ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

КИЇВ — 198

УДК 627.222:519

В. М. Московкин, В. В. Назаренко

Устойчивость берегов в условиях управления пляжеобразующим материалом

Рассмотрен вопрос об устойчивости пляжей абразионных берегов, развивающихся в условиях антропогенного воздействия. Использованы качественный анализ уравнения баланса пляжеобразующего материала и методы элементарной теории катастроф. Показано, что в условиях подсыпки обломочного материала береговые процессы устойчивы, а при его изъятии — устойчивы или неустойчивы в зависимости от интенсивности изъятия. Установлены предельные объемы изъятия, приводящие к природной катастрофе — полной деградации пляжа. С целью стабилизации береговых систем рассмотрена задача перевода системы (пляжа) из заданного начального состояния в динамически равновесное при одновременной минимизации времени перевода и общего объема подсыпаемого материала.

При функционировании береговых систем возникают катастрофические ситуации исчезновения (деградации) пляжа, часто обусловленные чрезмерным изъятием пляжеобразующего материала. Для прогнозирования этих ситуаций удобно исследовать уравнение баланса пляжеобразующего материала на устойчивость его стационарных состояний. Запишем уравнение баланса, предложенное в работе [1], с учетом управляющего фактора u [3—5]:

$$dW/dt = aHf(W) - \varphi(W) + u, \tag{1}$$

где W — приведенный объем пляжеобразующего материала на единицу длины береговой линии, м^2; a — доля пляжеобразующего материала в породах, слагающих берег ($0<a<1$); H — высота клифа, м; $f(W)$ — скорость отступания клифа, м/год; $\varphi(W)$ — интенсивность истирания пляжеобразующего материала при волновом воздействии, м^2/год; $u = \text{const}$ — интенсивность приведенной подсыпки ($u>0$) или изъятия ($u<0$) пляжеобразующего материала на единицу длины береговой линии, м^2/год; t — время, год. Параметр u также может быть связан с естественным перемещением материала во вдольбереговом потоке наносов.

Возьмем в качестве $f(W)$ наиболее универсальную трехпараметрическую аппроксимирующую функцию, предложенную в работе [2]:

$$f(W) = B(W+\varepsilon)/(W+r)^2, \tag{2}$$

где B, ε, $r = \text{const} > 0$. Она описывает разрушение берегов, сложенных различными по прочности породами. В качестве функции $\varphi(W)$ возьмем наиболее распространенный линейный закон истирания $\varphi(W) = kW$ [1, 2]. Таким образом, приходим к следующему нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$dW/dt = aHB(W+\varepsilon)/(W+r)^2 - kW + u. \tag{3}$$

Можно показать, что при подсыпке материала ($u>0$) существует единственная стационарная точка этого уравнения, которая является устойчивой. Это говорит о том, что при подсыпке материала формируется равновесный (стабильный) пляж с объемом материала, равным стационарному значению $W_{\text{ст}}$, определяемому из уравнения (3) при

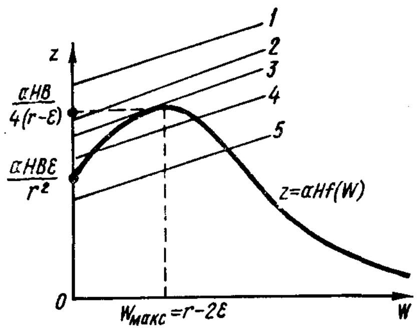
$dW/dt=0$. Очевидно, что чем больше интенсивность подсыпки, тем обширнее пляж.

Наиболее интересные ситуации возникают с учетом изъятия материала при различных соотношениях параметров уравнения (3).

Один из путей решения поставленной задачи состоит в нахождении корней соответствующего кубического уравнения и анализе их на устойчивость методом возмущений. Но гораздо проще качественно исследовать это уравнение с целью получения определенных критериев существования стабильных пляжей.

Нелинейный член уравнения (3) имеет максимальное значение $z_{\max}=aHB/4(r-\varepsilon)$ при $W_{\max}=r-2\varepsilon$ (рис. 1). Этот максимум при $r-2\varepsilon<0$ находится в отрицательной области, а при $r-2\varepsilon>0$ — в положительной.

