*Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 2. С. 176–182.*
*Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 2. P. 176–182.*

УДК 533.72
оригинальное исследование
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-176-182

# Влияние теплообмена и массообмена на фотофорез крупной высоковязкой капли в бинарной газовой смеси

**Ю. И. Шостак**

(*Статья представлена членом редакционной коллегии Н. В. Малай*)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 208015, Россия

E-mail: juliashostak@mail.ru

**Аннотация.** В квазистационарном приближении Стокса при малых теплом и диффузионном числах Пекле рассматривается влияние тепло- и массопереноса на фотофоретическое движение крупной высоковязкой сферической капли в бинарной газовой смеси при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности. Конвективные уравнения тепло-и массопереноса решались методом сращиваемых асимптотических разложений. Получены аналитические выражения и проведены численные оценки влияния тепло и массообмена на скорость фотофореза крупных высоковязких капель.

**Ключевые слова:** фотофорез испаряющихся капель, движение капель в поле электромагнитного излучения

**Для цитирования:** Шостак Ю. И. 2023. Влияние теплообмена и массообмена на фотофорез крупной высоковязкой капли в бинарной газовой смеси. Прикладная математика & Физика, 55(2): 176–182.
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-176-182

Original Research

# The Effect of Heat Transfer and Mass Transfer on the Photophoresis of a Large High-Viscosity Droplet in a Binary Gas Mixture

**Julia Shostak**

(*Article submitted by a member of the editorial board N. V. Malay*)

Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: juliashostak@mail.ru

**Abstract.** The effect of heat and mass transfer on the photophoretic motion of a large highly viscous spherical droplet in a binary gas mixture with small relative temperature differences in its vicinity is considered in the quasi-stationary Stokes approximation at small Pecle numbers. Convective heat and mass transfer equations were resolved by the method of asymptotic expansion. Analytical expressions were obtained and numerical estimates of the effect of heat and mass transfer on the photophoresis rate of large high-viscosity droplets were carried out.

**Keywords:** Photophoresis of Evaporating Droplets, the Movement of Droplets in the Field of Electromagnetic Radiation

**For citation:** Shostak Julia. 2023. The effect of heat transfer and mass transfer on the photophoresis of a large high-viscosity droplet in a binary gas mixture. Applied Mathematics & Physics, 55(2): 176–182.
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-176-182

**1. Введение.** Движении аэрозольных частиц в поле электромагнитного излучения называется фотофорезом, например, [1, 15, 16, 17, 18, 19, 21]. Это явление обусловлено действием сил молекулярного происхождения и связано с передачей аэрозольным частицам нескомпенсированного импульса молекулами газообразной среды [1, 19, 20, 21].

Фотофорез играет значительную роль в природе, например, в левитации и широко используется в производстве, медицине, сельском хозяйстве и т.д., например, см. в [1, 15, 16, 17].

В научной литературе имеется много работ, посвященных изучению этого явления (см., например, обзор [21] и ссылки в нем). В настоящей работе исследуется вопрос о влиянии на фотофорез высоковязких капель тепло- и массообмена.

**2. Постановка задачи.** В неограниченную и неподвижную бинарную газовую смесь с температурой $T_e$, средней массовой плотностью $\rho_e$, теплопроводностью $\lambda_e$, диффузией $D_{12}$ и средней вязкостью смеси $\mu_e$, помещается крупная высоковязкая сферическая капля радиусом $R$ с коэффициентом испарения $\alpha_0$, внутри которой действуют неоднородно распределенные по ее объему тепловые источники плотностью $q_i$. Рассматривается такой тип капель, когда можно пренебречь течением жидкости внутри них, т.е. в предположении, что вязкость жидкости велика по сравнению с вязкостью газовой смеси.

Компоненты смеси обозначим, соответственно, через $C_2 = n_2/n_e$, $C_1 = n_1/n_e$, $n_e = n_2 + n_1$, $\rho_e = \rho_1 + \rho_2$, $\rho_1 = n_1 m_1$, $\rho_2 = n_2 m_2$, где $n_1, n_2$ – численные концентрации первого и второго сорта бинарной смеси с массами $m_1, m_2$. Для определенности будем считать первый компонент газовой смеси $C_1$ по физико-химическому составу совпадающим с веществом капли и граничная поверхность для него является непрерывной; второй компонент – $C_2$ будем называть основным (несущим) и граничная поверхность для него является непроницаемой. Здесь и далее индексы "e" и "i" будем относить к газу и капле, индексом "s"– обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности капли $T_S$, а индексом "$\infty$ "– обозначены средние значения физических величин, характеризующие бинарную газовую среду вдали от капли.

В силу малости времен тепловой и диффузионной релаксации процесс тепло-и массообмена в системе капля-газ протекает квазистационарно. Движение капли происходит при малых числах Рейнольдса и Пекле. Внешние массовые силы не действуют. Циркуляция вещества внутри капли и силы межфазного поверхностного натяжения не рассматриваются (капля высоковязкая).

Задача решается в сферической системе координат ($y = r/R, \theta, \varphi$), начало которой совпадает с центром масс капли и таким образом, задача сводится к анализу обтекания испаряющейся капли бесконечным плоскопараллельным потоком в положительном направлении оси $Oz$, скорость которого $\mathbf{U}_\infty$ подлежит определению ($\mathbf{U}_\infty \| Oz$, $\mathbf{U}_\infty = -\mathbf{U}_p$, $\mathbf{U}_p$ – скорость движения капли).

