MSC 11S40

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДРОБНЫХ МОМЕНТОВ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

С.А. Гриценко, Л.Н. Куртова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru, kurtova@bsu.edu.ru

Аннотация. Пусть v – натуральное число, $\Phi(T)$ – сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \to +\infty$ функция. Получена асимптотическая формула для дробных моментов дзета-функции Римана вида $\int\limits_T^{2T} |\zeta(\sigma+it)|^{2/v}dt$ при $1/2+\Phi(T)/\log T \leq \sigma < 1$.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, дробные моменты дзета-функции Римана, асимптотическая формула.

1. Введение

Пусть k — неотрицательное вещественное число, $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$, $T \geq 2$. Интеграл вида

$$I_k(\sigma, T) = \int\limits_T^{2T} |\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt$$

будем называть моментом дзета-функции Римана степени $2k$.

Определим мультипликативную функцию $d_k(n)$ из равенства

$$\zeta^k(s) = \prod_p \Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^{-k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1).$$

В 1981 году Р.Т. Турганалиев [1] на основе одной идеи С.М. Воронина доказал, что при $0 < k < 2$, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ справедливо равенство

$$\int\limits_T^{2T} |\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt = T\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}} + O(T^{1-\kappa}), \tag{1}$$

где $\kappa = \kappa(\sigma, k) > 0$. В этой формуле параметр $\sigma > \frac{1}{2}$ фиксирован, то есть не зависит от основного параметра T.

Для приложений особый интерес вызывает случай, когда σ равно $\frac{1}{2}$ или хотя бы стремится к $\frac{1}{2}$ справа с ростом T. В 1985 году И.Ш. Джаббаров [2] доказал, что равенство (1) справедливо при $\frac{1}{2} + \frac{\log\log\log T}{\log\log T} \leq \sigma < 1$.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт 14.A18.21.0357

В настоящей статье получена асимптотическая формула для $I_k(\sigma, T)$ в частном случае, когда $k = \frac{1}{m}$, $m \in N$. Важно отметить, что параметр k фиксирован (не зависит от T). Наша формула справедлива при весьма близких к $1/2$ значениях σ и в этом смысле представляет собой уточнение цитированных выше теорем.

Теорема 1. *Пусть m — натуральное число, $\Phi(T)$ — сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \to +\infty$ функция. Тогда при $\frac{1}{2} + \frac{\Phi(T)}{\ln T} \le \sigma < 1$ справедлива асимптотическая формула*

$$\int_T^{2T} |\zeta(\sigma + it)|^{2/m} dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{1/m}^2(n)}{n^{2\sigma}} + O\left(T(\sigma - 1/2)^{-1/m^2} e^{-0,1\Phi(T)}\right).$$

Возникает вопрос о существовании асимптотических формул для дробных моментов других функций, представимых в виде ряда Дирихле.

В 1991 году А. Сельберг [3] определил класс S рядов Дирихле

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1),$$

удовлетворяющих следующим условиям:

1) функция $(s-1)^m L(s)$ целая конечного порядка при некотором $m \ge 0$;

2) коэффициенты Дирихле $a(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$a(1) = 1, \quad a(n) \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon}$$

для любого положительного ε и всех $n \ge 1$;

3) при $\operatorname{Re} s > 1$ функция $L(s)$ раскладывается в эйлерово произведение:

$$L(s) = \prod_p \left(1 + a(p)p^{-s} + a(p^2)p^{-2s} + \cdots\right),$$

где p пробегает простые числа, $\log L(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}$, где $b(n) = 0$, если n не равно положительной степени простого числа, причем $b(n) \ll n^{\theta}$ для некоторого $\theta \ge 1/2$;

4) $L(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению вида: $\Lambda(s) = \overline{\Lambda(1-\overline{s})}$, где $\Lambda(s) = \eta A^s \prod\limits_{j=1}^{k} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) L(s)$ и $|\eta| = 1, \quad A > 0, \quad \lambda_j > 0, \quad \operatorname{Re} \mu_j \ge 0$.

В статье [4] для любой функции $L(s)$ из S определена ее степень: $d_L = 2\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j$.