В первом случае в интересующей нас области $W\geqslant 0$ нелинейный член представляет собой монотонно-убывающую функцию с максимальным значением $z_{\max}=aHB\varepsilon/r^2$ при $W=0$. Отсюда следует, что, если абсолютная величина интенсивности изъятия $|u|$ превышает $z_{\max}$, т. е. $|u|>aHB\varepsilon/r^2$, то не существует стационарного состояния береговой системы. Всегда выполняется условие $dW/dt<0$, что говорит об убывании объема пляжеобразующего материала (деградации пляжа).



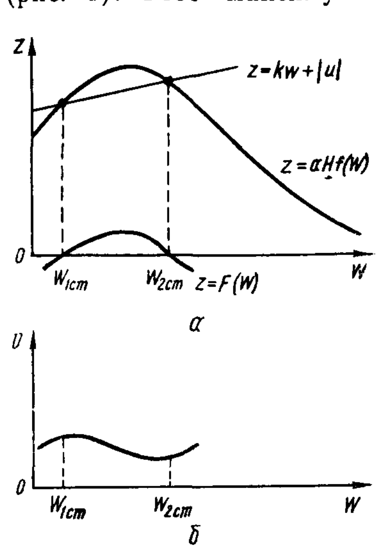


Рис. 1. Оценка катастрофических состояний береговой системы клиф—пляж

Рис. 2. Оценка устойчивости стационарных точек уравнения (3) при изъятии материала и ситуации их вырождения (*а*), а также путем исследования экстремумов потенциальной функции (*б*)

Если же $|u|<aHB\varepsilon/r^2$, то существует единственная стационарная точка ($W_{\text{ст}}$) уравнения (3), которая является устойчивой, что будет ясно из последующего изложения.

При графическом рассмотрении случая $r-2\varepsilon>0$ выделяется три характерных варианта (рис. 1):

1. Стационарных точек нет, происходит деградация пляжа (прямая *1* проходит выше кривой) при $|u|>aHB/4(r-\varepsilon)$.
2. Существует от нуля до двух стационарных точек при $aHB\varepsilon/r^2<|u|<aHB/4(r-\varepsilon)$ (прямые *2*—*4*).
3. Существует единственная стационарная (устойчивая) точка (прямая *5* пересекает кривую в одной точке) при $0<|u|<aHB\varepsilon/r^2$.

Наибольший интерес представляет второй вариант в связи с катастрофой «складки» [5, 6] при совпадении двух стационарных точек (касание прямой *3* и кривой), который будет подробнее исследован при анализе потенциальных функций.

Отметим, что при $|u|=aHB\varepsilon/r^2$ стационарная (ненулевая) точка будет возникать при $|u|(r-2\varepsilon)/r\varepsilon>k$, в противном случае она отсутствует.

Устойчивость стационарных точек проанализирована по поведению кривых $dW/dt=F(W)$ с использованием потенциальных функций на

примере второго варианта при наличии двух стационарных точек и ситуации их вырождения, что хорошо иллюстрирует рис. 2, *а*.

Потенциальная функция $U(W)$ определяется из уравнения $dW/dt=-dU/dW$ и в нашем случае с точностью до константы имеет вид:

$$U=-aHB\ln(W+r)+aHB(\varepsilon-r)/(W+r)+kW^2/2-uW. \qquad (4)$$

Стационарные точки, определяемые из уравнения $F(W)=0$, соответствуют экстремумам потенциальной функции.

При наличии двух стационарных значений W большее из них является устойчивым ($W_{1\,\text{ст}}>W_{2\,\text{ст}}$, рис. 2, *б*). Действительно, если $W<W_{2\,\text{ст}}$, то $dW/dt=F(W)>0$ и $W(t)$ возрастает, если $W>W_{2\,\text{ст}}$, то $dW/dt=F(W)<0$ и $W(t)$ убывает. При этом устойчивая стационарная точка соответствует минимуму потенциальной функции. Аналогичное рассмотрение показывает, что точка $W_{1\,\text{ст}}$ является неустойчивой; она соответствует максимуму потенциальной функции. Отсюда следует, что при переводе абразии в стадию стационарного (установившегося) режима путей подсыпки в береговую зону обломочного материала нужно ориентироваться на значение $W_{2\,\text{ст}}$, а не $W_{1\,\text{ст}}$, поскольку в последнем случае «равновесие» неустойчивое и интенсивность абразии спустя некоторое время может усиливаться.