Распределения скоростей, давлений, температур и относительной концентрации первого компонента бинарной газовой смеси (в силу симметрии задачи) зависят только от радиальной координаты $y$ и полярного угла $\theta$.

Задача рассматривается при малых относительных перепадах температуры в окрестности высоковязкой капли, коэффициенты молекулярного переноса (вязкость, теплопроводность, диффузия) и плотность бинарной газовой смеси считаются постоянными. Газ рассматривать как несжимаемую среду, а сама система газодинамических уравнений распадается при этом на гидродинамическую и конвективные уравнения тепло-массопереноса.

С учетом допущений решается система газодинамических уравнений (1)-(3) для среднемассовой скорости $\mathbf{U}_e(\mathbf{r})$, давления $P_e(\mathbf{r})$, относительной концентрации $C_1(\mathbf{r})$ и полей температур $T_e(\mathbf{r})$ и $T_i(\mathbf{r})$ вне и внутри капли с краевых условий (4)-(6) [5, 6, 8, 12]:

$$\mu_e \Delta \mathbf{U}_e = \nabla P_e, \quad \operatorname{div}(\rho_e \mathbf{U_e}) = 0, \tag{1}$$

$$\rho_e c_p (\mathbf{U}_e \nabla) T_e = \lambda_e \Delta T_e, \quad (\mathbf{U}_e \nabla) C_1 = D_{12} \Delta C_1, \tag{2}$$

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i}. \tag{3}$$

На бесконечности при $y \to \infty$ и конечность физических величин, характеризующих каплю при $y \to 0$, учтены в краевых условиях (4), (5), а на граничной поверхности, т.е. при $y = 1$ справедливы краевые условия (6)

$$\mathbf{U}_e = U_\infty \mathbf{n}_z, \quad T_e = T_\infty, \quad C_1 = C_{1\infty}, \quad P_e = P_\infty, \quad U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|, \tag{4}$$

$$T_i \neq \infty, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}
n_1 U_r^{(e)} - D_{12} \frac{n_e^2 m_2}{R \rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial y} = \alpha_0 \nu n_e \left[ C_{1s}^{(H)} + C_{1s}^* \delta T_i - C_1 \right], \\
n_2 U_r^{(e)} + D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{R \rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial y} = 0, \; U_\theta^{(e)} = K_{TS} \frac{\nu_e}{R T_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + K_{DS} \frac{D_{12}}{R} \frac{\partial C_1}{\partial \theta}, \\
T_e = T_i, \; -\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} + \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} = -L m_1 R \alpha_0 \nu n_e \left[ C_{1s}^{(H)} + C_{1s}^* \delta T_i - C_1 \right] - \sigma_0 \sigma_1 R \left( T_i^4 - T_\infty^4 \right), \\
C_{1s}^{(H)} = \left. \frac{n_{1s}^{(H)}}{n_e} \right|_{T_i = T_S}, \quad C_{1s}^* = \left. \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_{1s}^{(H)}}{\partial T_i} \right|_{T_i = T_S}, \quad \nu = \sqrt{k_B T_e / (2\pi m_1)}, \; y = r/R.
\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $U_r^{(e)}, U_\theta^{(e)}$ – компоненты массовой скорости $\mathbf{U}_e$, $L$ – удельная теплота испарения жидкости, $D_{12}$, $\lambda_e$– коэффициенты взаимной диффузии и теплопроводности газовой смеси, $\lambda_i$– коэффициент теплопроводности капли, $\sigma_0$– постоянная Стефана – Больцмана, $\sigma_1$– интегральная степень черноты, $\nu$ – одна четвертая средней арифметической скорости теплового движения газовых молекул первого сорта [6], $n_{1s}^{(H)}$– насыщенная концентрация молекул первого компонента бинарной газовой смеси, зависящая от средней температуры поверхности капли $T_i$, $K_{TS}$, $K_{DS}$– коэффициенты теплового и диффузионного скольжения [5, 10, 13] и при коэффициентах аккомодации по энергии и тангенциального импульса равных единицы $K_{TS} = 1.161$, $K_{DS} = 0.3$ [5, 10, 13]. Невозмущенные параметры ($T_\infty$, $P_\infty$, $C_{1\infty}$) наблюдаются в месте нахождения геометрического центра высоковязкой капли при ее отсутствии (величина $C_{1\infty}$ определяется через численные концентрации $n_1$ и $n_2$ газовых молекул).