Для примитивных (не представляющихся в виде $L_1(s)L_2(s)$, $L_1(s) \in S$, $L_2(s) \in S$) функций из класса S А. Сельберг высказал в работе [3] ряд гипотез, в частности следующую.

Гипотеза. *При $x \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{n \le x} |a(n)|^2 n^{-1} = \log x + O(1), \tag{2}$$

где $a(n)$ — коэффициенты Дирихле функции $L(s)$.

Интеграл вида

$$I'_k(\sigma, T) = \int_T^{2T} |L(\sigma + it)|^{2k} dt$$

будем называть моментом функции $L(s)$ из класса Сельберга S степени $2k$.

Определим мультипликативную функцию $a_k(n)$ из равенства

$$L^k(s) = \prod_p \left(1 - \frac{a(p)}{p^s}\right)^{-k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)a(n)}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1).$$

Вторым основным результатом данной статьи является вывод асимптотической формулы для дробных моментов $I'_{1/m}(\sigma, T)$, $m \in N$ функций $L(s)$ из класса Сельберга, $d_L = 2$. Эта задача представляет трудность потому, что в отличие от $\zeta(s)$ точная верхняя оценка дробных моментов для таких функций на критической прямой не известна.

Теорема 2. *Пусть m — натуральное число, $\Phi(T)$ — сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \to +\infty$ функция. Тогда при $\frac{1}{2} + \frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}} \le \sigma < 1$, в предположении гипотезы Сельберга (2), справедлива асимптотическая формула*

$$\int_T^{2T} |L(\sigma + it)|^{2/m} dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{1/m}(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(Te^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}}\right).$$

Введем некоторые обозначения. Пусть N — натуральное число, $N \le T/\log T$ в теореме 1 и $N \le Te^{\sqrt{\ln T}}$ в теореме 2. Положим

$$S_N(s) = \sum_{n=1}^{N} d_{1/m}(n) n^{-s}, \quad g(s) = \zeta(s) - S_N^m(s),$$

$$S'_N(s) = \sum_{n=1}^{N} a_{1/m}(n) n^{-s}, \quad g'(s) = L(s) - (S'_N(s))^m.$$

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть $f(s)$ — регулярная в полосе $\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$ и непрерывная в полосе $\alpha \le \operatorname{Re} s \le \beta$ функция. Предположим, что $f(s) \to 0$ при $|\operatorname{Im} s| \to \infty$ равномерно по $\alpha \le \operatorname{Re} s \le \beta$. Тогда при $\alpha \le \gamma \le \beta$ и $q > 0$ имеем:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\gamma+it)|^q dt \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\alpha+it)|^q dt\right)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\beta+it)|^q dt\right)^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}} .$$

□ Доказательство см. в [5]. ■

Лемма 2. *Пусть*

$$K(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\sigma+it)|^{2/m} w(t)dt, \quad K'(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |g'(\sigma+it)|^{2/m} w(t)dt\,,$$

где $w(t) = \int_T^{2T} e^{-2(t-\tau)^2/m} d\tau$. Пусть, далее, α, β, σ выбраны так, что $0,49 \le \alpha \le \sigma \le \frac{7}{8} \le \beta$, $1,1 \le \beta \le 2$. Тогда справедливы неравенства:

$$K(\sigma) \ll \{K(\alpha)\}^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}} \{K(\beta)\}^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}} + T^5 e^{-\frac{T^2}{4m}\frac{(\beta-\sigma)}{(\beta-\alpha)}} + T^5 e^{-\frac{T^2}{4m}\frac{(\sigma-\alpha)}{(\beta-\alpha)}} ,$$

$$K'(\sigma) \ll \{K'(\alpha)\}^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}} \{K'(\beta)\}^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}} + T^5 e^{-\frac{T^2}{4m}\frac{(\beta-\sigma)}{(\beta-\alpha)}} + T^5 e^{-\frac{T^2}{4m}\frac{(\sigma-\alpha)}{(\beta-\alpha)}} .$$