При постоянном сближении стационарных точек (например, при увеличении интенсивности изъятия материала) положительная область горба функции $F(W)$ постепенно уходит в отрицательную, и при касании прямой $z=kW+|u|$ и кривой $z=aHf(W)$ она исчезает ($W_{1\,\text{ст}}=W_{2\,\text{ст}}$). Этот вырожденный случай показан на рис. 1 (прямая *3*). При этом указанная точка является дважды вырожденной критической точкой потенциальной функции ($d^2U/dW^2=0$), т. е. наблюдается перегиб потенциальной функции в этой точке. При дальнейшем увеличении интенсивности изъятия материала стационарная точка исчезает (пересечения прямой и кривой отсутствуют). Здесь возникает внезапный скачок, который отождествляется с катастрофой «складки». При исчезновении стационарной точки имеем $dW/dt<0$, и решение $W(t)$ может только убывать, что соответствует исчезновению (деградации) пляжа. Таким образом, математическая катастрофа «складки» отвечает реальной физической катастрофе, а именно: при данном коэффициенте истирания k (и постоянных других параметрах) существует такое критическое значение интенсивности изъятия материала, выше которого пляж будет деградировать. Множество всех этих критических значений $|u|$ и k, при которых происходит касание прямой $z=kW+|u|$ и кривой $z=aHf(W)$ (связано с семейством огибающих прямых), называется бифуркационным множеством. Оно определяется некоторым соотношением $\psi(|u|, k)=0$ и является отображением (проекцией) многообразия катастрофы $M(W, |u|, k)$ на плоскость управляющих параметров $|u|$ и k. В нашем случае многообразием катастрофы (поверхностью равновесия) в пространстве $(W, |u|, k)$ является множество этих точек, удовлетворяющих уравнению (3) при $dW/dt=0$.

По уравнению (4) были проведены численные расчеты потенциальной функции при характерных параметрах, соответствующих условиям Новороссийского геологического района [3]. При $a=0{,}3$; $B=0{,}04$ м³/год; $r=1$ м²; $\varepsilon=0{,}0025$ м²; $k=0{,}1$ год⁻¹; $H=100$ м в случае изъятия материала имеем закономерное уменьшение значения W, при котором достигается минимум потенциальной функции, начиная от $W_{\min}=2{,}5$ м² при $|u|=0$ вплоть до исчезновения пляжа при достаточном увеличении интенсивности изъятия материала. Вырождение минимума происходит в интервале $-0{,}3<u<0{,}2$ м²/год ($0{,}7<W_{\min}<0{,}8$ м²)*, где существует дважды вырожденная критическая точка, что соответствует отмеченной выше катастрофической ситуации. При уменьшении высоты клифа в два раза ($H=50$ м) разность между значениями максимума и минимума потенциальной функции $U(W)$ (потенциальный барьер) выражена немного слабее, чем в первом случае, и вырождение минимума происходит в интервале $-0,1<u<0$. При $H=100$ м и $k=0,05$ год$^{-1}$ (остальные параметры те же) катастрофическая ситуация возникает при $-0,3<u<-0,2$ м²/год $(0,8<W_{min}<1,2$ м²).

Аналогичные расчеты при другом наборе параметров, характерных для указанного района [2], ($a=0,3$; $B=0,026$ м³/год; $r=0,5$ м²; $\varepsilon=0,01$ м²; $k=0,1$ год$^{-1}$; $H=100$ м), показывают, что изъятие материала с интенсивностью $u=-0,2$ м²/год является критическим (катастрофа «складки») и при большей интенсивности изъятия будет происходить деградация пляжа. Изменение параметра a (доля пляжеобразующих фракций в породах, слагающих берег) в интервале $0,2\leqslant a\leqslant 0,4$ существенно не влияет на результаты. Таким образом, для данного района при $H=100$ м; $0,2\leqslant a\leqslant 0,4$; $0,05\leqslant k\leqslant 0,1$ год$^{-1}$; $0,026\leqslant B\leqslant 0,04$ м³/год катастрофа «складки» происходит при $-0,3<u<-0,2$ м²/год, а при $H=50$ м критическое значение u находится в интервале $-0,1<u<0$.

Выше в качестве функции $\varphi(W)$ рассматривался линейный закон, который предполагает равномерное истирание материала во всем объеме пляжа. В то же время для крупных пляжей истирание происходит в верхнем наиболее подвижном слое наносов, и при достижении пляжем предельной ширины будет наблюдаться стабилизация процесса истирания материала на некотором максимальном постоянном уровне (c). Предполагая, что при малых W истирание происходит по линейному закону, можно записать следующий наиболее универсальный полуэмпирический нелинейный закон истирания пляжеобразующего материала [3]:

$$\varphi(W)=cW/(\gamma_1+W), \tag{5}$$

где c, $\gamma_1=\mathrm{const}>0$.

