max_{|\alpha|<2m} \|a_\alpha(x,t)\|_{L_\infty(Q)} \,.$$

Таким образом,

$$\Big| \int_G A_1 v \varphi_i dx \Big| \leq c_1 \|v\|_{W_p^{2m-1}} \,. \tag{32}$$

Рассмотрим выражение $\int_G A_0 v \varphi_i dx$. Сюда входят слагаемые

$$\int_G a_\alpha(x,t) D^\alpha v \varphi_i dx dt = \int_{\Gamma_i} a_\alpha(x,t) D^{\alpha'} v \varphi_i n_k d\Gamma - \int_{G_i} (a_\alpha \varphi_i)_{x_k} D^{\alpha'} v dx \,,$$

где $D^\alpha v = \dfrac{\partial}{\partial x_k} D^{\alpha'} v$, n_k – координаты единичной внешней нормали к $\Gamma_i = \partial G_i$. Второй интеграл оценивается сверху

$$\int_{G_i} |a_\alpha|\,|D^{\alpha'} v|\,|\varphi_{ix_k}|dx + \int_{G_0} |a_{\alpha x_k}|\,|D^{\alpha'} v|\,|\varphi_i|dx \le$$

$$\le M\left(\int_{G_i} |D^{\alpha'} v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{G_i} |\varphi_{ix_k}|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} + M_1\left(\int_{G_i} (D^{\alpha'} v)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{G_i} \varphi_i^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, второй интеграл оценивается величиной $c_2\|v\|_{W_p^{2m-1}(G)}$. Оценим первый интеграл с использованием теорем о следах (см., например, [26, 28, 29])

$$\left|\int\limits_{\Gamma_i} a_\alpha D^{\alpha'} v \varphi_i n_k d\Gamma\right| \le M \int\limits_{\Gamma_i} |D^{\alpha'} v||\varphi_i n_k| d\Gamma \le M\left(\int_{\Gamma_i} |D^{\alpha'} v|^p d\Gamma\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Gamma_i} \varphi_i^q d\Gamma\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$c_3\|D^{\alpha'} v\|_{L_p(\Gamma_i)} \le c_4\|D^{\alpha'} v\|_{W_p^\beta(G_i)} \le c_5\|v\|_{W_p^{\beta+2m-1}(G_i)}, \quad 1 > \beta > \frac{1}{p}.$$

Из последних двух неравенств вытекает, что найдется постоянная c_6 такая, что

$$\left|\int_G A_0 v \varphi_i dx\right| \le c_6\|v\|_{W_p^{\beta+2m-1}(G)}. \tag{33}$$

Фиксируем β. Тогда из (32), (33) и интерполяционных неравенств (см. [26]) следует, что

$$\|R_0(q)\|_{L_p(0,\gamma)} \le c_7\|\|v\|_{W_p^{2m-1+\beta}(G)}\|_{L_p(0,\gamma)} \le c_8\|v\|^\theta_{L_p(0,\gamma;W_p^{2m}(G))}\|v\|^{1-\theta}_{L_p(0,\gamma;L_p(G))},$$

где $2m\theta + (1-\theta) = (2m-1+\beta)$. По теореме 1.2

$$\|v\|_{W_p^{1,2m}(Q^\gamma)} \le c_9\left\|\sum_{i=1}^r q_i f_i\right\|_{L_p(Q^\gamma)}. \tag{34}$$

Правая часть оценивается так:

$$\|q_i f_i\|^p_{L_p(Q^\gamma)} = \left(\int_0^\gamma \int_G |q_i|^p |f_i|^p dx dt\right) =$$

$$\int_0^\gamma |q_i|^p \int_G |f_i|^p dx dt \le \|f_i\|_{L_\infty(0,T;L_p(G))} \int_0^\gamma |q_i|^p dt \le c_{10}\|q_i\|^p_{L_p(0,\gamma)}. \tag{35}$$

