КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

MSC 35L55

О СПЕКТРЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ТИПА

О.В. Алексеева, В.В. Корниенко, Д.В. Корниенко

Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина,
ул. Коммунаров, 28, Елец, 399770, Россия, e-mail: o.v.alexeeva@gmail.com, wk1953@mail.ru

Аннотация. В случае замкнутого дифференциального оператора, порождённого задачей Дирихле для гиперболической системы первого типа (симметричной по терминологи, предложенной А.А. Дезиным в [1]), изучены спектральные свойства. Спектр являясь дискретным, располагается на вещественной прямой комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Ключевые слова: спектр, замкнутый дифференциальный оператор, гиперболические системы, тензорные произведения гильбертовых пространств, базис.

Работа посвящена описанию спектральных свойств дифференциального оператора, порождённого задачей Дирихле для гиперболической системы

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=\lambda u^1+f^1\,,\quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}=\lambda u^2+f^2\,,\qquad \lambda\in\mathbb{C}; \tag{1}$$

рассматриваемой в области $\Omega=(0,\pi)^2$ евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{t,x}$. вместе с граничными условиями Дирихле

$$u\Big|_{\partial\Omega}=0\,,\qquad u=(u^1,u^2)\,. \tag{2}$$

Для гиперболических систем первого и второго порядков имеется ряд глубоких результатов, относящихся к описанию «правильных» граничных условий [1], [2] в областях специального вида. Описанию регулярных граничных задач для более общих систем уравнений при числе переменных более двух посвящены работы [3], [4], [5]. Исследованию свойств разрешимости систем уравнений второго порядка эллиптического типа посвящена работа [6]. Сильно и усиленно эллиптическим системам посвящены соответственно работы [7], [8].

Однако спектральные свойства этих граничных задач и граничных задач иного типа почти не изучены. Спектральные свойства гиперболической системы первого типа и первого порядка изучены в работе [9]. Спектральные свойства задачи Дирихле для эллиптических систем второго порядка изучены в работе [10].

Обозначим через $e_1=(1\ \ 0)^{\text{т}}$, $e_2=(0\ \ 1)^{\text{т}}$ ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{t,x}$ вектор-столбцов, а через $\mathcal{U}$— унитарное пространство элементов $u=u^1e_1+u^2e_2;\ u^k\in\mathbb{C};\ k=1,2;$ со скалярным произведением $(u,v;\ \mathcal{U})=u^1\overline{v^1}+u^2\overline{v^2}$.

Пусть $\mathcal{H}^2_{t,x} = \mathcal{L}^2_2(V)$ — гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций $u : V \to \mathbb{C}^2$, $V = \overline{\Omega}$, с нормой $\left|u;\ \mathcal{H}^2_{t,x}\right|$, задаваемой формулой

$$\left|u; \mathcal{H}^2_{t,x}\right|^2 = \iint\limits_V |u(\tau, \xi);\ \mathcal{U}|^2\, d\tau\, d\xi\ .$$

Пусть также $\mathfrak{D}$ — линейное многообразие гладких комплекснозначных вектор-функций $u \in \mathbb{C}\left(\overline{\Omega}\right) \cap \mathbb{C}^{(2)}\left(\Omega\right)$, удовлетворяющих условиям (2).

Обозначая символом $\widetilde{L}$ линейный оператор $\widetilde{L} : \mathcal{H}^2_{t,x} \to \mathcal{H}^2_{t,x}$, областью определения которого является линейное многообразие $\mathfrak{D} \subset \mathcal{H}^2_{t,x}$, а множество значений определяется правой частью системы (1), получаем гиперболический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что (замкнутый) оператор $L : \mathcal{H}^2_{t,x} \to \mathcal{H}^2_{t,x}$ порождён задачей (1), (2). Изучим его спектр. Говоря о спектре замкнутого оператора, мы следуем терминологии, принятой в монографии [11, стр. 23]. Резольвентное множество, спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора L обозначим через ρL, σL, $P\sigma L$, $C\sigma L$ и $R\sigma L$ соответственно.

Теорема 1. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей (1), (2), состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{k,m,s} = -k^2 + (-1)^m s^2; \qquad k \in \mathbb{N}; \quad m = 1, 2; \quad s \in N\ . \tag{3}$$

Собственные вектор-функции оператора L, соответствующие его собственным значениям (3), представимы в виде

$$u_{k,m,s}(t, x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin(kt) \left(e_1 + (-1)^m e_2\right) \sin(sx)\ .$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t, x) : m = 1, 2;\ k \in \mathbb{N};\ s \in \mathbb{N}\}$ собственных вектор-функции оператора L образует ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$.

□ Достаточно заметить, что последовательность $\{u_{k,m,s}(t) :\ k \in \mathbb{N}\ m = 1, 2\}$,

$$u_{k,m,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt) \left(e_1 + (-1)^m e_2\right),$$

является полной и ортонормированной в $\mathcal{H}^2_t = \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}_t$, $\mathcal{H}_t = \mathcal{L}_2[0, \pi]$, и воспользоваться, доказанным в [9], представлением $\mathcal{H}^2_{t,x}$ в виде тензорного произведения гильбертовых пространств $\mathcal{H}^2_t$ и $\mathcal{H}_x$, то есть формулой $\mathcal{H}^2_{t,x} = \mathcal{H}^2_t \otimes \mathcal{H}_x$, где $\mathcal{H}_x = \mathcal{L}_2[0, \pi]$.

Литература

1. Дезин А.А. Граничные задачи для некоторых симметричных линейных систем первого порядка // Матем. сборник. – 1959. – 49(91);4. – С.459-484.
2. Дезин А.А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // Успехи матем. наук. – 1959. – 14;3(87). – С.21-73.
3. Романко В.К. Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений // Матем.заметки АН СССР. – 1985. – 37;5. – С.727-733.
4. Романко В.К. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. – 1986. – 286;1. - С.47-50.
5. Романко В.К. О системах операторных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – 23(9). – С.1574-1585.
6. Солдатов А.П. О задаче Дирихле для эллиптических систем второго порядка на плоскости / Молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения 2010» Казань, 1-6 октября 2010.
7. Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сборник. – 1951. – 29(71);4. – С.615-676.
8. Солдатов А.П. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2003. –39(5). – С.674-686.
9. Корниенко Д.В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42;1. – С.91-100.
10. Алексеева О.В. О спектре задачи Дирихле для двух эллиптических систем // Научные ведомости БелГУ. Математика Физика. – 2010. – №17(88);20. – С.5-9.
11. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 207 с.

ON THE SPECTRUM OF DIRICHLET PROBLEM FOR HYPERBOLIC SYSTEMS OF FIRST TYPE

O.V. Alekseeva, V.V. Kornienko, D.V. Kornienko

Elets State University,
Kommunarov St., 28, Elets, 399770, Russia, e-mail: o.v.alexeeva@gmail.com, wk1953@mail.ru

Abstract. It is studied some spectral properties of the closed differential operator generated by Dirichlet's problem connected with the hyperbolic system of first type (being symmetric on the terminology proposed A.A.Desin in [1]). The spectrum being discrete is settled on the real axe of complex plane $\mathbb{C}$.

Key words: spectrum, closed differential operator, hyperbolic systems, tensor products of Hilbert spaces, basis.