В граничных условиях на поверхности высоковязкой капли учтено соответственно: непрерывность радиального летучего потока первого компонента через поверхность капли. Левая часть равна суммарному радиальному потоку первого компонента вне капли и представляет из себя сумму конвективного и диффузионного потоков. Правая же часть дает радиальный поток первого компонента, отводимый через слой Кнудсена с поверхности капли и пропорциональный коэффициенту испарения $\alpha_0$ жидкости капли. Вывод выражения для этого потока основан на том, что радиальный поток молекул пара определяется на основе статистических соображений и равен по величине $n_e \alpha_0 \nu \left( C_1^{(s)} - C_1 \right) \Big|_{y=1}$, где $C_1^{(s)}$– насыщенная относительная концентрация первого компонента, являющейся функцией температуры $T_i$ на поверхности капли, $\nu = \sqrt{k_B T_e / 2\pi m_1}$– одна четвертая абсолютной тепловой скорости молекул пара, $k_B$– постоянная Больцмана. Поскольку $C_1^{(s)} = C_1^{(s)}(T_i)$, то мы можем $C_1^{(s)}$ разложить в ряд по безразмерному числу Рейнольдса ($\varepsilon = Re = (\rho_e U_\infty R)/\mu_e \ll 1$) с удержанием линейных по этому параметров членов: $C_1^{(s)}(T_i) = C_{1s}^{(H)} + C_{1s}^* \delta T_i - C_1$, $\delta T_i$ находится из граничных условий на поверхности капли. Коэффициент испарения $\alpha_0$ – это отношение числа безвозвратно улетевших молекул пара к общему числу испускаемых молекул. В большинстве случаев принято приравнивать коэффициенты конденсации и испарения, пренебрегая термическим сопротивлением фазового перехода. Считают, что давление пара в слое неразреженной парогазовой бинарной смеси у поверхности равно давлению насыщения при температуре поверхности жидкости. Если вдали от жидкости газ не насыщен паром, то возникает поток вещества всегда направленный от поверхности испарения. При этом тепловой поток может быть направлен как к жидкости, так и к газу. Направление теплового потока зависит от разности температур поверхности испарения и парогазовой смеси. Многочисленные экспериментальные данные (в литературе имеются противоречивые сведения) показывают, что коэффициент испарения $\alpha_0 \leq 1$ [2, 4, 6]; следующее краевое условие учитывает тот факт, что поверхность капли непроницаема для второго компонента бинарной газовой смеси и в нем учтены радиальный конвективный и радиальный диффузионный потоки второй компоненты смеси; далее граничное условие отражает известные явления теплового и диффузионного скольжений бинарной газовой смеси вдоль поверхности капли, пропорциональные соответственно коэффициентам теплового $K_{TS}$ и диффузионного $K_{DS}$ скольжений и в последних двух краевых условиях учтены условия непрерывности температуры и радиального потока тепла. Причем в последнем условии в правой части учитывается тепло, идущее на фазовый переход жидкости капли в пар, пропорциональное величине $L$ и на излучение.

Уравнения, описывающие тепло-и массоперенос, будем решать методом сращиваемых асимптотических разложений [9, 14], поэтому систему уравнений газовой динамики и краевые условия необходимо привести к безразмерному виду: $y = r/R$, $\mathbf{V}_e = \mathbf{U}_e/U_\infty$, $t_e = T_e/T_\infty$, $t_i = T_i/T_\infty$.

При малых числах Рейнольдса и Пекле набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние и поэтому решений уравнений гидродинамики (1) следует искать в виде [12]

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_e^{(0)} + \varepsilon \mathbf{V}_e^{(1)} + ..., P_e = P_e^{(0)} + \varepsilon P_e^{(1)} + \dots .$$

При нахождении влияния тепло- и массопереноса на силу и скорость фотофореза ограничимся поправками до первого порядка малости включительно.

Согласно метода сращиваемых асимптотических разложений [9, 14] поля температуры и концентрации представляются в виде двух асимптотических разложений – внутреннего и внешнего. В частности, внутренние и внешние для температуры $t_e$ имеют вид (7) и (8):

$$t_e(y,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{en}(y,\theta), \tag{7}$$

$$t_e^*(\xi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(\varepsilon) t_{en}^*(\xi,\theta), \tag{8}$$

При этом требуется, чтобы

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \to 0, \quad \frac{f_{n+1}^*}{f_n^*} \to 0 \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

а недостающие краевые условия для внутреннего и внешнего разложений определяются из условия тождественности асимптотических продолжений того и другого в некоторую промежуточную область

$$t_e(y \to \infty, \theta) = t_e^*(\xi \to 0, \theta). \tag{9}$$

Здесь $\xi = \varepsilon y$– "сжатая" радиальная координата [9].

Асимптотическое разложение решения внутри высоковязкой капли следует искать в виде, аналогичном (7), т.е

$$t_i(y,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{in}(y,\theta). \tag{10}$$

Отметим, что согласно методу сращиваемых асимптотических разложений, относительно функций $f_n(\varepsilon)$ и $f_n^*(\varepsilon)$ предполагается лишь, что порядок их малости по $\varepsilon$ увеличивается с ростом $n$.

Уравнения в безразмерном виде для температур $t_e$ и $t_e^*$ имеют вид, соответственно, (11) и (12):

$$\varepsilon Pr^{(T)} \left( V_r^{(e)}(y,\theta) \frac{\partial t_e(y,\theta)}{\partial y} + V_\theta^{(e)}(y,\theta) \frac{\partial t_e(y,\theta)}{\partial \theta} \right) = \Delta t_e(y,\theta), \quad t_e \to 1 \quad \text{при} \quad y \to \infty, \tag{11}$$

$$Pr^{(T)} \left( V_r^{(*)}(\xi,\theta) \frac{\partial t_e^*(\xi,\theta)}{\partial \xi} + V_\theta^{(*)}(\xi,\theta) \frac{\partial t_e^*(\xi,\theta)}{\partial \theta} \right) = \Delta^* t_e^*(\xi,\theta), \tag{12}$$

и

$$\mathbf{V}_e^*(\xi,\theta) = \mathbf{n}_z + \varepsilon \mathbf{V}_e^{*(1)}(\xi,\theta) + \dots . \tag{13}$$

Здесь $\mathbf{n}_z$ – единичный вектор в направлении оси $Oz$, $\Delta^* = \Delta(\xi,\theta)$, $Pr^{(T)} = \mu_e c_p/\lambda_e$.