Кроме того,

$$v(x,t) = \int\limits_0^t v_\tau(x,\tau)d\tau, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$\|v\|_{L_p(G)} \le \int\limits_0^t \|v_\tau(x,\tau)\|_{L_p(G)} d\tau \le \gamma^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^t \|v_\tau(x,\tau)\|^p_{L_p(G)} d\tau\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда получим, что

$$\|v\|_{L_p(Q^\gamma)} \le \gamma \|v_t\|_{L_p(Q^\gamma)} \,. \tag{36}$$

Используя (34)-(36) и приведенное выше неравенство для $\|R_0(q)\|$, получим

$$\|R_0(\vec{q})\|_{L_p(0,\gamma)} \le c_{11} \|\vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)} \gamma^{1-\theta} \,. \tag{37}$$

Таким образом, если $c_{11}\gamma^{1-\theta} \le q_0 < 1$, то уравнение (30) имеет единственное решение $\vec{q}$ из $L_p(0,\gamma)$ $\forall \vec{\psi}_0 \in L_p(0,\gamma)$. Возьмем

$$\vec{q}_0 = \begin{cases} \vec{q}, & t \in (0,\gamma)\,, \\ 0, & t \in [\gamma, 2\gamma] \end{cases}$$

и сделаем замену $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_0$ в (24). Тогда

$$\vec{q}_1 = R_0(\vec{q}_1) + c_0 - \vec{q}_0 + R_0(q_0) \,. \tag{38}$$

Если q_1 есть решение уравнения (38) на $[0, 2\gamma]$, то $q_1 - R_0(\vec{q}_1) = 0$ на $(0,\gamma)$ и по доказанному $q_1 = 0$ па $(0,\gamma)$. Имеем $q_1|_{[\gamma,2\gamma]} \in L_p(\gamma, 2\gamma)$. Оценим $\|R_0(\vec{q}_1)\|_{L_p(\gamma,2\gamma)}$. Как и ранее, получим оценку

$$\|R_0(\vec{q}_1)\|_{L_p(\gamma,2\gamma)} \le c \|\vec{q}_1\|_{L_p(\gamma,2\gamma)} \gamma^{1-\theta} \,,$$

где без ограничения общности считаем, что постоянная c совпадает с постоянной c_{11} из (37). Тогда уравнение (38) имеет единственное решение из $L_p(\gamma, 2\gamma)$. Функция $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_0$ есть решение (30) на промежутке $[0, 2\gamma]$. Повторяя рассуждения за конечное число шагов докажем, что уравнение (30) имеет единственное решение из $L_p(0,T)$.

Восстановим функцию v как решение уравнения (26). Покажем, что функция v есть решение нашей задачи. По построение $v|_{t=0} = 0$, $B_i v|_S = 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. Докажем, что $\int_G \varphi_i v dx = \tilde{\psi}_i(t)$. Интегрируем уравнение в (26) по G с весом φ_i. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_G \varphi_i v dx + \int_G A v \varphi_i dx = \sum_{j=1}^{r} q_j \int_G f_j \varphi_i dx \,.$$

Функции q_j удовлетворяют системе (28), вычитая i-е уравнение которой из предыдущего равенства получим, что $\left(\int\limits_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i\right)_t = 0$ или

$$\int_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i = (\int\limits_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i)|_{t=0} = 0 \,,$$

в силу условий согласования. Таким образом функция v есть решение нашей задачи. ■

Оценка из утверждения теоремы фактически была получена в процессе доказательства разрешимости обратной задачи.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (5)-(8), (10)-(11), (13)-(18). *Тогда существует единственное решение* $(u, q_1, .., q_r)$ *задачи* (1)-(3) *такое, что*

$$u \in W_p^{1,2m}(Q),\ q_i(t) \in L_p(0,T),\ i = 1, 2, ..., r,\ \nabla_x u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta)$$

для всех $\delta > 0$. *При фиксированном* $\delta > 0$ *решение удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \|\nabla_x u\|_{W_p^{1,2m}(Q_\delta)} + \sum_{i=1}^{r} \|q_i(t)\|_{L_p(0,T)} \le$$

$$c\Big(\|f\|_{L_p(Q)} + \|\nabla_x f\|_{L_p(Q_0)} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S)} +$$

$$+ \|u_0\|_{W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G)} + \|\nabla_x u_0\|_{W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G_0)} + \sum_{j=1}^{s} \|\psi_i\|_{W_p^1(0,T)}\Big).$$

□ Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство предыдущей теоремы. Единственное отличие в доказательстве - способ получения оценки для нормы оператора R_0. Приведем его. Оценим $\|R_0\vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)}$. Как и ранее имеем

$$\|R_0(\vec{q})\|_{L_p(0,\gamma)} \le c_0\|R(q)\|_{L_p(0,\gamma)} \le \sum_{i=1}^{s} c_0 \Big\| \int_G Av\varphi_i dx \Big\|_{L_p(0,\gamma)}.$$

В силу компактности множеств $\operatorname{supp}\varphi_j$, найдется $\delta_0 > 0$ такое, что $\operatorname{supp}\varphi_j \subset G_{\delta,j}$ для всех $\delta \ge \delta_0$ и для всех j. В силу условий на коэффициенты и теорем вложения [26],

$$\Big| \int_G Av\varphi_i dx \Big| = \Big| \int_{G_{\delta_0,j}} Av\varphi_i dx \Big| \le M \sum_{|\alpha|\le 2m} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(G_{\delta_0,j})} \|\varphi_j\|_{L_1(G)} \le$$

$$M_1 \sum_{|\alpha|\le 2m} \|D^\alpha v\|_{W_p^\beta(G_{\delta_0,j})} \le M_2 \|v\|_{W_p^{2m+\beta}(G_{\delta_0,j})}, \qquad \beta \in (n/p, 1).$$

Далее, используя интерполяционные неравенства [26], получим оценку для последней нормы

$$M_3 \|v\|^\theta_{W_p^{2m+1}(G_{\delta_0,j}))} \|v\|^{1-\theta}_{L_p(G)}, \qquad (2m+1)\theta = 2m + \beta\ .$$

Неравенство справедливо для всех j. Тогда

$$\|R_0(q)\|_{L_p(0,\gamma)} \le M_4 \|v\|^\theta_{L_p(0,\gamma; W_p^{2m+1}(G_{\delta_0}))} \|v\|^{1-\theta}_{L_p(0,\gamma;L_p(G))},$$

В силу оценки (36), имеем

$$\|R_0(q)\|_{L_p(0,\gamma)} \le M_5 \|v\|^\theta_{L_p(0,\gamma; W_p^{2m+1}(G_{\delta_0}))} \|v_t\|^{1-\theta}_{L_p(0,\gamma;L_p(G))} \gamma^{1-\theta},$$

Далее, в силу оценки из теорем 1.2, 1.3,

$$\|v\|_{L_p(0,\gamma;W_p^{2m+1}(G_{\delta_0}))} \leq c\sum_{i=1}^{r}\left(\|q_i\nabla_x f_i\|^p_{L_p(Q_0^\gamma)} + \|q_i f_i\|^p_{L_p(Q^\gamma)}\right),$$

где c – постоянная не зависящая от γ. Используя условия на функции f_i, $\nabla_x f_i$, как и при доказательстве теоремы 2.1, получим оценку

$$\|R_0(\vec{q})\|_{L_p(0,\gamma)} \leq M_4\|\vec{q}\|_{L_p(0,\gamma)}\gamma^{1-\theta}\,. \tag{39}$$

Это как раз и есть нужная нам оценка. Остальные рассуждения совпадают с рассуждениями из предыдущей теоремы. ■

Рассмотрим задачу (1), (2), (4). Фиксируем $\delta_1 < \delta_0$ (постоянная δ_0 была определена после формулы (15)) и возьмем в качестве областей G_j шары $B_{\delta_1}(x_j)$. Как и ранее, $G_0 = \bigcup_{i=1}^{s} G_j$. Мы воспользуемся теоремой 2.3 из [30] в соответствии с которой:

Теорема 2.3. *При выполнении условий* (5)-(7), (9)-(11), (14)-(18) *существует единственное решение задачи* (1), (2), (4) *такое, что* $\vec{q} \in L_p(0,T), u \in W_p^{1,2m}(Q), \nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta)$, $\forall\delta > 0$.

