



УДК 621.391

## АППРОКСИМАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ РЕКУРРЕНТНЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ МОДЕЛЕЙ СКОЛЬЗЯЩЕГО ОКНА

**В.П. ВОЛЧКОВ**  
**Н.Е. ПОБОРЧАЯ**  
**А.М. ШЛОМА**

*Московский технический университет связи и информатики*

*e-mail: volchkovvalery@mail.ru*  
*n.poborchaya@mail.ru*

Одной из приоритетных задач цифровой обработки сигналов является уменьшение вычислительной сложности соответствующих алгоритмов, но без значительных потерь их точности. Для синтеза таких алгоритмов нужны хорошие адекватные модели сигналов. В работе для такого представления случайных сигналов предлагается использовать рекуррентные циркулянтные модели скользящего окна. Получены алгоритмы вычисления параметров таких моделей по заданной корреляционной функции сигнала и выражения для корреляционной функции аппроксимирующего процесса. Проведен сравнительный анализ качества аппроксимации предложенных моделей с другими известными моделями, подтверждающий их высокую эффективность.

Ключевые слова: случайный сигнал, случайный процесс, авторегрессионная модель, циркулянтная модель, стохастическое разностное уравнение, корреляционная функция, преобразование Фурье.

**1. Общая постановка задачи.** При цифровой обработке сигналов и изображений в радиолокации и связи часто возникает необходимость в наилучшей аппроксимации наблюдаемого случайного процесса дискретной динамической моделью определенного порядка. Причем модель должна быть такой, чтобы в дальнейшем ее можно было использовать для эффективного решения задач сглаживания, параметрического спектрального анализа, обнаружения, распознавания и др. Под эффективностью мы здесь понимаем не только простую структуру получаемых оптимальных алгоритмов обработки, но и одновременно возможность их быстрой вычислительной реализации. Для многих известных динамических моделей, например, авторегрессии или авторегрессии-скользящего среднего [1], последнее может служить ограничительным фактором их применения, если динамический порядок модели  $\alpha$  велик. В результате разработчикам часто приходится «деформировать» полученный оптимальный алгоритм с целью его упрощения, но при этом, естественно, теряются и его оптимальные свойства. В данной работе указанное противоречие предлагается разрешить, строя оптимальный синтез алгоритмов на заранее подходящем классе моделей сигналов, который, с одной стороны, достаточно широк, чтобы обеспечить хорошую аппроксимацию реальных сигналов, а, с другой стороны, позволяет получить эффективную реализацию полученных алгоритмов. Для этой цели используется подход [2], при котором для синтеза выбирается класс аппроксимирующих динамических моделей сигналов, обладающих свойством симметрии (инвариантности) по отношению к конечной группе циркулянтных преобразований. Эта группа действует на вектор состояния динамической модели в некотором скользящем временном окне  $[0, n-1]$  размера  $n$  и обеспечивает в этом окне наилучшую аппроксимацию исходного случайного процесса. Аппроксимирующие свойства вне данного окна будут зависеть от параметра зацепления  $s$  соседних скользящих окон и динамического порядка модели. В данной работе порядок динамической аппроксимации  $\alpha$  увеличен до двух, что позволило улучшить ее аппроксимирующие свойства, по сравнению с аналогичной моделью, описанной в [2]. Кроме того, показано, что при одном и том же динамическом порядке  $\alpha$ , применение рекуррентных моделей скользящего окна вместо известных авторегрессионных моделей обеспечивает лучшую аппроксимацию случайного процесса и более адекватные спектральные оценки. В то же время установлено, что циркулянтная симметрия векторной рекуррентной модели позволяет диагонализировать структуру матриц, задающих ее параметры. Для этого достаточно применить к этой модели  $n$ -точечное дискретное преобразование Фурье (ДПФ), т.е. перейти к базису ее собственных функций. Для всех рассматриваемых векторных циркулянтных моделей скользящего окна получены алгоритмы вычисления оптимальных параметров по заданной корреляционной функции сигнала (алгоритм идентификации) и выражения для корреляционной функции аппрок-



симирующего процесса. Определены критерии качества аппроксимации во временной и спектральной областях. Проведен сравнительный анализ с другими известными моделями, подтверждающий их высокую эффективность.

**2. Описание и идентификация.** Пусть случайный сигнал представляет вещественную последовательность

$$x_i = x(t_i), \quad i \in J_N = \{0, \dots, N-1\} \tag{1}$$

полученную в результате дискретизации по времени непрерывного стационарного (в широком смысле) случайного процесса  $x(t)$  на конечном интервале  $T_N = [t_0, \dots, t_{N-1}]$ . При этом сигнал (1) имеет нулевое математическое ожидание и известную корреляционную функцию

$$R(\tau) = R(i, j) = M[x_i x_j], \quad \tau, i, j \in J_N, \tag{2}$$

где  $\tau = |i - j|$ ,  $M[\cdot]$  – оператор математического ожидания. Аппроксимируем последовательность  $\{x_i\}$  другим вещественным стационарным случайным сигналом  $\{z_i\}$ , который описывается векторным стохастическим разностным уравнением