□ Докажем первое неравенство. Доказательство второго неравенства проводится аналогично. Положим в лемме 1 $f(z) = (z-1)g(z)e^{(z-i\tau)^2}$, где $\tau \in [T, 2T]$. Пусть κ — одно из чисел α, σ, β. Тогда, используя оценку $|g(\sigma+it)|^{2/m} \ll 1+(t-\tau)^2+\tau^2$, получаем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\kappa+it)|^{2/m} dt \ll \tau^{2/m} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\kappa+it)|^{2/m} e^{-2(t-\tau)^2/m} dt + \tau^4 e^{-\frac{\tau^2}{4m}}.$$

Пользуясь неравенствами

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\alpha+it)|^{2/m} \exp(-2(t-\tau)^2/m)dt \ll T^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(\beta+it)|^{2/m} \exp(-2(t-\tau)^2/m)dt \ll 1,$$

получаем,что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\sigma+it)|^{2/m} \exp(-2(t-\tau)^2/m)dt \ll \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |g(\alpha+it)|^{2/m} \exp(-2(t-\tau)^2/m)dt\right\}^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}} \times$$

$$\times\Big\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\beta+it)|^{2/m}\exp(-2(t-\tau)^2/m)dt\Big\}^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}}+$$

$$+T^4\exp\Big(-\frac{T^2(\beta-\sigma)}{4m(\beta-\alpha)}\Big)+T^4\exp\Big(-\frac{T^2(\sigma-\alpha)}{4m(\beta-\alpha)}\Big)\,.$$

Интегрирование этого неравенства по τ от T до $2T$ и использование неравенства Гельдера завершает доказательство. ■

Лемма 3. *При* $1,01<\sigma_0\le 2$ *справедливы неравенства:*

$$K(\sigma_0)\ll TN^{-(2\sigma_0-1)/m},\quad K'(\sigma_0)\ll TN^{-(2\sigma_0-1)/m}\,.$$

□ Сравнивая коэффициенты рядов Дирихле слева и справа в равенстве $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_{1/m}(n)n^{-s}\Big)^m=\zeta(s)$, $\operatorname{Re}s>1$, получаем $\sum\limits_{n_1\cdots n_m=n}d_{1/m}(n_1)\cdots d_{1/m}(n_m)=1$. Отсюда и из положительности $d_{1/m}(n)$ следует, что

$$0\le\beta(n)=1-\sum_{\substack{n_1\cdots n_m=n\\1\le n_1,\dots,n_m\le N}}d_{1/m}(n_1)\cdots d_{1/m}(n_m)\le 1\,.$$

Если $n\le N$, то $\beta(n)=0$. Тогда $|g(\sigma_0+it)|\ll 1$, и требуемая оценка следует из неравенства Гельдера.

Неравенство для $K'(\sigma_0)$ доказывается аналогично. ■

Лемма 4. *Пусть* $J(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\zeta(\sigma+it)|^{2/m}w(t)dt$, $J'(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|L(\sigma+it)|^{2/m}w(t)dt$. *Пусть* $1/2\le\sigma\le 3/4$, $m\ge 1$, $T\ge 2$, *тогда справедливы неравенства:*

$$J(1/2)\ll T^{\frac{1}{m}(\sigma-1/2)}J(\sigma),\quad J'(1/2)\ll T^{\frac{2}{m}(\sigma-1/2)}J'(\sigma).$$

□ Первое неравенство доказывается в [6, p. 70]. При доказательстве второго неравенства учитываем, что в функциональное уравнение для функции из класса Сельберга степени 2 входит множитель $\Gamma(z+\mu)/\Gamma(1-z+\mu)$. ■

Лемма 5. *Пусть* $I(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|S_N(\sigma+it)|^2w(t)dt$. *Для фиксированного* $m\ge 0$ *существует* $c_m>0$, *такое, что для всех* σ, *удовлетворяющих неравенству* $\frac{1}{2}+\frac{c_m}{\ln T}\le\sigma\le\frac{3}{4}$, *справедливы оценки:*

$$I(\sigma)\ll T(\sigma-1/2)^{-1/m^2},\quad I(1/2)\ll T(\ln T)^{1/m^2}\,.$$

□ Доказательство см. в [6]. ■

Лемма 6. Пусть $I'(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|S'_N(\sigma+it)|^2w(t)dt$, $N\le Te^{\sqrt{\ln T}}$. Для всех σ, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{2}+\frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}}\le\sigma<1$, где $\Phi(T)$ — сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \to +\infty$ функция, в предположении гипотезы Сельберга (2) справедливы оценки:

$$I'(\sigma) \ll Te^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}}\,, \quad I'(\frac{1}{2}) \ll Te^{\sqrt{\ln T}}\ln T\,.$$