□ Предположим, что выполнены условия теоремы 2.3. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(B_1)$ $(B_1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < 1\}$ такую, что $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx = 1$ и $\varphi(x) \geq 0$ для всех x. Определим $\varphi_{j\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n}\varphi([x-x_j]/\varepsilon)$. Имеем

$$\|\varphi_j\|_{L_1(G)} = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_{j\varepsilon}(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\Big(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\Big)dx = 1\,.$$

Введем $r_{j\varepsilon} = \int_G \varphi_{j\varepsilon}(x)u_0(x)\,dx - u_0(x_j)$. В силу теорем вложения и условий на функцию u_0, легко увидеть, что найдется постоянная $M > 0$ такая, что $|r_{j\varepsilon}| \leq M\varepsilon$ для всех j. Рассмотрим задачу (1)-(3), где $\varphi_j = \varphi_{j\varepsilon}$, $\varepsilon < \delta_1$, $G_j = B_{\delta_1}(x_j)$, а в качестве функций ψ_j возьмем функции $\psi_{j\varepsilon} = \psi_j(t) + r_{j\varepsilon}$. По построению и в силу условий (9),

$$\psi_{j\varepsilon}(0) = \int_G \varphi_{j\varepsilon}u_0(x)\,dx\,.$$

Решение этой задачи (1)-(3) (оно существует и обладает свойствами указанными в теореме 2.2) обозначим через u_ε, $\vec{q}_\varepsilon = (q_1^\varepsilon,...,q_r^\varepsilon)$, а решение задачи (1), (2), (4) через $u, \vec{q} = (q_1,...,q_r)$. ■

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3. *Тогда*

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} \to 0 \ \ \textit{при} \ \ \varepsilon \to 0.$$

□ Введем функции $v = u - \Phi$ и $v_\varepsilon = u_\varepsilon - \Phi$ (функция Φ была построена в доказательстве теоремы 2.1). Функции v и v_ε есть решения задач

$$v_{\varepsilon t} + Av_\varepsilon = \sum_{i=1}^{r} q_i^\varepsilon f_i\,, \quad v_\varepsilon|_{t=0} = 0\,, \quad B_j v_\varepsilon|_S = 0, \quad j = 1,2,...,m\,, \tag{40}$$

$$v_t + Av = \sum_{i=1}^{r} q_i f_i\,, \quad v|_{t=0} = 0\,, \quad B_j v|_S = 0\,, \quad j = 1, 2, ..., m\,. \tag{41}$$

Выполнены условия

$$v(x_j, t) = \psi_j - \Phi(x_j, t)\,, \tag{42}$$

$$\int_G v_\varepsilon \varphi_{j\varepsilon} dx = \psi_{j\varepsilon} - \int_G \Phi \varphi_{j\varepsilon}(x) dx\,. \tag{43}$$

В силу теоремы 1.1, $\nabla\Phi \in W_q^{1,2m}(Q_\delta)$, $\forall\delta > 0$. Фиксируем $\delta \in (0, \delta_1)$ и считаем, что $\varepsilon < \delta_1 - \delta$. Обозначим $\omega_\varepsilon = v - v_\varepsilon$ и $a_i^\varepsilon = q_i - q_i^\varepsilon$. Вычитая (40) и (41), а также (42), (43), получим

$$\omega_{\varepsilon t} + A\omega_\varepsilon = \sum_{i=1}^{r} a_i^\varepsilon f_i\,, \quad v_\varepsilon|_{t=0} = 0\,, \quad B_j v_\varepsilon|_S = 0\,, \quad j = 1, 2, ..., m,$$

$$\int\limits_G \omega_\varepsilon \varphi_{j\varepsilon} dx = \int\limits_G (v(x,t) - v(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon} dx + \int_G (\Phi - \Phi(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}(x) dx - r_{j\varepsilon}\,.$$

По теореме 2.2 справедлива оценка

$$\|\omega_\varepsilon\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \sum_{i=1}^{r} \|a_i^\varepsilon\|_{L_p(0,T)} \le c\Big(\sum_{j=1}^{s} \Big\| \int_G (v - v(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon} dx \Big\|_{W_p^1(0,T)} + \\ \sum_{j=1}^{s} \Big\| \int_G (\Phi - \Phi(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}(x) dx \Big\|_{W_p^1(0,T)}\Big) \; + \; M_1\varepsilon\,. \tag{44}$$