$$\begin{aligned} \{z_i\} &= \{z_i \cong \bar{z}_k^{(v)}\}, \quad k = [i/(n-s)]_o, \quad v_i = i - k(n-s), \quad i \in J_N & (a) \\ \bar{z}_k &= \Phi_1 \bar{z}_{k-1} + \Phi_2 \bar{z}_{k-2} + \bar{w}_k, \quad k = 2, \dots, M-1, & (b) \\ M[\bar{w}_k] &= \mathbf{0}, \quad M[\bar{w}_k \bar{w}_l^T] = \mathbf{Q} \delta_{k,l}, \quad M[\bar{w}_k \bar{z}_0^T] = \mathbf{0}, \quad M[\bar{w}_k \bar{z}_1^T] = \mathbf{0} & (c) \\ M[\bar{z}_0] &= M[\bar{z}_1] = \mathbf{0}, \quad M[\bar{z}_0 \bar{z}_0^T] = \Gamma_0, \quad M[\bar{z}_0 \bar{z}_1^T] = \Gamma_1 & (d) \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $\bar{z}_k = (z_k^{(0)}, z_k^{(1)}, \dots, z_k^{(n-1)})^T = (z_{i_k}, z_{i_k+1}, \dots, z_{i_k+n-1})^T$  –  $n$ -мерный вектор, заданный в скользящем временном окне,  $\Delta_k = \{i_k, i_k + 1, \dots, i_k + n - 1\} \subseteq J_N$ ,  $i_k = (n-s)k$ ,  $1 \leq n \leq N$ ;  $\bar{z}_0 = (z_0, \dots, z_{n-2}, z_{n-1})^T$ ,  $\bar{z}_1 = (z_{n-s}, z_{n-s+1}, \dots, z_{2n-s-1})^T$ ,  $n, M, N$  – натуральные числа;  $0 \leq s \leq n-1$  – показывает, сколько общих элементов у соседних векторов (параметр зацепления);  $M = \lceil N/(n-s) \rceil$ ;  $[\cdot]_o$  – оператор взятия целой части числа;  $\lceil x \rceil$  – округление до ближайшего целого  $\geq x$ ;  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера;  $\bar{w}_k$  –  $n$ -мерный вектор формирующего шума. Параметры модели  $\Phi_1, \Phi_2, \mathbf{Q}$  – вещественные циркулянтные матрицы размерности  $n \times n$ , причем  $\mathbf{Q}$  – невырожденная. Запись  $z_i \cong \bar{z}_k^{(v)}$ ,  $v_i \in \{0, \dots, n-s-1\}$  в (3а) означает, что  $i$ -ое значение аппроксимирующего процесса  $\{z_i\}$  является  $v_i$ -ой компонентой вектора  $\bar{z}_k$ , т.е. процедура распаковки векторного процесса (3) сводится к последовательному выстраиванию векторов  $\mathbf{u}_k = (z_k^{(0)}, z_k^{(1)}, \dots, z_k^{(n-s-1)})^T$  в один столбец:  $\{z_i\} = \{\mathbf{u}_0^T, \mathbf{u}_1^T, \dots, \mathbf{u}_{M-1}^T\}$ . Модель (3) будем называть рекуррентной циркулянтной  $n$ -моделью 2-го порядка. Фактически, она является дальнейшим развитием аналогичной модели 1-го порядка, приведенной в [2].

Напомним [3], что элементы любой циркулянтной  $(n \times n)$ -матрицы  $\mathbf{A} = (A(i, j))$ ,  $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  удовлетворяют условию  $A(i, j) = A(i! j)$ , (где «! » – вычитание по модулю  $n$ ). Семейство  $H_o = \{\mathbf{A}^{(n)} \cong (A(i! j))\}$  всех таких матриц образует линейное коммутативное подпространство евклидова пространства  $\Lambda = \{\mathbf{A}\}$  квадратных  $(n \times n)$ -матриц со скалярным произведением и нормой

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T), \quad \|\mathbf{A}\| = \langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle^{1/2}, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \Lambda.$$

Обозначим  $\bar{\mathbf{x}}_k = (x_{i_k}, x_{i_k+1}, \dots, x_{i_k+n-1})^T$ , тогда задача наилучшей аппроксимации сводится к нахождению оптимальных параметров  $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \hat{\mathbf{Q}}$  модели (3) по критерию минимума среднего квадрата ошибки (СКО)

$$(\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \hat{\mathbf{Q}}) = \arg \min_{\Phi_1, \Phi_2, \mathbf{Q} \in H_o} M[\|\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{z}_k\|^2], \tag{4}$$



Определим корреляционные матрицы векторных стационарных случайных процессов  $\bar{\mathbf{x}}_k$  и  $\bar{\mathbf{z}}_k$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= M[\bar{\mathbf{x}}_k \bar{\mathbf{x}}_k^T], \quad \mathbf{R}_1 = M[\bar{\mathbf{x}}_k \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T], \quad \mathbf{R}_2 = M[\bar{\mathbf{x}}_k \bar{\mathbf{x}}_{k+2}^T]; \\ \mathbf{\Gamma}_0 &= M[\bar{\mathbf{z}}_k \bar{\mathbf{z}}_k^T], \quad \mathbf{\Gamma}_1 = M[\bar{\mathbf{z}}_k \bar{\mathbf{z}}_{k+1}^T], \quad \mathbf{\Gamma}_2 = M[\bar{\mathbf{z}}_k \bar{\mathbf{z}}_{k+2}^T] \end{aligned} \quad k=0, \dots, M-1 \quad (5)$$

Нетрудно убедиться, что  $\mathbf{\Gamma}_0, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2 \in H_o$ . Если взять ковариации  $M[\bar{\mathbf{z}}_k \bar{\mathbf{z}}_{k+l}^T]$ ,  $l=0,1,2$  от обеих частей равенства (3) и учесть  $\mathbf{\Gamma}_1^T = M[\bar{\mathbf{z}}_k \bar{\mathbf{z}}_{k-1}^T]$ ,  $\mathbf{\Gamma}_2^T = M[\bar{\mathbf{z}}_k \bar{\mathbf{z}}_{k-2}^T]$  и (5), то получим

$$\mathbf{\Gamma}_0 = \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{\Phi}_1^T + \mathbf{\Phi}_2 \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{\Phi}_2^T + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Gamma}_1^T \mathbf{\Phi}_2^T + \mathbf{\Phi}_2 \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{\Phi}_1^T + \mathbf{Q}, \quad (6)$$

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{\Phi}_1^T + \mathbf{\Gamma}_1^T \mathbf{\Phi}_2^T, \quad (7)$$

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{\Phi}_1^T + \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{\Phi}_2^T. \quad (8)$$