Решения для компонент массовой скорости $\mathbf{V}_e$ радиальной $V_r^{(e)}$ и касательной и $V_\theta^{(e)}$ следует искать в виде разложений по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [12], а поскольку величина силы, действующей на высоковязкую каплю, определяется первыми членами этих разложений, то компоненты имеют вид:

$$V_r^{(e)} = G(y)\cos\theta, \quad V_\theta^{(e)} = -g(y)\sin\theta.$$

**3. Поля скорости, давления, температур и относительной концентрации первого компонента.** Общие решения для уравнений гидродинамики (1) при малых числах Рейнольдса, удовлетворяющие краевым условиям (4), имеют вид [8, 12]

$$V_r^{(e)}(y,\theta)=\cos\theta\left(1+\frac{A_1}{y^3}+\frac{A_2}{y}\right),\ V_\theta^{(e)}(y,\theta)=-\sin\theta\left(1-\frac{A_1}{2y^3}+\frac{A_2}{2y}\right),\ P_e(y,\theta)=P_\infty+\frac{U_\infty}{R}\mu_e\frac{\cos\theta}{y^2}A_2, \tag{14}$$

а для полей температур (15) и относительной концентрации первого компонента (16)

$$t_e(y,\theta)=t_{e0}(y)+\varepsilon t_{e1}(y,\theta),\quad t_e^*(\xi,\theta)=t_{e0}^*(\xi)+\varepsilon t_{e1}^*(\xi,\theta),\quad t_i(y,\theta)=t_{i0}(y)+\varepsilon t_{i1}(y,\theta), \tag{15}$$

$$C_1(y,\theta)=C_{10}(y)+\varepsilon C_{11}(y,\theta),\quad C_1^*(\xi,\theta)=C_{10}^*(\xi)+\varepsilon C_{11}^*(\xi,\theta). \tag{16}$$

Здесь

$$t_{e0}(y)=1+\frac{\Gamma_0}{y},\ t_{e0}^*=1,\ t_{e1}(y,\theta)=\frac{\omega_0^{(T)}}{2y}\left(N_1-y\right)+\cos\theta\left[\frac{\Gamma_1}{y^2}+\frac{\omega_0^{(T)}}{2}\left(1+\frac{A_2}{y}-\frac{A_1}{2y^3}\right)\right],$$

$$t_{e1}^*(\xi,\theta)=\frac{\Gamma_0}{\xi}\exp\left\{\frac{1}{2}Pr^{(T)}\xi\left(\cos\theta-1\right)\right\},\ t_{i0}(y)=B_0+\frac{H_0}{y}-\frac{1}{y}\int_1^y\psi_0dy+\int_1^y\frac{\psi_0}{y}dy,$$

$$C_{10}(y)=C_{1\infty}+\frac{M_0}{y},\ C_{11}(y,\theta)=\frac{\omega_0^{(D)}}{2y}\left(N_2-y\right)+\cos\theta\left[\frac{M_1}{y^2}+\frac{\omega_0^{(D)}}{2}\left(1+\frac{A_2}{y}-\frac{A_1}{2y^3}\right)\right],$$

$$C_{10}^*=C_{1\infty},\ C_{11}^*(\xi,\theta)=\frac{M_0}{\xi}\exp\left\{\frac{1}{2}Pr^{(D)}\xi\left(\cos\theta-1\right)\right\},\ \omega_0^{(D)}=Pr^{(D)}M_0,\ Pr^{(D)}=\mu_e/(D_{12}\rho_e),$$

$$t_{i1}(y)=N_3+\cos\theta\left\{B_1y+\frac{H_1}{y^2}+\frac{1}{3}\left[y\int_1^y\frac{\psi_1}{y^2}dy-\frac{1}{y^2}\int_1^y y\psi_1dy\right]\right\},\ J_0=\frac{1}{V}\int_V q_idV,$$

$$\psi_1(y)=-\frac{3}{2}\frac{R^2}{\lambda_iT_\infty}y^2\int_{-1}^{+1}q_ixdx,\ J_1=\frac{1}{V}\int_V q_izdV,\ z=r\cos\theta,\ \psi_0(y)=-\frac{R^2}{2\lambda_iT_\infty}y^2\int_{-1}^{+1}q_idx,$$

$$\omega_0^{(T)}=Pr^{(T)}\Gamma_0,\ Pr^{(T)}=\mu_ec_p/\lambda_e,\ H_0=\frac{R^2J_0}{3\lambda_iT_\infty},\ H_1=\frac{RJ_1}{3\lambda_iT_\infty},\ V=\frac{4}{3}\pi R^3,\ \int_V q_izdV-$$

дипольный момент плотности тепловых источников [1, 20, 21]. Интегрирование ведется по всему объему испаряющейся капли, $Pr^{(T)}$, $Pr^{(D)}$ – тепловое и диффузионное числа Прандтля.