Рассмотрим второе слагаемое

$$\sum_{j=1}^{s} \Big\| \int_G (\Phi - \Phi(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}(x) dx \Big\|_{W_p^1(0,T)}\,.$$

Используя теоремы вложения, оценим, например,

$$J_j = \Big\| \int\limits_G (\Phi_t(x,t) - \Phi_t(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}(x) dx \Big\|_{L_p(0,T)}\,.$$

При $\alpha = 1 - n/p$ справедливы оценки

$$\Big| \int_{G_j} (\Phi_t(x,t) - \Phi_t(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}(x) dx \Big| \le \sup_{x\in B_\varepsilon(x_j)} |\Phi_t(x,t) - \Phi_t(x_j,t)| \cdot \int_{G_j} |\varphi_{j\varepsilon}(x)| dx \le$$

$$\varepsilon^\alpha \sup_{x\in B_\varepsilon(x_j)} \frac{|\Phi_t(x,t) - \Phi_t(x_j,t)|}{|x - x_j|^\alpha} \le \varepsilon^\alpha \sup_{x,y\in G_\delta} \frac{|\Phi_t(x,t) - \Phi_t(x_j,t)|}{|x - x_j|^\alpha} \le \varepsilon^\alpha \|\Phi_t\|_{C^\alpha(G_\delta)}\,.$$

Так как $\|\Phi_t\|_{C^\alpha(G_\delta)} \le c\|\Phi_t\|_{W_p^1(G_\delta)}$, то окончательная оценка будет иметь вид

$$J_j \le c_1 \varepsilon^\alpha \|\Phi_t\|_{L_p(0,T;W_p^1(G_\delta))}\,,$$

где постоянная c_1 не зависит от ε, j. Аналогично оцениваем выражение $\| \int_G (\Phi(x,t) - \Phi(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}(x)dx\|_{L_p(0,T)}$. Тогда справедлива оценка

$$\left\| \int_G (\Phi - \Phi(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}dx \right\|_{W_p^1(0,T)} \le c_2\varepsilon^\alpha \left(\|\Phi_t\|_{L_p(0,T;W_p^1(G_\delta))} + \|\Phi\|_{L_p(0,T;W_p^1(G_\delta))}\right),$$

Рассмотрим второе слагаемое $\int_G (v - v(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}dx$. Совершенно аналогично имеем оценку:

$$\left\| \int_G (v - v(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}dx \right\|_{W_p^1(0,T)} \le c_3\varepsilon^\alpha (\|v_t\|_{L_p(0,T;W_p^1(G_\delta))} + \|v\|_{L_p(0,T;W_p^1(G_\delta))}),$$

где постоянная c_3 не зависит от ε, j. Ввиду (44), окончательная оценка имеет вид

$$\|\omega_\varepsilon\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \sum_{i=1}^{r} \|a_i^\varepsilon\|_{L_p(0,T)} \le c_4\varepsilon^\alpha ,$$

где постоянная c_4 не зависит от ε. ■

Заключение. Приведенные выше рассуждения достаточно конструктивны и полученные результаты и способы нахождения решений могут быть использованы при построении численных алгоритмов решений как задачи (1)-(3) так и задачи (1), (2), (4). По сути в теореме 2.1 показано, что при любой начальной функции метод последовательных приближений, примененный при построении решений системы (30), сходится.

Литература

1. Алексеев Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики / М.: Научный мир, 2010.
2. Belov Ya.Ya. Inverse problems for parabolic equations / Utrecht: VSP, 2002.
3. Levandowsky M., Childress W.S., Hunter S.H., Spiegel E.A. A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms // J. Protozoology. – 1975. – 22. – P.296-309.
4. Capatina A., Stavre R. A control problem in biconvective flow // J. Math. Kyoto Univ. – 1997. – 37; №4. – P.585-595.
5. Алексеев Г.В., Калинина Е.А. Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции // Сиб. жур. индустриальной математики. – 2007. – 10; №1(29). – С.3-16.
6. Alekseev G.V. Coefficient Inverse Extremum Problems for Stationary Heat and Mass Transfer Equations // Comp. Math. and Math. Phys. – 2007. – 47; №6. – P.1007-1028.
7. Babeshko O.M., Evdokimova O.V., Evdokimov S.M. On taking into account the types of sources and settling zones of pollutants // Dokl. Math. – 2000. – 61; №2. – P.283-285.
8. Калинина Е.А. Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии // Дальневосточный матем. жур. – 2004. – 5; №1. – С.89-99.