Уравнения (6)-(8) можно записать в следующем виде

$$\mathbf{\Gamma}_0 = (\mathbf{\Phi}_1 \quad \mathbf{\Phi}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_0 & \mathbf{\Gamma}_1^T \\ \mathbf{\Gamma}_1 & \mathbf{\Gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_1^T \\ \mathbf{\Phi}_2^T \end{pmatrix} + \mathbf{Q}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 \\ \mathbf{\Gamma}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_0 & \mathbf{\Gamma}_1^T \\ \mathbf{\Gamma}_1 & \mathbf{\Gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_1^T \\ \mathbf{\Phi}_2^T \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$(\mathbf{\Phi}_1 \quad \mathbf{\Phi}_2) = (\mathbf{\Gamma}_1^T \quad \mathbf{\Gamma}_2^T) \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_0 & \mathbf{\Gamma}_1^T \\ \mathbf{\Gamma}_1 & \mathbf{\Gamma}_0 \end{pmatrix}^{-1}, \quad (9)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{\Gamma}_0 - (\mathbf{\Gamma}_1^T \quad \mathbf{\Gamma}_2^T) \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_0 & \mathbf{\Gamma}_1^T \\ \mathbf{\Gamma}_1 & \mathbf{\Gamma}_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 \\ \mathbf{\Gamma}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}_0 - (\mathbf{\Phi}_1 \quad \mathbf{\Phi}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 \\ \mathbf{\Gamma}_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Определим симметрические квадратные корни корреляционных матриц

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}_0^{1/2}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{\Gamma}_0^{1/2}. \quad (11)$$

Тогда справедливы представления  $\bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{C} \bar{\mathbf{e}}_k$ ,  $\bar{\mathbf{z}}_k = \mathbf{B} \bar{\mathbf{e}}_k$ , где  $\bar{\mathbf{e}}_k$  – случайный вектор,  $M[\bar{\mathbf{e}}_k] = \mathbf{0}$ ,  $M[\bar{\mathbf{e}}_k \bar{\mathbf{e}}_l^T] = \mathbf{I} \delta_{k,l}$ , а выражение для ошибки аппроксимации  $M[\|\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{z}}_k\|^2]$  в скользящем временном окне  $\Delta_k$  и критерий (4) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} M[\|\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{z}}_k\|^2] &= M[\|(\mathbf{C} - \mathbf{B})\bar{\mathbf{e}}_k\|^2] = M[\text{tr}(\mathbf{C} - \mathbf{B})\bar{\mathbf{e}}_k \bar{\mathbf{e}}_k^T (\mathbf{C} - \mathbf{B})] = \|\mathbf{C} - \mathbf{B}\|^2, \\ \|\mathbf{C} - \mathbf{B}(\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \mathbf{Q})\|^2 &\rightarrow \min_{\mathbf{B}(\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \mathbf{Q}) \in H_o}, \end{aligned}$$

где запись  $\mathbf{B}(\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \mathbf{Q})$  в неявном виде указывает на зависимость от матричных параметров модели (3). Следовательно, оптимальное решение  $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(\hat{\mathbf{\Phi}}_1, \hat{\mathbf{\Phi}}_2, \hat{\mathbf{Q}})$  данной экстремальной задачи является проекцией матрицы  $\mathbf{C} \in \Lambda$  на евклидово подпространство циркулянтных матриц  $H_o$ . Это решение единственное и определяется выражением [4,5]:

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{C}^{(n)} = (1/n) \mathbf{E}_n^j \sum_{j=0}^{n-1} \langle \mathbf{C}, \mathbf{E}_n^j \rangle \mathbf{E}_n^j, \quad (12)$$

где  $(\cdot)^{(n)}$  – оператор ортогонального проектирования на подпространство  $H_o$ ;  $\mathbf{E}_n$  – циркулянтная матрица перестановок размерности  $n \times n$ , множество степеней которых  $\mathbf{E}_n^i, i=0, \dots, N-1$  образует ортогональный базис в  $H_o$ .

Пусть  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_l = \mathbf{\Gamma}_l(\hat{\mathbf{\Phi}}_1, \hat{\mathbf{\Phi}}_2, \hat{\mathbf{Q}})$   $l=0,1,2$  – корреляционные матрицы векторного процесса (3), удовлетворяющего критерию (4), и покажем, что все они могут быть вычислены из исходных корреляционных матриц  $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in \Lambda$  с помощью преобразования (12). Используя представление  $\bar{\mathbf{z}}_k = \hat{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{e}}_k$ , имеем  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_l = M[\bar{\mathbf{z}}_k \bar{\mathbf{z}}_{k+l}^T] = \hat{\mathbf{B}} M[\bar{\mathbf{e}}_k \bar{\mathbf{e}}_{k+l}^T] \hat{\mathbf{B}}^T = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{G}_l \hat{\mathbf{B}}^T$ . Отсюда при  $l=0$  с учетом (11),(12)

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_0 = \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}^T = [\mathbf{R}_0^{1/2}]^{(n)} [\mathbf{R}_0^{1/2}]^{(n)}. \quad (13)$$

Если  $l=1,2$ , воспользуемся известными [4] свойствами оператора  $(\cdot)^{(n)}$ :

$$(\mathbf{A}_1 \mathbf{A})^{(n)} = (\mathbf{A} \mathbf{A}_1)^{(n)} = \mathbf{A}_1 (\mathbf{A})^{(n)}, \quad (\mathbf{A}_1)^n = \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in \Lambda, \quad \forall \mathbf{A} \in \Lambda$$



и выполним тождественные преобразования  $\hat{\Gamma}_l = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{G}_l\hat{\mathbf{B}}^T = (\mathbf{C})^{(n)}\mathbf{G}_l(\mathbf{C}^T)^{(n)} = (\mathbf{C}\mathbf{G}_l\mathbf{C}^T)^{(n)} = (\mathbf{C}\mathbf{M}[\bar{\mathbf{e}}_k \bar{\mathbf{e}}_{k+l}^T]\mathbf{C}^T)^{(n)} = (\mathbf{M}[\bar{\mathbf{x}}_k \bar{\mathbf{x}}_{k+l}^T])^{(n)} = (\mathbf{R}_l)^{(n)}$ , т.е.

$$\hat{\Gamma}_1 = \mathbf{R}_1^{(n)}, \hat{\Gamma}_2 = \mathbf{R}_2^{(n)}. \tag{14}$$