Среднее значение температуры поверхности капли $T_S=t_{iS}T_\infty$ определяется из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} t_{eS}=t_{iS},\ \Gamma_0=t_{eS}-1, \\ \dfrac{\lambda_e}{\lambda_i}\left(t_{eS}-1\right)=\dfrac{R^2J_0}{3\lambda_iT_\infty}+LD_{12}\dfrac{n_e^2m_1}{T_\infty\lambda_in_2}\dfrac{C_{1\infty}-C_{1s}^{(H)}}{1+D_{12}\dfrac{n_e}{R\alpha_0vn_2}}-\sigma_0\sigma_1\dfrac{RT_\infty^4}{\lambda_i}\left(t_{iS}^4-1\right). \end{cases}$$

Здесь $t_{eS}=t_{e0}(y=1)$, $t_{iS}=t_{i0}(y=1)$.

Постоянные интегрирования, которые входят в поля скорости, температур и относительной концентрации первого компонент находятся из краевых условий (6). Далее нам потребуются коэффициенты $\Gamma_1$ и $A_2$:

$$\Gamma_1=\frac{3H_1}{\delta}-\frac{\omega_0^{(T)}}{2\delta}\left[\left(1+A_2-\frac{A_1}{2}\right)\left(a_0+2L\frac{n_e^2m_1}{\lambda_ia_1n_2}D_{12}C_{1s}^*\right)-\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\left(\frac{3}{2}A_1-A_2\right)\right]+$$

$$+\frac{\omega_0^{(D)}}{2\delta a_1}D_{12}L\frac{m_1n_e^2}{\lambda_iT_\infty n_2}\left(2+A_2+\frac{A_1}{2}\right),\ \delta=a_0+2\frac{\lambda_e}{\lambda_i},\ a_0=1+4\sigma_0\sigma_1\frac{RT_\infty^3}{\lambda_i}t_{iS}^3,\ a_1=1+2D_{12}\frac{n_e}{R\alpha_0vn_2},$$

$$A_2=-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{U_\infty R\delta}\left\{3H_1\left[K_{TS}\frac{v_e}{t_{eS}}+K_{DS}\frac{D_{12}}{a_1}C_{1s}^*T_\infty+D_{12}\frac{n_e^2m_1C_{1S}^*T_\infty}{\rho_en_2a_1}\right]+\frac{3}{8}\omega_0^{(T)}\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\times\right.$$

$$\times\left[K_{TS}\frac{v_e}{t_{eS}}+K_{DS}\frac{D_{12}}{a_1}C_{1s}^*T_\infty+D_{12}\frac{n_e^2m_1C_{1S}^*T_\infty}{\rho_en_2a_1}\right]+\frac{3}{8}\omega_0^{(D)}\left[K_{TS}\frac{v_e}{t_{eS}}L\frac{n_e^2m_1}{\lambda_iT_\infty n_2}D_{12}+\right.$$

$$\left.\left.+K_{DS}D_{12}\left(L\frac{n_e^2m_1}{\lambda_in_2}C_{1s}^*D_{12}+D_{12}\frac{n_e}{R\alpha_0vn_2}\left(a_0+2\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right)\right)-D_{12}\frac{n_e^2m_1}{2\rho_en_2}\left(a_0+2\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right)\right]\right\}.$$

**4. Сила и скорость фотофореза. Анализ полученных результатов.** После того как получены в первом приближении по $\varepsilon$ выражения для полей температур вне и внутри испаряющейся капли и первого компонента бинарной газовой смеси, метод сращиваемых асимптотических разложений, общая сила, действующая на каплю, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности высоковязкой капли (17) [8]:

$$F_z=\int_{(S)}\left(-P_e\cos\theta+\sigma_{rr}\cos\theta-\sigma_{r\theta}\sin\theta\right)r^2\sin\theta d\theta d\varphi\ |_{r=R}\ . \tag{17}$$

Здесь

$$\sigma_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial r}, \ \sigma_{r\theta} = \mu_e \left( \frac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(e)}}{r} \right).$$

Подставляя полученные выше выражения в (17), и после интегрирования имеем

$$F_z = -4\pi R \mu_e U_\infty A_2,$$

а с учетом коэффициента $A_2$ получаем, что общая сила, действующая на крупную высоковязкую каплю, будет складываться из силы вязкого сопротивления среды $\mathbf{F}_\mu$, "чисто" фотофоретической силы $\mathbf{F}_{ph}$, которая пропорциональна коэффициенту $J_1$, силы $\mathbf{F}_{cht}$, обусловленной влиянием конвективного теплообмена на "чистый" фотофорез, пропорциональна коэффициенту $\omega_0^{(T)}$ и силы $\mathbf{F}_{cmt}$, обусловленной влиянием конвективного массообмена на "чистый" фотофорез, пропорциональна коэффициенту $\omega_0^{(D)}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_{ph} + \mathbf{F}_{cht} + \mathbf{F}_{cmt}, \tag{18}$$