9. Криксин Ю.А., Плющев С.Н., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф. Обратная задача восстановления плотности источника для уравнения конвекции-диффузии // Матем. моделирование. – 1995. – 7; №11. – С.95-108.
10. Iskenderov A.D., Akhundov A.Ya. Inverse problem for a linear system of parabolic equations // Doklady Mathematics. – 2009. – 79; №1. – P.73-75.
11. Ismailov M.I., Kanca F. Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data // Inverse Problems In Science and Engineering. – 2012. – 20, № 24. – P.463-476.
12. Ivanchov M.I. Inverse problem of simulataneous determination of two coefficients in a parabolic equation // Ukrainian Math. J. – 2000. – 52; №3. – P.379-387.
13. Li Jing, Xu Youjun An inverse coefficient problem with nonlinear parabolic equation // J. Appl. Math. Comput. – 2010. – 34. – P.195-206.
14. Kamynin V.L., Franchini E. An inverse problem for a higher-order parabolic equation // Mathematical Notes. – 1998. – 64; №5. – P.590-599.
15. Kerimov N.B., Ismailov M.I. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2012. – 396. – P.546-554.
16. Кожанов А.И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени // Ж. Вычисл. Матем. и матем. физ. – 2005. – 45; №12. – С.2168-2184.
17. Vasin I.A., Kamynin V.L. On the asymptotic behavior of solutions to inverse problems for parabolic equations // Siberian Mathematical Journal. – 1997. – 38; №4. – P.647-662.
18. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics / New-York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
19. Tryanin A.P. Determination of heat-transfer coefficients at the inlet into a porous body and inside it by solving the inverse problem // Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal. – 1987. – 52; №3. – P.469-475.
20. Dehghan M., Shakeri F. Method of lines solutions of the parabolic inverse problem with an overspecification at a points // Numer Algor. – 2009. – 50; №4. – P.417-437.
21. Dehghan M. Numerical computation of a control function in a partial differential equation // Applied mathematics and computation. – 2004. – 147. – P.397-408.
22. Pyatkov S.G., Samkov M.L. On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations // Sib. Adv. in Math. – 2012. – 22; №4. – P.287-302.
23. Pyatkov S.G. On some classes of inverse problems for parabolic equations // J. Inv. Ill-Posed problems. – 2011. – 18; №8. – P.917-934.
24. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type // Math. Studies. Monograph Series. – 2003. – 10.
25. Кабанихин С.И. Обратные и некоректные задачи / Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
26. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / М.: Мир, 1980.
27. Amann H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // Glasnik matematicki. – 2000. – 35(55). – P.161-177.
28. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / М.: Наука, 1967.
29. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / М.: Наука, 1973.
30. Pyatkov S.G., Tsybikov B.N. On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations // J. Evol. Equat. – 2011. – 11. – P.155-186.

ON SOME CLASSES OF LINEAR INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC SYSTEMS OF EQUATIONS

S.G. Pyatkov, E.I. Safonov

Yugra State University,
Chekhov St., 16, Khanty-Mansiysk, 628012, Russia, e-mail: s_pyatkov@ugrasu.ru,
dc.gerz.hd@gmail.com

Abstract. Some questions that concerned the well-posedness of some linear inverse problems connected with parabolic equations and systems are examined. Both solutions and right-hand sides of systems are recovered under some integral overdetermination conditions. Uniqueness and existence theorems are proved in the Sobolev classes. It is demonstrated that for an appropriate choice of integral overdetermination conditions it is possible to pass to the limit on a parameter and the limit solution is the solution to the inverse problem with the overdetermination conditions which are represented by values of the solution at some fixed points.

Key words: parabolic system, inverse problem, control problem, boundary value problem, well-posedness.