□ Доказательство следует из свойств функции $w(t)$ и оценок сумм

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{|a_{1/m}(n)|^2}{n^{2\sigma}} \ll N^{1-2\sigma}\ln N, \qquad \sum_{n=1}^{N}\frac{|a_{1/m}(n)|^2}{n} \ll \ln N,$$

которые получаем, используя гипотезу Сельберга (2) и условие $0 < d_{1/m}(n) \le 1$. ■

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1.

1. Главный член асимптотической формулы для дробных моментов дзета-функции Римана получается из асимптотического вычисления интеграла $\int\limits_{T}^{2T}|S_N(\sigma+it)|^2\,dt$, а для оценки остаточного члена достаточно оценить интеграл $\int\limits_{T}^{2T}|g(\sigma+it)|^{2/m}dt$. При $m \ge 2$ нужно воспользоваться неравенством

$$|z_1|^{2/m} - |z_2|^{2/m} \le |z_1+z_2|^{2/m} \le |z_1|^{2/m} + |z_2|^{2/m}, \tag{3}$$

справедливом для любых комплексных чисел z_1 и z_2. При этом мы положим в (3) $z_1 = S_N^m(\sigma+it)$, $z_2 = g(\sigma+it)$ и проинтегрируем получившееся неравенство по t от T до $2T$.

2. Заметим, что при $t \in [T, 2T]$ $w(t) \gg 1$, поэтому $\int\limits_{T}^{2T}|g(\sigma+it)|^{2/m}dt \ll K(\sigma)$. Применим лемму 2 с параметрами $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{5}{4}$. В результате, получим неравенство

$$K(\sigma) \ll \{K(1/2)\}^{\frac{5-4\sigma}{3}}\{K(5/4)\}^{\frac{4\sigma-2}{3}} + 1\,.$$

Здесь мы учли, что $\sigma - 1/2 \ge \frac{\Phi(T)}{\ln T} \ge \frac{1}{\ln T}$ и поэтому $\exp\left(-\frac{T^2(\sigma-\frac{1}{2})}{3m}\right) \ll T^{-A}$ для любого $A > 0$ и достаточно большого T. Если $K(1/2) \le T$, то, так как $K(5/4) \ll T$, то и $K(\sigma) \ll T$.

3. Пусть $K(1/2) > T$. Тогда $K(\sigma) \ll K(1/2)(T^{-1}K(5/4))^{\frac{4\sigma-2}{3}} + 1$. Используем оценку из леммы 3: $K(5/4) \ll TN^{-3/(2m)}$. Тогда

$$K(\sigma) \ll K(1/2)N^{-\frac{2}{m}(\sigma-1/2)} + 1 \ll K(1/2)N^{-\frac{2}{m}(\sigma-1/2)}. \tag{4}$$

Из (3) получаем, что

$$K(\sigma) - I(\sigma) \ll J(\sigma) \ll K(\sigma) + I(\sigma). \tag{5}$$

Тогда $K(1/2) \ll J(1/2)+I(1/2)$. Функцию $J(1/2)$ оценим, используя лемму 4: $J(1/2) \ll T^{\frac{1}{m}(\sigma-1/2)}J(\sigma)$. Для $J(\sigma)$ используем правую часть неравенства (5). Тогда

$$K(1/2) \ll T^{\frac{1}{m}(\sigma-1/2)}(K(\sigma)+I(\sigma))+I(1/2)\ .$$

Подставляем полученную оценку в (4). результате, получаем, что

$$K(\sigma) \ll N^{-\frac{2}{m}(\sigma-1/2)}T^{\frac{1}{m}(\sigma-1/2)}(K(\sigma)+I(\sigma))+N^{-\frac{2}{m}(\sigma-1/2)}I(1/2)$$