$$\mathbf{F}_\mu = 6\pi R \mu_e U_\infty \ \mathbf{n}_z, \ \mathbf{F}_{ph} = -6\pi R \mu_e f_{ph} J_1 \ \mathbf{n}_z,$$

$$\mathbf{F}_{cht} = -6\pi R \mu_e f_{cht} \omega_0^{(T)} \ \mathbf{n}_z, \ \mathbf{F}_{cmt} = -6\pi R \mu_e f_{cmt} \omega_0^{(D)} \ \mathbf{n}_z,$$

$$f_{ph} = \frac{2}{3\delta \lambda_i T_\infty} \left[ K_{TS} \frac{\nu_e}{t_{eS}} + K_{DS} \frac{D_{12}}{a_1} C_{1s}^* T_\infty + D_{12} \frac{n_e^2 m_1 C_{1S}^* T_\infty}{\rho_e n_2 a_1} \right], \tag{19}$$

$$f_{cht} = \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \frac{1}{4\delta R} \left[ K_{TS} \frac{\nu_e}{t_{eS}} + K_{DS} \frac{D_{12}}{a_1} C_{1s}^* T_\infty + D_{12} \frac{n_e^2 m_1 C_{1S}^* T_\infty}{\rho_e n_2 a_1} \right], \tag{20}$$

$$f_{cmt} = \frac{1}{4R\delta a_1} \Bigg[ K_{TS} \frac{\nu_e}{t_{eS}} L \frac{n_e^2 m_1}{\lambda_i T_\infty n_2} D_{12} + K_{DS} D_{12} \Bigg( L \frac{n_e^2 m_1}{\lambda_i n_2} C_{1s}^* D_{12} +$$

$$+ D_{12} \frac{n_e}{R \alpha_0 \nu n_2} \left( a_0 + 2\frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right) \Bigg) - D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{2\rho_e n_2} \left( a_0 + 2\frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right) \Bigg]. \tag{21}$$

Приравнивая к нулю общую силу, действующую на каплю (частица движется равномерно) из (18) получаем выражение для скорости упорядоченного движения капли. Эта скорость также будет складываться из трех скоростей: "чисто" фотофоретической скорости $\mathbf{U}_{ph}$, которая пропорциональна коэффициенту $J_1$, скорости $\mathbf{U}_{cht}$, обусловленной влиянием конвективного теплообмена на "чистый" фотофорез, пропорциональна коэффициенту $\omega_0^{(T)}$ и скорости $\mathbf{U}_{cmt}$, обусловленной влиянием конвективного массообмена на "чистый" фотофорез, пропорциональна коэффициенту $\omega_0^{(D)}$:

$$\mathbf{U}_p = \mathbf{U}_{ph} + \mathbf{U}_{cht} + \mathbf{U}_{cmt}, \tag{22}$$

$$\mathbf{U}_p = -\left( f_{ph} J_1 + f_{cht} \omega_0^{(T)} + f_{cmt} \omega_0^{(D)} \right) \mathbf{n}_z.$$

Выражения для коэффициентов $f_{ph}$, $f_{cht}$, $f_{cmt}$ состоят из суммы трех слагаемых, появление которых обусловлено тепловым и диффузионным скольжением бинарной газовой смеси относительно неравномерно нагретой поверхности капли и реактивным эффектом, связанным с испарением. Для иллюстрации в таблице 1 в качестве примера зависимости функций $f_{ph}, f_{cht}, f_{cmt}$ от температуры $T_{iS}$ приведены значения функций $h_{ph} = f_{ph}/f_{ph} \ |_{T_{iS}=273K}$, $h_{cht} = f_{cht}/f_{cht} \ |_{T_{iS}=273K}$, $h_{cmt} = f_{cmt} \ /f_{cmt} \ |_{T_{iS}=273K}$ для капли воды радиуса $R = 30$ мкм, взвешенной в воздухе при нормальных условиях ($T_\infty = 273K$, $P_\infty = 10^5$ Па, $\alpha_0 = 0.5$). Численные значения коэффициентов, входящих в выражения (19) – (21), взяты их справочников [2, 4]. При $T_{iS} = 273K$ значения коэффициентов $f_{ph} \ |_{T_{iS}=273K} = 4.54 \cdot 10^{-9}$, $f_{cht} \ |_{T_{iS}=273K} = 3.78 \cdot 10^{-4}$, $f_{cmt} \ |_{T_{iS}=273K} = -0.46$. Численные оценки показали, что вклад в силу и скорость фотофореза крупной высоковязкой капли разный – вклад теплообмена положительный, а массообмена отрицательный.

Таблица 1
Table 1

Зависимость коэффициентов $h_{ph}$, $h_{cht}$, $h_{cmt}$ от температуры $T_{iS}$
Dependence of coefficients $h_{ph}$, $h_h$, $h_{cmt}$ on temperature $T_{iS}$

| $T_{iS}$ (K) | $h_{ph}$ | $h_{cht}$ | $h_{cmt}$ |
|---|---|---|---|
| 273 | 1 | 1 | 1 |
| 283 | 1.01 | 1.05 | 0.99 |
| 293 | 1.02 | 1.08 | 0.99 |
| 303 | 1.04 | 1.15 | 0.98 |
| 313 | 1.05 | 1.19 | 0.97 |
| 323 | 1.06 | 1.23 | 0.95 |

В тех случаях, когда капля поглощает излучение как черное тело, с помощью формул (17) и (22) можно непосредственно оценить силу и скорость фотофореза. Когда капля поглощает излучение как черное тело, поглощение происходит в тонком слое с толщиной $\delta R \ll R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности капли. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной $\delta$ имеет вид

$$q_i(r,\theta) = \begin{cases} -\dfrac{I_0}{\delta},\ \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi,\ R-\delta \le r \le R, \\ 0,\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где $I_0$– интенсивность падающего излучения.