Таким образом, алгоритм наилучшей, по критерию (4), аппроксимации стационарного случайного процесса (1) рекуррентной циркулянтной моделью 2-го порядка (3) состоит в следующем. Сначала по заданной корреляционной функции (2) строятся корреляционные матрицы  $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ , затем по формулам (13), (14) вычисляются  $\hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2$ , с помощью которых по (9) и (10) определяются матричные параметры  $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \hat{\mathbf{Q}}$  модели (3). Заметим, что описанные в [2] рекуррентная циркулянтная модель 1-го порядка и ее алгоритм идентификации могут быть получены из формул (6)-(8), (13),(14), если в них положить  $\Phi_2 = \mathbf{0}$ . Соответствующие выражения имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1 &= \hat{\Gamma}_1^T \hat{\Gamma}_0^{-1}, \hat{\mathbf{Q}} = \hat{\Gamma}_0 - \hat{\Phi}_1 \hat{\Gamma}_1 \\ \hat{\Gamma}_0 &= [\mathbf{R}_0^{1/2}]^{(n)} [\mathbf{R}_0^{1/2}]^{(n)}, \hat{\Gamma}_1 = \mathbf{R}_1^{(n)} \end{aligned} \tag{15}$$

Наконец, нерекуррентная циркулянтная модель [4,5], описывающая N-стационарный случайный процесс, может рассматриваться как рекуррентная модель 0-го порядка, получаемая из (3), если в ней положить  $\bar{\mathbf{z}}_0 = \bar{\mathbf{z}} = (z_0, \dots, z_{N-1})^T$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ ,  $n = N, s = 0$ , при этом

$$\{z_i\} = \{z_i \equiv \bar{\mathbf{z}}^{(i)}\}, i \in J_N, \hat{\Gamma} = [\mathbf{R}^{1/2}]^{(n)} [\mathbf{R}^{1/2}]^{(n)}, \mathbf{R} = (R(|i-j|)), \tag{16}$$

где  $R(\tau)$  – корреляционная функция (2) исходного процесса. Отметим, что процедуры оценивания параметров рекуррентных моделей (9)-(10), (15) не зависят от  $N$ . Поэтому они будут справедливы и на бесконечном интервале представления сигнала.

**3. Вычисление корреляционных функций.** Пусть аппроксимирующий процесс  $\{z_i\}$  описывается рекуррентной моделью (3), а его параметры выбраны по описанному выше алгоритму идентификации. Тогда его корреляционную функцию на интервале  $i \in J_N = \{0, \dots, N-1\}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} R_z(i) &= \mathbf{M}[z_0 z_i] = \mathbf{M}[\bar{\mathbf{z}}_0^{(v_i)} \bar{\mathbf{z}}_k^{(v_i)}] = \Gamma_k(0, v_i), i \in J_N \\ k &= [i/(n-s)]_0, v_i = i - k(n-s), k \in \{0, 1, \dots, M-1\} \end{aligned} \tag{17}$$

где  $0 \leq v_i \leq n-s-1$  определяется (3а);  $\Gamma_l = \mathbf{M}[\bar{\mathbf{z}}_0 \bar{\mathbf{z}}_l^T] = (\Gamma_l(\mu, \nu))$ ,  $\mu, \nu \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  – корреляционная матрица векторного процесса (3б), отвечающая временному сдвигу  $l \in \{0, 1, \dots, M-1\}$ . Если обе части уравнения (3б) умножить справа на  $\bar{\mathbf{z}}_{k-l}^T$  и определить математическое ожидание, получим

$$\Gamma_l^T = \mathbf{M}[\bar{\mathbf{z}}_k \bar{\mathbf{z}}_{k-l}^T] = \Phi_1 \mathbf{M}[\bar{\mathbf{z}}_{k-1} \bar{\mathbf{z}}_{k-1}^T] + \Phi_2 \mathbf{M}[\bar{\mathbf{z}}_{k-2} \bar{\mathbf{z}}_{k-1}^T] + \mathbf{M}[\bar{\mathbf{w}}_k \bar{\mathbf{z}}_{k-l}^T], \quad 2 \leq l, k \leq M-1$$

Отсюда, с учетом (3с), (5) и свойства стационарности  $\Gamma_l^T = \mathbf{M}[\bar{\mathbf{z}}_k \bar{\mathbf{z}}_{k-l}^T]$  приходим к рекуррентному уравнению

$$\begin{aligned} \Gamma_l &= \Gamma_{l-1} \Phi_1^T + \Gamma_{l-2} \Phi_2^T, \quad 1 \leq l \leq M-1 \\ \Gamma_{-1} &= \hat{\Gamma}_1^T, \Gamma_0 = \hat{\Gamma}_0, \Phi_1 = \hat{\Phi}_1, \Phi_2 = \hat{\Phi}_2, \end{aligned} \tag{18}$$

где начальные условия определяются формулами (13), (14), (9). Как частный случай, при  $\Phi_2 = \mathbf{0}$  получаем аналогичные выражения для рекуррентной циркулянтной модели 1-го порядка

$$\begin{aligned} \Gamma_l &= \Gamma_{l-1} \Phi_1^T, \quad 1 \leq l \leq M-1 \\ \Gamma_0 &= \hat{\Gamma}_0, \Phi_1 = \hat{\Phi}_1. \end{aligned} \tag{19}$$

Для нерекуррентной циркулянтной модели  $v_i = i$  и с учетом (16), (17)

$$R_z(i) = \mathbf{M}[z_0 z_i] = \mathbf{M}[\bar{\mathbf{z}}_0^{(i)} \bar{\mathbf{z}}_0^{(i)}] = \Gamma(0, i), \quad i \in J_N \tag{20}$$

Формулы (16)-(20) полностью определяют алгоритм вычисления корреляционной функции аппроксимирующего процесса для любой указанных циркулянтных моделей.