Качественный анализ стационарных точек уравнения (1) с учетом функций (2, 5) показывает, что при $r-2\varepsilon<0$ ($f(W)$ — монотонно-убывающая функция при $W\geqslant 0$) единственная стационарная точка существует при $0\leqslant u\leqslant c$, а при $u\geqslant c$ такая точка отсутствует и $\lim W(t)=\infty$ (неограниченный рост пляжа, когда интенсивность подсыпки превышает максимальный уровень истирания материала). При $r-2\varepsilon>0$ локальный максимум функции $z=aHB(W+\varepsilon)/(W+r)^2$, равный $z_{max}=aHB/4(r-\varepsilon)$, лежит в положительной области ($W>0$). Здесь при $0\leqslant u\leqslant c$ существует, по крайней мере, одна устойчивая стационарная точка; если $u\geqslant c$, то такие точки отсутствуют $(\lim_{t\to\infty} W(t)=\infty)$.

При изъятии материала ($u<0$ и $r-2\varepsilon<0$) единственная стационарная точка существует, если $0<|u|<aHB\varepsilon/r^2$. В противном случае $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t<0$, что говорит об исчезновении пляжа. Полученный критерий возникновения катастрофической ситуации справедлив и при линейном законе истирания.

В ситуации, когда истирание начинает превышать величину подсыпки (происходит деградация пляжа), для дальнейшего анализа удобно использовать потенциальную функцию $U(W)$:

$$U(W)=-aHB\ln(W+r)-c\gamma_1\ln(\gamma_1+W)+(\varepsilon-r)aHB/(W+r)+(c-u)W. \tag{6}$$

Приведем численные результаты выражения (6) для условий прочных пород Новороссийского геологического района [3]: $a=0,3$; $B=0,04$ м³/год; $\varepsilon=0,0025$ м²; $r=1$ м²; $c=0,4$ м²/год; $\gamma_1=10$ м²; $50\leqslant H\leqslant 100$ м.

При увеличении интенсивности изъятия материала, начиная с нулевого значения, наблюдается сближение экстремумов потенциальной функции, соответствующих стационарным точкам уравнения (6). При $H=100$ м их вырождение, отвечающее катастрофической ситуации, происходит в интервале $-0,3<u<-0,2$ м²/год в окрестности $W\approx 1$ м². При $H=50$ м аналогичный интервал имеет вид $-0,15<u<-0,1$ м²/год. Найденные интервалы управления являются критическими; в них будет происходить скачок из ненулевого равновесного состояния в нулевое (исчезновение пляжа). Они близки к ранее полученным интервалам для линейного закона истирания.

Таким образом, для выявления катастрофических состояний береговых систем типа клиф—пляж можно использовать анализ потенциальных функций, а для грубых оценок — полученные выше критерии.

Для стабилизации береговых систем целесообразно решать задачу перевода их в естественное динамически равновесное состояние некоторым оптимальным образом. Рассмотрим ее для уравнения (1).

Ставится задача перевода пляжа с начальным объемом $W(t=0)=W_0$ в динамически равновесное состояние (определяемое из уравнения (1) при $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t=0$, $u=0$) при одновременной минимизации времени и общего объема подсыпаемого (или изымаемого) материала.

$$\int_0^T (1+|u|\,\mathrm{d}t\to\min, \tag{7}$$

где T — минимальное время перевода.

Для практических целей удобно находить решение задачи (1, 7) в постоянном по интенсивности классе управляющих воздействий (u — параметр). Из уравнения (1) определяем время перевода пляжа из состояния W_0 в стационарное состояние $W_{ст}>W_0$:

$$T=F(u)=\int_{W_0}^{W_{ст}}\frac{\mathrm{d}W}{aHf(W)-\varphi(W)+u} \tag{8}$$

и далее методами математического анализа с учетом $|u|\leqslant\beta$ находим минимум функционала (7):

$$\Phi(u)=\int_0^T(1+|u|\,\mathrm{d}t=(1+|u|)T=(1+|u|)F(u). \tag{9}$$

Ниже остановимся на конкретной задаче в условиях подсыпки ($u>0$) при линейных функциях $f(W)$, $\varphi(W)$, рассматриваемых при решении задач оптимального управления береговыми системами в работе [3, 4]: $f(W)=\gamma(W_{max}-W)$, $\varphi(W)=kW$, где γ, W_{max}, $k=\mathrm{const}>0$, $0\leqslant W\leqslant W_{max}$. В этом случае выражение (9) примет вид:

$$\Phi(u)=\frac{(1+u)}{A}\ln(1+D/u), \tag{10}$$

где $A=aH\gamma+k$, $W_{ст}=\dfrac{(A-k)}{A}W_{max}$, $W_0<W_{ст}$, $D=A(W_{ст}-W_0)$.

Экстремумы этой функции ($\mathrm{d}\Phi(u)/\mathrm{d}u=0$) находятся из решения трансцендентного уравнения

$$\ln(1+D/u)=D(1+u)/u(u+D). \tag{11}$$

Исследование функции (10) как функции от параметра D при $A=\mathrm{const}$ (изменение D обусловлено только изменением разности $W_{ст}-W_0$) показывает вырождение минимума этой функции при $D=2$ (минимум существует при $D>2$).

На основе численных экспериментов была получена зависимость управляющего фактора, при котором достигается минимум функции $\Phi(u, D)$ от D:

$$u_{min}(D)=0,2455+1,425/(D-2). \tag{12}$$

Для условий рыхлых глинистых пород в районе мыса Бурнас (СССР, Черное море) — $\gamma=1/3$ м/год$^{-1}$; $W_{max}=30$ м²; $0<W<30$ м²; $a=0,02$; $k=0,1$ год$^{-1}$; $1\leqslant H\leqslant 50$ м — получим следующий диапазон изменения D: $0<D<9$ м²/год, $u_{min}(9)=0,459$ м²/год. Решение исходной поставленной задачи для данного случая будет выглядеть следующим образом. Пусть, например, $u \leqslant \beta = 1$ м^2/год, тогда при $0 < D < 2$, когда $\Phi(u, D)$ монотонно убывает до нуля при увеличении u, в качестве искомого оптимального значения следует взять $u_{opt} = \beta = 1$ м^2/год и для него найти оптимальное время T. Если $D > 2$, то следует выбрать минимальное из чисел β и u_{min} (рассчитанное по формуле [12]): $u_{opt} = \min\{\beta, u_{min}\}$. Так, при $D = 3$ имеем $u_{opt} = \min\{1; 1{,}65\} = 1$, при $D = 9$ — $u_{opt} = \min\{1; 0{,}495\} = 0{,}495$. Соответствующие оптимальные время и объем подсыпки находим по формулам (9, 10) и $\bar{u} = Tu_{opt}$, где $T = F(u)$. Указанная методика может быть использована для решения задачи (1, 7) при более сложных нелинейных функциях $f(W)$, $\varphi(W)$.

Таким образом, предложенные в работе подходы позволяют прогнозировать катастрофические (неустойчивые) ситуации в береговых системах и управлять ими с помощью перевода в устойчивые динамически-равновесные состояния.

Summary

A problem on stability of the abrasion beaches developing under conditions of the anthrapogenic effect is under consideration. Qualitative analysis of the equations on the beach-forming material balance is applied for it using methods of the elementary catastrophe theory. It is shown that under conditions of the fragmentary material addition the shore processes are stable, in the case of its removal they are stable or unstable as dependent on the removal intensity. Ultimate volumes of the removal causing a natural catastrophe, a complete degradation of the beach, are determined. A problem on change of the system (beach) from the preset initial state to the dynamically equilibrium one with simultaneous minimization of the time of this change and total volume of the added material is considered.

1. *Есин Н. В., Савин М. Т., Жиляев А. П.* Абразионный процесс на морском берегу.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.— 200 с.
2. *Есин Н. В., Дмитриев В. А., Московкин В. М.* Математическая модель эволюции береговой линии абразивного берега // Докл. АН СССР.— 1983.— Т. 270, № 1.— С. 223—226.
3. *Есин Н. В., Московкин В. М., Дмитриев В. А.* К теории управления абразионным процессом // Природные основы берегозащиты.— М.: Наука, 1987.— С. 5—18.
4. *Московкин В. М., Есин Н. В.* Оптимальное управление абразионным процессом // Докл. АН СССР.— 1985.— Т. 284, № 3.— С. 731—734.
5. *Московкин В. М., Ковтун Е. А.* Анализ устойчивости береговых систем методами теории катастроф // Геол. журн.— 1988.— № 5.— С. 65—72.
6. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения.— М.: Мир, 1980.— 607 с.

Ин-т геол. наук АН УССР, Киев
ВНИИВО, Харьков

Статья поступила
21.07.88