Тогда $\int\limits_V q_i z dV = -\dfrac{2}{3}\pi R^3 I_0$, $J_1 = -\dfrac{I_0}{2}$, $\int\limits_V q_i dV = \pi R^2 I_0$, $J_0 = \dfrac{3I_0}{4R}$, $\omega_0^{(T)} = \dfrac{RPr^{(T)}}{4\lambda_e T_\infty} I_0$.

Конвективный перенос тепла пропорционален коэффициенту $\omega_0^{(T)}$. Мы можем, в частности, оценить влияние теплообмена на "чистый" фотофорез. В этом случае имеем следующие формулы

$$\mathbf{F}_{ph} = 2\pi R\mu_e \frac{I_0}{\delta\lambda_i T_\infty}\left[K_{TS}\frac{\nu_e}{t_{eS}} + C_{1s}^*\frac{D_{12}}{a_1}T_\infty\left(K_{DS} + \frac{n_e^2 m_1}{\rho_e n_2}\right)\right]\left(1 - \frac{3}{16}Pr^{(T)}\right)\mathbf{n}_z, \quad (23)$$

$$\mathbf{U}_{ph} = \frac{I_0}{3\delta\lambda_i T_\infty}\left[K_{TS}\frac{\nu_e}{t_{eS}} + C_{1s}^*\frac{D_{12}}{a_1}T_\infty\left(K_{DS} + \frac{n_e^2 m_1}{\rho_e n_2}\right)\right]\left(1 - \frac{3}{16}Pr^{(T)}\right)\mathbf{n}_z. \quad (24)$$

Для большинства газов тепловое число Прандтля порядка единицы и из формул (23) – (24) видно, что вклад конвективного теплопереноса в фотофоретическую силу и скорость испаряющейся капли при малых относительных перепадах в ее окрестности составляет более 20 процентов. Это означает, что при описании поведения неравномерно нагретых высоковязких капель в бинарных газовых смесях и численных оценок силы и скорости фотофореза необходимо учитывать конвективный тепло и массоперенос.

**Благодарность.** *Автор выражает благодарность Н. В. Малай за поддержку, внимание к работе, ценные замечания и советы.*

## Список литературы


1. Береснев С. А., Ковалев Ф. Д., Кочнева Л. Б., Рунков В. А., Суетин П. Е., Черемисин А. А. 2003. О возможности фотофоретической левитации частиц в стратосфере. Оптика атмосферы и океана, 16(1): 52-57.
2. Бретшнайдер С. 1966. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М., Мир. 534.
3. Борен К., Хафмен Д. 1986. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М., Мир. 660.
4. Варгафтик Н. Б. 1972. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М., Наука. 720.
5. Галоян В. С., Яламов Ю. И. 1985. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван, Луйс. 207.
6. Дьяконов С. Н., Котлярова Л. В., Яламов Ю. И. 2002. Влияние летучести на термофоретическое движение высоковязкой сферы в бинарной газовой смеси с учетом термодиффузионных и стефановских эффектов. Журнал технической физики, 72(3): 24-30.
7. Камке Э. 2003. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Лань. 576.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. 2003. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М., Физматлит. 731.
9. Найфэ А. 1984. Введение в методы возмущения. М., Мир. 525.
10. Поддоскин А. Б., Юшканов А. А., Яламов Ю. И. 1980. К вопросу о термофорезе умеренно крупных аэрозольных частиц. Журнал технической физики, 50(1). 158-160.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1972. Уравнения математической физики. М., Наука. 735.
12. Хаппель Дж., Бреннер Г. 1976. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., Мир.630.
13. Яламов Ю. И., Поддоскин А. Б., Юшканов А. А. 1980. О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны. ДАН СССР, 254(2). 1047-1050.
14. Acrivos A., Taylor T. 1962. Heat and Mass Transfer from Single Spheres in Stokes Flow. Phys. Fluid, 5(4): 387-394; https://doi.org/10.1063/1.1706630.
15. Cheremisin A. A., Kushnarenko A. V. 2013. Photophoretic interaction of aerosol particles and its effect on coagulation in rarefied gas medium. J. of Aerosol Science, 62: 26-39.
16. Gong Z., Pan Y-L and Wang C. 2016. Optical configurations for photophoretic trap of single particles in air. Rev. Sci. Instrum. 87, 103104; https://doi.org/10.1063/1.4963842
17. Liu F., Zhang Z., Wei Y., Zhang Q., Cheng T., Wu X. 2014. Photophoretic trapping of multiple particles in tapered-ring optical field. Opt. Express, 22(19):23716-23. doi: 10.1364/OE.22.023716.
18. Malai N. V., Efimtseva D. N., Shchukin E. R. 2022. Convective heat transfer between a moving solid spherical particle and a viscous gas. Differential Equations, 58(2): 195-206: DOI: 10.1134/S0012266122020069.
19. Malai N. V., Shchukin E. R. 2019. Photo- and thermophoresis of heat medium-size spherical aerosol particle. Technical Physics, 64(4): 458-464: DOI: 10.1134/S1063784219040169.
20. Malai N. V., Limanskaya A. V., Shchukin E.R., Stukalov A.A. 2012. Photophoresis of heat large spherical aerosol particle. Technical Physics, 57(10): 1364-1371.