Как следует из (17), структура корреляционной функции сильно зависит от величины параметра зацепления  $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Если  $s = 0$ , имеем

$$R_z(i) = \Gamma_k(0, i - [i/n]_o \cdot n) = \Gamma_{[i/n]_o}(0, (i! \ 0)), \quad i \in J_N, \quad (21)$$

т.е. корреляционная функция (21) имеет  $n$ -периодическую структуру, а соответствующая корреляционная матрица

$$\mathbf{R}_z = (R_z(|i-j|)) = (\Gamma_{[|i-j|/n]_o}(i! \ j)), \quad i, j \in \mathcal{D}. \quad (22)$$

является эрмитовой блочно-теплицевой с циркулянтными блоками  $\Gamma_k = \Gamma_k((\nu! \ \mu))$ ,  $\nu, \mu \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , количество которых равно  $M = N/n$ . Однако, при  $s \neq 0$  циркулянтная структура блоков нарушается. Все сказанное справедливо для рекуррентных циркулянтных моделей 1-го и 2-го порядка. В случае нерекуррентной модели (16) корреляционная функция (20) и соответствующая корреляционная матрица

$$\mathbf{R}_z = (R_z(|i-j|)) = (\Gamma(i! \ j)), \quad i, j \in \mathcal{D} \quad (23)$$

становятся циркулянтными.

Отметим, что специальная структура матриц (22), (23) позволяет значительно упростить вычислительные алгоритмы оптимальной обработки аппроксимирующих процессов  $\{z_i\}$ . Для этого достаточно применить к ковариационным матрицам  $\mathbf{R}_z$  унитарное блочно-диагональное преобразование подобия вида

$$\Sigma_z = \mathbf{U}^H \mathbf{R}_z \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_l = \mathbf{W} = \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(j \frac{2\pi l q}{n}\right) \right), \quad l, q = 0, \dots, n-1 \quad (24)$$

приводящее  $\mathbf{R}_z$  к блочно-теплицевой матрице  $\Sigma_z$  с диагональными блоками  $\Sigma_k = \mathbf{W}^H \Gamma_k \mathbf{W} = \text{diag}\{\sigma_{1k}, \dots, \sigma_{nk}\}$ . (Здесь  $\mathbf{W}$  – унитарная матрица Фурье, « $H$ » – символ эрмитового сопряжения). Такая матрица имеет разреженную структуру с большим числом нулей. Кроме того, она имеет простой и эффективный алгоритм обращения [6], причем обратная матрица  $\Sigma_k^{-1}$  также является разреженной. В частном случае (23), преобразование (24) приводит к диагональной матрице  $\Sigma_z = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$ .

Аналогично, умножив векторное рекуррентное уравнение (3b) на матрицу  $\mathbf{W}^H$  справа, т.е. применив к обеим его частям дискретное преобразование Фурье (ДПФ), получим

$$\bar{\mathbf{z}}_{k*} = \Phi_{1*} \bar{\mathbf{z}}_{k-1*} + \Phi_{2*} \bar{\mathbf{z}}_{k-2*} + \bar{\mathbf{w}}_{k*}, \quad \bar{\mathbf{y}}_{k-1*} = \bar{\mathbf{z}}_{k-1*} + \bar{\boldsymbol{\mu}}_{k-1*}, \quad k = 2, \dots, M-1 \quad (25)$$

$$\mathbf{M}[\bar{\boldsymbol{\mu}}_{k*}] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}[\bar{\mathbf{w}}_{k*}] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}[\bar{\boldsymbol{\mu}}_{k*} \bar{\boldsymbol{\mu}}_{k*}^T] = \sigma_{\mu}^2 \mathbf{I}_{n \times n}, \quad \mathbf{M}[\bar{\mathbf{w}}_{k*} \bar{\mathbf{w}}_{k*}^T] = \mathbf{Q}_*,$$

где согласно известному свойству циркулянтных матриц [2,6]  $\mathbf{Q}_* = \mathbf{W}^H \mathbf{Q} \mathbf{W}$ ,  $\Phi_{1*} = \mathbf{W}^H \Phi_1 \mathbf{W}$ ,  $\Phi_{2*} = \mathbf{W}^H \Phi_2 \mathbf{W}$  – являются диагональными. (Наличие звездочки «\*» в нижнем индексе далее означает, что соответствующий вектор или матрица относятся к спектральной области ДПФ). Таким образом, переход в спектральную область приводит модель (3) к диагональной канонической структуре (25). Это значительно уменьшает вычислительные затраты, связанные с ее дальнейшим применением в различных приложениях (спектральный анализ, фильтрация, экстраполяция и т.д.).

**4. Анализ аппроксимирующих свойств.** В разделе 1 мы фактически показали, что для стационарного случайного процесса (1) с заданной корреляционной функцией (2) наилучшим рекуррентным циркулянтным приближением 2-го порядка является процесс, описываемый стохастическим уравнением (3) с параметрами  $\Phi_1, \Phi_2, \mathbf{Q}$ . При этом, варьируя параметром зацепления  $s$  и размером скользящего окна  $n$  можно изменять структуру циркулянтной модели (3) и ее аппроксимирующие свойства. Процедуру выбора адекватной структуры будем называть – идентификацией модели. В нашем случае она сводится к выбору таких значений  $n$  и  $s$ , при которых удовлетворяется выбранный критерий качества аппроксимации (см. ниже). Для упрощения дальнейшего изложения обо-



значим модель (3) с оптимально выбранными параметрами  $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \hat{Q}$  через  $M_2(s, n, N)$ , аналогичную рекуррентную циркулянтную модель 1-го порядка [2] – через  $M_1(s, n, N)$ , нерекуррентную циркулянтную модель [4] (нулевого динамического порядка) – через  $M_0(N)$ . Наконец, общую модель случайного процесса (1) с произвольной корреляционной функцией (2) обозначим через  $M(N)$ . Заметим, что в частном случае модели  $M_1(0, 1, N)$ ,  $M_2(0, 1, N)$  описывают известные процессы авторегрессии 1-го и 2-го порядков, у которых параметры совпадают с решением уравнений Юла-Уолкера [1].

Для сравнительного анализа аппроксимирующих свойств указанных моделей поступим следующим образом. Выберем непрерывный случайный сигнал  $x(t)$  с известной корреляционной функцией  $R(t)$ , дискретизируем его по времени  $x_i = x(t_i) = x(\delta \cdot i)$  с шагом  $\delta$  и запишем дискретную корреляционную функцию  $R(\tau) = R(\delta\tau)$ ,  $\tau \in J_N$  на конечном интервале  $J_N = \{0, \dots, N-1\}$ . Затем, следуя описанным в разделе 1 процедурам, аппроксимируем полученный дискретный случайный сигнал  $\{x_i\}$ ,  $i \in J_N$  циркулянтными моделями  $M_2(s, n, N)$ ,  $M_1(s, n, N)$ ,  $M_0(N)$  и вычислим по формулам (17)-(20) их корреляционные функции  $R_z(i)$ , которые обозначим  $R_{2z}(i)$ ,  $R_{1z}(i)$ ,  $R_{0z}(i)$ , соответственно. Тогда для сигнала  $\{x_i\}$  и всех указанных его моделей можно определить соответствующие корреляционные матрицы  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_{2z}$ ,  $\mathbf{R}_{1z}$ ,  $\mathbf{R}_{0z}$  и среднеквадратически-эквивалентные случайные процессы  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{1/2} \bar{\mathbf{e}}$ ,  $\bar{\mathbf{z}}_{mz} = \mathbf{R}_{mz}^{1/2} \mathbf{e}$ ,  $m \in \{0, 1, 2\}$ , где  $(\cdot)^{1/2}$ , симметрический квадратный корень из матрицы,  $\bar{\mathbf{e}}$  – случайный  $N$ -вектор, с параметрами  $M[\bar{\mathbf{e}}] = \mathbf{0}$ ,  $M[\bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{e}}^T] = \mathbf{I}_N$ . Для оценки качества аппроксимации сигнала  $\{x_i\}$ ,  $i \in J_N$  циркулянтными моделями будем использовать следующие характеристики и критерии.

**К1.** Текущие среднеквадратические ошибки (СКО) аппроксимации  $e_{mz}(i)$  на отрезке  $J_N = \{0, \dots, N-1\}$  и усредненные по времени относительные СКО  $\varepsilon_{mz}$ :

$$e_{mz}(i) = \sqrt{M[(x_i - z_{mz})^2]} = \sqrt{\mathbf{O}_{mz}(i, i)}, \quad \varepsilon_{mz} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} e_{mz}^2(i) / \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_x^2(i)} \cdot 100\%, \quad i \in J_N, \quad (25)$$

$$\mathbf{O}_{mz} = M[(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{z}}_{mz})(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{z}}_{mz})^T] = M[(\mathbf{R}^{1/2} - \mathbf{R}_{mz}^{1/2}) \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{e}}^T (\mathbf{R}^{1/2} - \mathbf{R}_{mz}^{1/2})^T] = (\mathbf{R}^{1/2} - \mathbf{R}_{mz}^{1/2})^2,$$

где индекс  $m \in \{0, 1, 2\}$  соответствует порядку аппроксимирующей циркулянтной модели,  $\sigma_x^2(i) = R(i, i)$  – дисперсия значений случайного сигнала  $\{x_i\}$ .  $N \geq n$ .

**К2.** Спектральные плотности мощности (СПМ), которые рассчитываются по соответствующим циклическим корреляционным функциям [7, с.426]:

$$PSD_{mz}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} R_{mz}^{(N)}(i) \exp\{-j2\pi ki/N\}, \quad R_{mz}^{(N)}(i) = [(N-i)R_{mz}(i) + iR_{mz}(N-i)]/N \quad (26)$$

$$PSD(k) = \sum_{i=0}^{N-1} R^{(N)}(i) \exp\{-j2\pi ki/N\}, \quad R^{(N)}(i) = [(N-i)R(i) + iR(N-i)]/N \quad (27)$$

где  $k \in \{0, \dots, N-1\}$  частотный индекс;  $PSD(k)$  – спектральная плотность сигнала  $\{x_i\}$ .

Ниже для проведения эксперимента выбран дискретный случайный сигнал  $x_i$  с корреляционной функцией

$$R_0(\tau) = \sum_{k=1}^2 \exp(-\alpha_k \delta |\tau|) \left( \cos(2\pi f_k \delta \tau) + \frac{\alpha_k}{2\pi f_k} \sin(2\pi f_k \delta |\tau|) \right), \quad \tau \in \{0, \dots, N-1\} \quad (28)$$

$$f_1 = 59, \quad f_2 = 31, \quad \alpha_1 = 68,54, \quad \alpha_2 = 49,87, \quad \delta = 1/180, \quad N = 64$$

Алгоритм идентификации рекуррентных моделей  $M_1(s, n, N)$ ,  $M_2(s, n, N)$  состоял в следующем. Среди возможных значений параметров  $n \in \{1, \dots, 64\}$ ,  $s \in \{0; 1; n-1\}$  методом перебора выбирались те, при которых текущие ошибки аппроксимации (25) оказывались минимальными, а в их поведении отсутствовала периодичность (последнее гарантирует устойчивость аппроксимирующих характеристик модели). Эксперимент показал, что для  $N > n$  наилучшая аппроксимация случайного сигнала с корреляционной функцией (28) у модели  $M_1(s, n, N)$  достигается при  $n=2$ ,  $s=0$ , а у модели  $M_2(s, n, N)$  – при  $n=2$ ,  $s=1$ .



Если же  $N = n = 64$ , т. е. когда аппроксимация сигнала осуществляется в пределах размеров скользящего окна рекуррентной модели, то минимум ошибки (25) в обоих случаях достигается при  $s = n - 1$ , а величина этой ошибки практически одинакова.

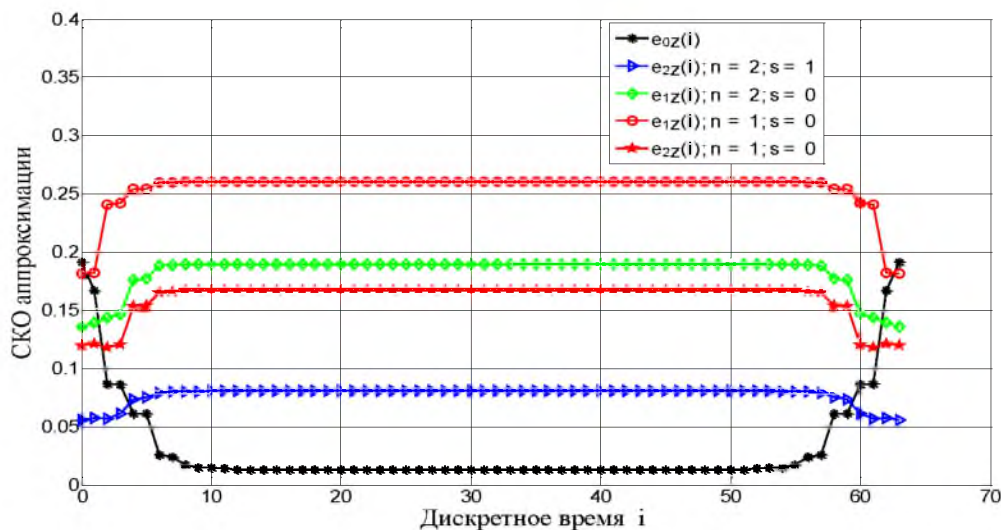


Рис.1. Текущие ошибки аппроксимации,  $N = n$

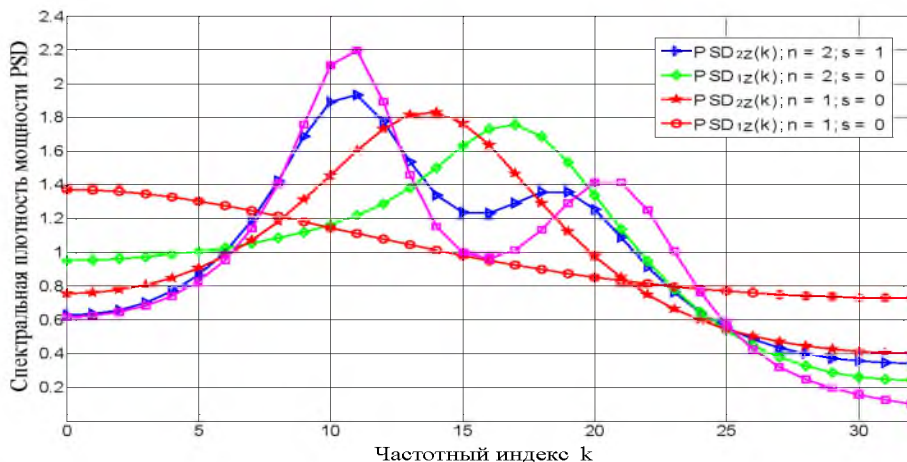


Рис. 2. Спектральная плотность мощности (PSD),  $N = n$

На рис.1 и рис. 3 представлены графики текущих ошибок (25) для всех указанных значений параметров  $n$  и  $s$ , а на рис.2, рис. 4 – спектральные плотности мощности (26) соответствующих аппроксимирующих процессов. Кроме того, для сравнения на этих же рисунках приведены аналогичные графики, отвечающие известным [1] авторегрессионным моделям 1-го и 2-го порядков  $M_1(0,1,N)$ ,  $M_2(0,1,N)$ . Анализ этих кривых на рис.1 и рис. 2 показывает, что при  $N = n$  применение рекуррентных циркулянтных моделей 2-го порядка, вместо моделей 1-го порядка, позволяет улучшить аппроксимацию как во временной, так и в частотной областях. При этом средние относительные ошибки для моделей  $M_1(0,2,N)$ ,  $M_2(1,2,N)$ , соответственно, равны  $\varepsilon_{1z} = 18,36\%$ ,  $\varepsilon_{2z} = 7,78\%$ , а выигрыш по точности составляет  $\eta_{12} = |\varepsilon_{1z} - \varepsilon_{2z}| = 10,6\%$ . В то же время, эти модели проигрывают нерекуррентной модели  $M_0(N)$ , что объясняется гораздо большим числом  $N = n$  параметров, участвующих в описании этой модели. Кривые на этих же рисунках показывают, что модели  $M_1(0,2,N)$ ,  $M_2(1,2,N)$  по сравнению с авторегрессионными моделями  $M_1(0,1,N)$ ,  $M_2(0,1,N)$  того же динамического порядка обладают более хорошими аппроксимирующими свойствами. При этом для моделей  $M_1(0,1,N)$ ,  $M_2(0,1,N)$ , средние относительные ошибки (25) равны  $\varepsilon_{1za} = 25,47\%$ ,  $\varepsilon_{2za} = 16,11\%$ , а соответствующие проиг-



рыши по точности составляют  $\eta_{1a} = |\varepsilon_{1za} - \varepsilon_{1z}| = 7,11\%$ ,  $\eta_{2a} = |\varepsilon_{2za} - \varepsilon_{2z}| = 8,33\%$  (здесь  $a$  в нижнем индексе указывает на авторегрессионную модель). Интересно также отметить, что двухмодальность спектра исходного сигнала (кривая PSD(k) на рис.2) воспроизводится только моделью  $M_2(1,2,N)$ . Чтобы выявить этот факт с помощью модели авторегрессии, пришлось бы использовать модель  $M_4(0,1,N)$  с динамическим порядком 4.

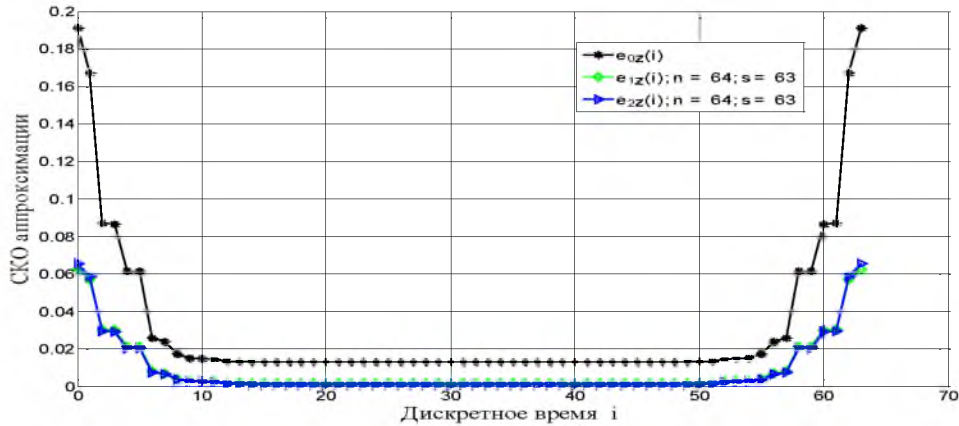


Рис. 3. Текущие ошибки аппроксимации,  $N = n = 64$

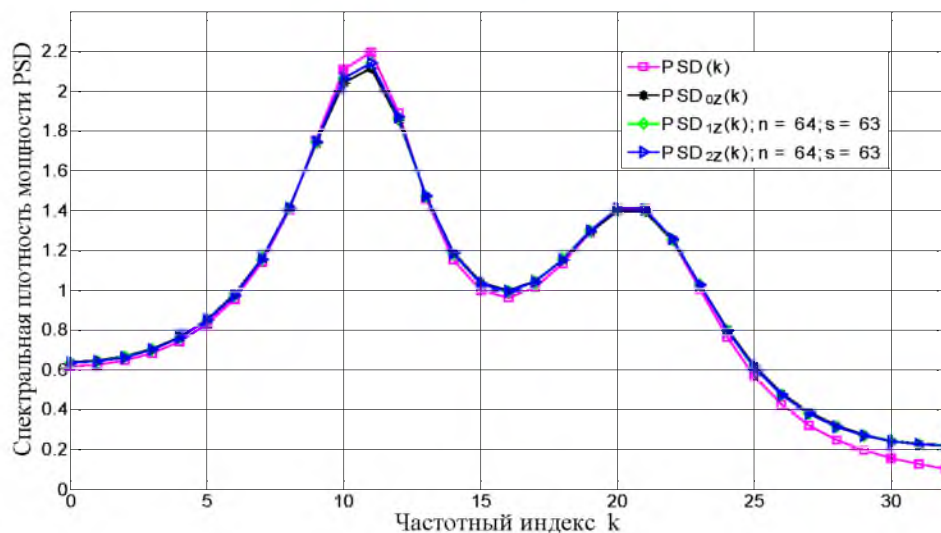


Рис. 4. Спектральная плотность мощности (PSD),  $N = n = 64$

Кривые на рис.3 показывают, что при  $N = n = 64$ ,  $s = n - 1$  (т.е. когда интервал аппроксимации сигнала совпадает с размером скользящего окна) текущие и средние ошибки (25) для моделей  $M_1(n-1,n,N)$ ,  $M_2(n-1,n,N)$  становятся очень маленькими:  $\varepsilon_{1z} \cong \varepsilon_{2z} = 1,8\%$ . Это почти в три раза меньше  $\varepsilon_{oz} = 5,38\%$ , чем у нерекуррентной модели  $M_0(N)$ . В результате спектры PSD (26) для этих моделей на рис. 4 практически совпадают со спектром (27) исходного сигнала. Последнее имеет важное практическое значение, так как в отличие от  $M_0(N)$ , рекуррентные модели скользящего окна  $M_1(n-1,n,N)$ ,  $M_2(n-1,n,N)$  являются параметрическими. Это позволяет строить на их основе эффективные алгоритмы параметрического спектрального оценивания сигналов [7,8]. Причем, равенство ошибок  $\varepsilon_{1z} \cong \varepsilon_{2z}$  означает, что для стационарных сигналов (1) выигрыш от увеличения динамического порядка модели скользящего окна отсутствует.

Можно показать, что ситуация меняется, если анализируемый скалярный сигнал  $x(t)$  и его дискретная аппроксимация (3a) являются нестационарными, например,  $x(t)$  – узкополосный сигнал, у которого центральная частота изменяется во времени. Если при этом векторный аппроксимирующий процесс (3b) стационарен (в широком смысле), то





все изложенное в разделе 2, касающееся нахождения оптимальных параметров модели, оказывается справедливым. Второй порядок у модели  $M_2(n-1, n, N)$  в данном случае позволяет более адекватно описывать сигнал и синтезировать алгоритмы многоканальной частотной автоподстройки.

Таким образом, при соответствующем выборе структурных параметров  $s$ ,  $n$  и матричных параметров  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $Q$  применение рекуррентных циркулянтных моделей скользящего окна (3) позволяет хорошо аппроксимировать широкий класс случайных сигналов.

### Список литературы

1. С.Л. Марпл-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
2. Волчков В.П. Оптимальное рекуррентное представление случайных сигналов в базисах функций Виленкина-Крестенсона. // Радиотехника и электроника, 1997, т. 42, № 8. С. 947-958.
3. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
4. Волчков В.П. Фидуциальное оценивание  $m$ -стационарных гауссовских случайных процессов. // Радиотехника и электроника, 1997, т. 42, № 2. С. 150-160.
5. Синтез рекуррентных  $m$ -фильтров с заданной амплитудно-частотной характеристикой. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия «Информатика и прикладная математика», №2(31), Вып. 3, Белгород, 2006.
6. Воеводин И.И., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987.
7. В.П. Волчков. Параметрическое спектральное оценивание случайных сигналов с использованием  $m$ -рекуррентных моделей. // Радиотехника и электроника, 1998, т. 43, № 4. С. 421-437.
8. В.П. Волчков. Фидуциальное оценивание центральной частоты случайного квазигармонического сигнала в базисе дискретных экспоненциальных функций.

## APPROXIMATION OF THE RANDOM SIGNALS WITH THE HELP OF RECURRENT CIRCULANT MODELS OF RUNNING WINDOW

**V.P. VOLCHKOV**  
**N.E. POBORCHAYA**  
**A.M. SHLOMA**

*Moscow technical university  
of telecommunications and  
informatics*

*e-mail: volchkovval-  
ery@mail.ru*  
*n.poborchaya@mail.ru*

One of a foreground task of digital signal processing is a decrease of computational complexity of appropriate algorithms, but without substantial loss accuracy. The sake of synthesis this algorithms it's needed a good adequate signal models. In the article, the vectorial recurrent circulant model of running windows is proposed for random signals representation. For given correlation function of signal the computational procedures of parameters this model and expression of approximating correlation function are derived. The comparative analysis of approximation property of the proposal model and other known models are executed. Accuracy behavior and efficiency of these algorithms are confirmed in experimental research..

Key words: random process, random signal, autoregressive model, stochastic difference equalization, circulant model, correlation function, Fourier transform.