С учетом условий $N \le T$, $\sigma-\frac{1}{2} \ge \frac{\Phi(T)}{\ln T}$ будем иметь $N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}T^{\frac{1}{m}(\sigma-\frac{1}{2})} \ll e^{-0,1\Phi(T)}$. Тогда $K(\sigma) \ll e^{-0,1\Phi(T)}I(\sigma)+e^{-0,1\Phi(T)}I(1.2)$, и требуемая оценка следует из оценок для $I(\sigma)$ и $I(1/2)$ из леммы 5. ■

Доказательство теоремы 2. Проводится по схеме доказательства теоремы 1. Более подробно остановимся на оценке $K'(\sigma)$, если $K'(1/2) > T$. Тогда

$$K'(\sigma) \ll K'(1/2)N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}. \tag{6}$$

Из (3) получаем, что

$$K'(\sigma)-I'(\sigma) \ll J'(\sigma) \ll K'(\sigma)+I'(\sigma). \tag{7}$$

Тогда $K'(1/2) \ll J'(1/2)+I'(1/2)$. Функцию $J'(1/2)$ оценим, используя лемму 4. Имеем $J'(1/2) \ll T^{\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}J'(\sigma)$. Для $J'(\sigma)$ используем правую часть неравенства (7). Тогда

$$K'(1/2) \ll T^{\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}(K'(\sigma)+I'(\sigma))+I'(1/2)\ .$$

Подставляем полученную оценку в (6), после чего получаем, что

$$K'(\sigma) \ll N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}T^{\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}(K'(\sigma)+I'(\sigma))+N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}I'(1/2)\,.$$

С учетом условий $N \le Te^{\sqrt{\ln T}}$, $\sigma-1/2 \ge \Phi(T)/\sqrt{\ln T}$ будем иметь

$$N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}T^{\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})} \ll \exp\{-2\Phi(T)/m\} \ll 1\,.$$

Тогда

$$K'(\sigma) \ll I'(\sigma)+\Delta I'\,(1/2) \ll I'(\sigma)+I'\,(1/2)\exp\{-\Phi(T)\sqrt{\ln T}\}\ ,$$

и требуемая оценка следует из оценок для $I'(\sigma)$ и $I'\,(1/2)$ из леммы 6.

Замечание. L-функции Гекке, соответствующие комплексным характерам, составляют подкласс класса Сельберга S степени 2 (см. [17]), для которого утверждение теоремы 2 безусловно.

Литература

1. Турганалиев Р.Т. Асимптотическая формула для средних значений дробной степени дзета-функции Римана // Труды Математического института АН СССР. – 1981. – 158. – С.203–226.

2. Джаббаров И.Ш. Дробные моменты ζ-функции // Математические заметки. – 1985. – 38(4). – С.481-493.
3. Selberg A. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // Proc. of the Amalfi conference on Analytic Number Theory. Univ. di. Salerno / 1992. – P.365-387.
4. Corney J.B., Ghosh A. On the Selberg class of Dirichlet series: small degrees // Duke Math. J. – 1993. – 72, 3. – P.673-695.
5. Gabriel R.M. Some results concerning the integrals of moduli of regular functions along certain curves // J. London Math. Soc. – 1927. – 2. – P.112-117.
6. Heath-Brown D.R. Fractional moments of the Riemann Zeta-function // J. London Math. Soc. – 1981. – 24(2). – P.65-78.
7. Гриценко С.А. О нулях специального вида функций, связанных с L-функциями Гекке мнимых квадратичных полей // Изв. РАН. Сер. матем. – 1997. – 61:1. – С.45-68.

ASYMPTOTIC FORMULA FOR FRACTIONAL MOMENTS OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION

S.A. Gritsenko, L.N. Kurtova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru, kurtova@bsu.edu.ru

Abstract. Let $v \in \mathbb{N}$ and the function $\Phi(T)$ tends sufficiently slowly to $+\infty$ when $T \to +\infty$. The asymptotic formula for fractional moments of the Riemann Zeta-function $\int\limits_T^{2T} |\zeta(\sigma+it)|^{2/v} dt$ at $1/2 + \Phi(T)/\log T \leq \sigma < 1$ is obtained.

Key words: Riemann's Zeta-function, fractional moments of the Riemann Zeta-function, asymptotic formula.