21. Pereira D. J. S. and Panao M. R. O. 2022. Photophoresis of spherical particles in slip-flow regime. Phys. Fluids, 34. 103307; https://doi.org/10/1063/5.0103646

**References**

1. Beresnev S. A., Kovalev F. D., Kochneva L. B., Runkov V. A., Suetin P. E., Cheremisin A. A. 2003. On the possibility of photophoretic levitation of particles in the stratosphere. Optics of the Atmosphere and Ocean, 16(1):52-57. (in Russian)
2. Bretschneider S. 1966. Properties of gases and liquids. Engineering methods of calculation. Moscow, Mir. 534. (in Russian)
3. Boren K., Hafman D. 1986. Absorption and scattering of light by small particles. M., Mir. 660. (in Russian)
4. Vargaftik N.B. 1972. Handbook of thermophysical properties of gases and liquids. M., Nauka. 720. (in Russian)
5. Galoyan V. S.„ Yalamov Yu. I. 1985. Dynamics of droplets in inhomogeneous viscous media. Yerevan, Luys. 207. (in Russian)
6. Diakonov S. N., Kotlyarova L. V., Yalamov Yu. I. 2002. The effect of volatility on the thermophoretic motion of a highly viscous sphere in a binary gas mixture, taking into account thermodiffusion and Stefan effects. Journal of Technical Physics, 72(3): 24-30. (in Russian)
7. Kamke E. 2003. Handbook of ordinary differential equations. M., Lan. 576. (in Russian)
8. Landau L.D., Lifshits E.M. 2003. Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics. M., Fizmatlit. 731. (in Russian)
9. Naife A. 1984. Introduction to perturbation methods. M., Mir. 525. (in Russian)
10. Poddoskin A. B., Yushkanov A. A., Yalamov Yu. I. 1980. On the issue of thermophoresis of moderately large aerosol particles. Journal of Technical Physics, 50(1). 158-160. (in Russian)
11. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. 1972. Equations of mathematical physics. M., Nauka. 735. (in Russian)
12. Happel J., Brenner G. 1976. Hydrodynamics at small Reynolds numbers. M., Mir. 630. (in Russian)
13. Yalamov Yu. I., Poddoskin A. B., Yushkanov A. A. 1980. On boundary conditions during flow of inhomogeneously heated gas around a spherical surface of small curvature. DAN USSR, 254(2). 1047-1050. (in Russian)
14. Acrivos A., Taylor T. 1962. Heat and Mass Transfer from Single Spheres in Stokes Flow. Phys. Fluid, 5(4): 387-394; https://doi.org/10.1063/1.1706630.
15. Cheremisin A. A., Kushnarenko A. V. 2013. Photophoretic interaction of aerosol particles and its effect on coagulation in rarefied gas medium. J. of Aerosol Science, 62: 26-39.
16. Gong Z., Pan Y-L and Wang C. 2016. Optical configurations for photophoretic trap of single particles in air. Rev. Sci. Instrum. 87, 103104; https://doi.org/10.1063/1.4963842
17. Liu F., Zhang Z., Wei Y., Zhang Q., Cheng T., Wu X. 2014. Photophoretic trapping of multiple particles in tapered-ring optical field. Opt. Express, 22(19):23716-23. doi: 10.1364/OE.22.023716.
18. Malai N. V., Efimtseva D. N., Shchukin E. R. 2022. Convective heat transfer between a moving solid spherical particle and a viscous gas. Differential Equations, 58(2): 195-206: DOI: 10.1134/S0012266122020069.
19. Malai N. V., Shchukin E. R. 2019. Photo- and thermophoresis of heat medium-size spherical aerosol particle. Technical Physics, 64(4): 458-464: DOI: 10.1134/S1063784219040169.
20. Malai N. V., Limanskaya A. V., Shchukin E. R., Stukalov A. A. 2012. Photophoresis of heat large spherical aerosol particle. Technical Physics, 57(10): 1364-1371.
21. Pereira D. J. S. and Panao M. R. O. 2022. Photophoresis of spherical particles in slip-flow regime. Phys. Fluids, 34. 103307; https://doi.org/10/1063/5.0103646

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

*Поступила в редакцию 06.04.2023*
*Поступила после рецензирования 18.05.2023*
*Принята к публикации 22.05.2023*

*Received 06.04.2023*
*Revised 18.05.2023*
*Accepted 22.05.2023*

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ**

**Шостак Юлия Ивановна** – аспирант второго года обучения института инженерных и цифровых технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

**INFORMATION ABOUT THE AUTHOR**

**Julia Shostak** – Post-graduate student of the Second Year of Study at the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia