УДК 519.21

ОБ ОДНОЙ АДДИТИВНОЙ ЗАДАЧЕ С ДРОБНЫМИ ДОЛЯМИ

А.В. Шутов

Владимирский государственный университет
пр. Строителей, 11, Владимир, 600024, Россия, e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация. В работе получена асимптотическая формула для числа решений уравнения $n_1 + \ldots + n_k = n$ с дополнительными условиями на слагаемые $\{n_i\alpha\} \in I_i$.

Ключевые слова: аддитивные задачи, дробные доли, теорема Вейля.

Введение. В работе рассматривается задача об асимптотике для числа решений линейного диофантова уравнения

$$n_1 + \ldots + n_k = n \tag{1}$$

с дополнительными условиями на слагаемые

$$\{n_i\alpha\} \in I_i, i = 1, \ldots, k\,. \tag{2}$$

Здесь α – иррациональное число, $\{\cdot\}$ – дробная доля и $I_i \subset (0;1)$ – множества с интегрируемой по Риману характеристической функцией.

В.Г. Журавлев [3] рассмотрел бинарную аддитивную задачу для так называемых четно-фибоначчевых чисел. Напомним, что любое натуральное число n разлагается по жадному алгоритму в систему счисления Фибоначчи

$$n = \sum_{i \geq 1} \varepsilon_i(n) F_i,$$

где $F_0 = F_1 = 1$, $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ и $\varepsilon_i(n)\varepsilon_{i+1}(n) = 0$. Число n называется четно-фибоначчевым, если $\varepsilon_1(n) = 0$. Оказывается, что условие четно-фибоначчевости эквивалентно попаданию дробной доли $\{n\tau\}$, $\tau = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ в некоторый интервал.

Условие попадания дробной доли $n\tau$ в некоторый интервал описывает также множества $F(\delta_1, \ldots, \delta_m) = \{n : \varepsilon_1(n) = \delta_1, \ldots, \varepsilon_m(n) = \delta_m\}$. Бинарная задача для чисел из $F(0, \ldots, 0)$ с любым количеством нулей рассмотрена в [4].

К условию (2) сводится также описание аналогов множеств $F(\delta_1, \ldots, \delta_m)$, связанных с разложениями натуральных чисел по линейным рекуррентным последовательностям второго порядка, а также с разложениями натуральных чисел по знаменателям подходящих дробей к иррациональности α (разложение Островского-Цеккендорфа).

Гриценко и Моткина рассмотрели тернарную проблему Гольдбаха и проблему Хуа-Логена с дополнительными условиями типа (2) [1], [2].

Обозначим через $r_k(\alpha, I_1, \ldots, I_k, n)$ число решений уравнения (1) с дополнительными условиями (2). В случае $I_1 = \ldots = I_k = (a, b)$ будем обозначать число решений просто $r_k(\alpha, I, n)$. В работах [1], [2] фактически доказан следующий результат

Теорема 1. *Пусть α – квадратичная иррациональность. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$r_k(\alpha, I, n) \sim \sigma_k(a, b, n) n^{k-1},$$

где $\sigma_k(a, b, n)$ – особый ряд, вычисляемый по формуле

$$\sigma_k(a, b, n) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\alpha n - 0{,}5k(a+b))} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k}.$$

При этом остались открытыми вопросы об явном вычислении особого ряда, а также об условиях, при которых данный особый ряд отличен от нуля.

В настоящей работе будет получена альтернативная асимптотическая формула для $r_k(\alpha, I_1, \ldots, I_k, n)$, дающая ответы на эти вопросы.

Автор выражает свою благодарность Владимиру Георгиевичу Журавлеву, благодаря которому возникла рассматриваемая задача, а также Сергею Александровичу Гриценко за стимулирующие обсуждения.

2. Бинарная задача

Вначале рассмотрим случай $k = 2$. Для любого ε введем отображение

$$\iota_\varepsilon : x \to 1 - x + \varepsilon \pmod 1.$$

Теорема 2. *Справедлива асимптотическая формула*

$$r_2(\alpha, I_1, I_2, n) \sim |I_1 \cap I^2(\{n_1\alpha\})| n, \tag{3}$$

где $I^2(\varepsilon) = \iota_\varepsilon(I_2)$.

□ Действительно,

$$r_2(\alpha, I_1, I_2, n) = \sum_{\substack{n_1 + n_2 = n, \\ \{n_1\alpha\} \in I_1, \\ \{n_2\alpha\} \in I_2}} 1 = \sum_{\substack{n_1 = 1, \\ \{n_1\alpha\} \in I_1, \\ \{(n-n_1)\alpha\} \in I_2}}^{n} 1 =$$

$$= \sum_{\substack{n_1 = 1, \\ \{n_1\alpha\} \in I_1, \\ \{n_1\alpha\} \in \iota_{\{n_1\alpha\}}(I_2)}}^{n} 1 = \sum_{\substack{n_1 = 1, \\ \{n_1\alpha\} \in I_1 \cap I^2(\{n_1\alpha\})}}^{n} 1 = N(\alpha, n, I_1 \cap I^2(\{n_1\alpha\})),$$

где

$$N(\alpha, n, X) = \sharp\{k : 1 \le k \le n, \{k\alpha\} \in X\}.$$

Согласно теореме Вейля о равномерном распределении [7], справедлива асимптотическая формула

$$N(\alpha, n, X) \sim n|X| + o(n), \tag{4}$$

используя которую немедленно получаем требуемый результат. ■

Рассмотрим теперь вопрос об остаточном члене формулы (3). Ясно, что он выражается через остаточный член формулы (4). Однако, хорошо известно, что без дополнительных предположений об α и X остаточный член формулы (4) неулучшаем. Тем не менее, улучшение возможно при некоторых дополнительных предположениях.

Пусть

$$\Delta(\alpha, n) = \sup_{I=(a;b)} |N(\alpha, n, I) - (b-a)n|.$$

В частности, известна оценка

$$\Delta(\alpha, n) = O(\ln n)$$

в случае, если α – квадратичная иррациональность, а также оценка

$$\Delta(\alpha, n) = O(n^{\varepsilon})$$

в случае алгебраических α. Более подробную информацию о современных оценках $\Delta(\alpha, n)$ можно найти например в работе [6]. Используя введенное определение, можно переписать теорему 2 в следующем виде.

Теорема 3. *Пусть множества I_1, I_2 являются интервалами. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$r_2(\alpha, I_1, I_2, n) \sim |I_1 \cap I^2(\{n_1\alpha\})|n + O(\Delta(\alpha, n)). \tag{5}$$

Замечание 1. Формула (5) справедлива также в случае, когда множества I_1, I_2 являются объединением не более, чем l интервалов. При этом константа в $O(\Delta(\alpha, n))$ умножается на l.

3. Случай произвольного числа слагаемых

Теорема 4. *Пусть все множества $I_1, \ldots, I_k$ являются интервалами. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$r_k(\alpha, I_1, \ldots, I_k, n) \sim c_k(I_1, \ldots, I_k, \{n\alpha\})n^{k-1} + O(n^{k-2}\Delta(\alpha, n)), \tag{6}$$

где $c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon)$ – периодическая с периодом 1 функция, вычисляемая по формуле

$$c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon) = \frac{1}{k-1}\int_{I^k(\varepsilon)} c_{k-1}(I_1, \ldots, I_{k-1}, x)dx. \tag{7}$$

Здесь

$$I^k(\varepsilon) = \iota_\varepsilon(I_k)$$

и функция $c_1(I_1, \varepsilon)$ задается на периоде $[0; 1)$ условием:

$$c_1(I_1, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon \in I_1; \\ 0, & \varepsilon \notin I_1; \end{cases} .$$

□ Доказательство формулы (6) будем проводить индукцией по k. Для $k = 2$ формула (6) эквивалентна (5), что проверяется непосредственным вычислением интеграла (7). Рассмотрим переход $k \to k + 1$.

Заметим, что

$$r_{k+1}(\alpha, I_1, \ldots, I_{k+1}, n) = \sum_{n_1 + n_2' = n} r_k(\alpha, I_1, \ldots, I_k, n_1) .$$

Обозначим через $\chi_i(x)$ характеристические функции интервалов I_i, продолженные по периодичности с периодом 1 на всю числовую прямую. Тогда имеем

$$r_{k+1}(\alpha, I_1, \ldots, I_{k+1}, n) = \sum_{n_1=1}^{n-1} r_k(\alpha, I_1, \ldots, I_k, n_1)\chi_{k+1}(\{(n - n_1)\alpha\}) .$$

Используя предположение индукции, получаем

$$r_{k+1}(\alpha, I_1, \ldots, I_k, n) = \sum_{n_1=1}^{n} c_k(I_1, \ldots, I_k, \{n_1\alpha\}) n_1^{k-1} \chi_{k+1}(\{(n - n_1)\alpha\}) + O(n^{k-1}\Delta(\alpha, n)) .$$

Воспользовавшись формулой суммирования Абеля, находим

$$r_{k+1}(\alpha, I_1, \ldots, I_k, n) = n^{k-1}B_n - \sum_{i=1}^{n-1} B_i((i+1)^{k-1} - i^{k-1}) + O(n^{k-1}\Delta(\alpha, n)) , \tag{8}$$

где

$$B_i = \sum_{j=1}^{i} c_k(I_1, \ldots, I_k, \{j\alpha\})\chi_{k+1}(\{(n - j)\alpha\}) .$$

Далее воспользуемся следующей теоремой Коксмы-Главки [5].

Теорема 5. *Пусть f – функция с ограниченной вариацией и α – иррационально. Тогда*

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\{i\alpha\}) - \int_0^1 f(x)dx| \le V(f)\Delta(\alpha, n) , \tag{9}$$

где $V(f)$ – вариация функции f на $(0; 1)$.

Оценка (9) дает асимптотическую формулу

$$B_i = i\int_0^1 c_k(I_1, \ldots, I_k, x)\chi_{k+1}(\{n\alpha\} - x)dx + O(\Delta(\alpha, i)).$$

С учетом (7), асимптотика для B_i запишется в виде

$$B_i = ikc_{k+1}(I_1, \ldots, I_k, \{n\alpha\}) + O(\Delta(\alpha, i)) \ .$$

Подставив в (8), имеем

$$r_{k+1}(\alpha, I_1, \ldots, I_k, n) = n^k kc_{k+1}(I_1, \ldots, I_k, \{n\alpha\}) -$$

$$-kc_{k+1}(I_1, \ldots, I_k, \{n\alpha\}) \sum_{i=1}^{n-1} i((i+1)^{k-1} - i^{k-1}) + O(n^{k-1}\Delta(\alpha, i)).$$

Далее,

$$\sum_{i=1}^{n-1} i((i+1)^{k-1} - i^{k-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} i((k-1)i^{k-2} + O(i^{k-3})) =$$

$$= (k-1)\sum_{i=1}^{n-1}(i^{k-1} + O(i^{k-2})) = \frac{k-1}{k}n^k + O(n^{k-1}) \ ,$$

откуда и следует требуемый результат. ■

Замечание 2. Аналогично можно доказать аналог теоремы 4 для произвольных множеств $I_1, \ldots, I_k$, характеристические функции которых интегрируемы по Риману. В этом случае остаточный член в асимптотической формуле будет иметь вид $o(n^{k-1})$.

Следствие 1. *Для функции $c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon)$ также справедлива формула*

$$c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \chi_1(x_1)\chi_2(x_2 - x_1) \ldots \chi_{k-1}(x_{k-1} - x_{k-2})\chi_k(\varepsilon - x_{k-1}) dx_1 \ldots dx_{k-1} \ .$$

□ Доказательство получается многократным применением формулы (7). ■

Теорема 4 может быть также обобщена на более общий случай. Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_k$ – интегрируемые по Риману функции. Рассмотрим задачу об асимптотической формуле для суммы

$$N(\alpha, \psi_1, \ldots, \psi_k, n) = \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} \prod_{i=1}^{k} \psi_i(\{n_i\alpha\}) \ .$$

В случае, когда $\psi_i = \chi_i$ – характеристические функции множеств $I_1 \ldots, I_k$, данная задача превращается в задачу (1) с дополнительными условиями (2).

Аналогично теореме 4 и следствию 1 доказывается следующий результат.

Теорема 6. *Справедлива асимптотическая формула*

$$N(\alpha, \psi_1, \ldots, \psi_k, n) \sim \frac{1}{(k-1)!} c^*(\{n\alpha\}) n^{k-1},$$

где

$$c^*(\varepsilon) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \psi_1(x_1)\psi_2(x_2 - x_1) \ldots \psi_{k-1}(x_{k-1} - x_{k-2})\psi_k(\varepsilon - x_{k-1}) dx_1 \ldots dx_{k-1} \ . \quad (10)$$

Замечание 3. В предположении, что все функции $\psi_1, \ldots, \psi_k$ имеют ограниченную вариацию, можно получить аналог теоремы 6 с остаточным членом порядка $O(n^{k-2}\Delta(\alpha, n))$.

4. Свойства функции $c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon)$

Теорема 7. *Пусть $c(\varepsilon) = c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon)$. Тогда*

1) $c(\varepsilon)$ непрерывна при $k \geq 2$;

2) $c(\varepsilon)$ является кусочным многочленом степени $k-1$;

3) существует $R = R_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon)$ такое, что $c(R-\varepsilon) = c(\varepsilon)$.

□ Доказательство теоремы получается простым вычислением, основанном на индукции по k. ■

Теорема 8. *Пусть $I_1, \ldots, I_k$ – интервалы и*

$$\rho_k(I_1, \ldots, I_k) = |\{\varepsilon \in [0;1) : c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon) > 0\}| \,.$$

Тогда

$$\rho_k(I_1, \ldots, I_k) = \min\{1; |I_1| + \ldots + |I_k|\} \,.$$

□ Доказательство проведем индукцией по k. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Рассмотрим переход $k \to k+1$. Пусть

$$J_k = \{\varepsilon \in [0;1) : c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon) > 0\} \,.$$

Тогда $|J_k| = \rho_k(I_1, \ldots, I_k)$. Кроме того, из (7) вытекает, что $J_{k+1} = \{\varepsilon : J_k \cap I^{k+1}(\varepsilon) \neq \varnothing\}$. Далее нужно рассмотреть два случая:

1) $|J_k| + |I_{k+1}| > 1$. Тогда $|J_k \cap I^{k+1}(\varepsilon)| = |J_k| + |I^{k+1}(\varepsilon)| - |J_k \cup I^{k+1}(\varepsilon)|$. Поскольку $|I^{k+1}(\varepsilon)| = |I_{k+1}|$ и $J_k \cup I^{k+1}(\varepsilon) \subseteq [0;1)$, имеем $|J_k \cap I^{k+1}(\varepsilon)| > |J_k| + |I_{k+1}| - 1 > 0$, то есть J_k и $I^{k+1}(\varepsilon)$ пересекаются для всех ε и $J_{k+1} = [0;1)$.

2) $|J_k| + |I_{k+1}| \leq 1$. Выберем ε_0 так, чтобы правый конец интервала $I^{k+1}(\varepsilon)$ совпал с левым концом интервала J_k. Тогда легко видеть, что $J_{k+1} = (\varepsilon_0; \varepsilon_0 + |J_k| + |I_{k+1}|)$ (множество J_k и операция сложения здесь рассматриваются по модулю 1). ■

Теорема 8 позволяет дать необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (1) с дополнительным условием (2).

Теорема 9. *Пусть $|I_1| + \ldots + |I_k| \geq 1$. Тогда уравнение (1) с дополнительным условием (2) разрешимо для всех достаточно больших n. Если же $|I_1| + \ldots + |I_k| < 1$, то плотность множества натуральных n, для которых уравнение (1) с дополнительным условием (2) разрешимо, равна $\rho_k(I_1, \ldots, I_k)$.*

□ Согласно теореме 4, число решений уравнения (1) с дополнительным условием (2) больше нуля для всех достаточно больших n, удовлетворяющих условию $c_k(I_1, \ldots, I_k, \{n\alpha\}) > 0$. С учетом теоремы 8 нам остается доказать, что при условии $|I_1| + \ldots + |I_k| < 1$ множество n для которых уравнение (1) с дополнительным условием (2) неразрешимо имеет плотность не менее $1 - (|I_1| + \ldots + |I_k|)$. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что уравнение (1) с дополнительным условием (2) неразрешимо при $\{n\alpha\} \notin I_1 + \ldots + I_k$, где $I_1 + \ldots + I_k$ – сумма по Минковскому множеств $I_1, \ldots, I_k$. ■

Далее мы будем предполагать, что $I_1 = \ldots = I_k = I = (a, b)$. Соответствующую функцию $c_k(I_1, \ldots, I_k, \varepsilon)$ обозначим через $c_k(I, \varepsilon)$. Рассмотрим оценки сверху и снизу для $c_k(I, \varepsilon)$.

Индукцией по k легко получить следующий результат.

Теорема 10. *Справедливо неравенство*

$$|c_k(I, \varepsilon)| \leq \frac{|I|^{k-1}}{(k-1)!} \,.$$

□ Действительно, для $k = 1$ утверждение очевидно, а переход $k \to k+1$ следует из неравенств

$$|c_{k+1}(I, \varepsilon)| \leq \frac{1}{k} \left| \int_{I(\varepsilon)} c_k(I, x) dx \right| \leq \frac{1}{k} \int_{I(\varepsilon)} |c_k(I, x) dx| \leq$$

$$\leq \frac{1}{k} \frac{|I|^{k-1}}{(k-1)!} \int_{I(\varepsilon)} 1 dx \leq \frac{|I|^{k-1}}{k!} |I(\varepsilon)| \leq \frac{|I|^k}{k!} \,.$$

Здесь $I(\varepsilon) = \iota_\varepsilon(I)$. ■

Следствие 2. *При фиксированных I, ε $c_k(I, \varepsilon) \to 0$ при $k \to \infty$.*

Вопрос об оценке $c_k(I, \varepsilon)$ снизу является более сложным, так как для любого k можно подобрать I, ε так, чтобы $c_k(I, \varepsilon) = 0$. Например, можно выбрать $I = (0; \frac{1}{k+1})$ и $\varepsilon > \frac{k}{k+1}$. Тем не менее, можно получить следующий результат.

Теорема 11. *Пусть $l = [\frac{1}{|I|}] + 1$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Тогда существует постоянная $\widetilde{c}(I)$ такая, что для всех $k \geq l$ справедливо неравенство*

$$|c_k(I, \varepsilon)| \geq \widetilde{c}(I) \frac{|I|^{k-1}}{(k-1)!} \,. \tag{11}$$

□ Заметим, что в силу теоремы 8 $c_l(I, \varepsilon) > 0$ для всех ε, поскольку $l|I| > 1$. Поэтому можно выбрать постоянную $\widetilde{c}(I)$ так, чтобы неравенство (11) выполнялось для $k = l$. Далее остается воспользоваться методом математической индукции аналогично доказательству теоремы 10. ■

5. Среднее число решений

Рассмотрим теперь среднее число решений уравнения (1), удовлетворяющих условию (2)

$$\widehat{r}_k(\alpha, I_1, \ldots, I_k, n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_k(\alpha, I_1, \ldots, I_k, i) \,.$$

Теорема 12. *Пусть $I_1, \dots, I_k$ – интервалы. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\widehat{r}_k(\alpha, I_1, \dots, I_k, n) = \frac{\prod_{i=1}^k |I_i|}{k!} n^{k-1} + O(n^{k-2}\Delta(\alpha, n)) \ . \qquad (12)$$

С учетом теоремы 4,

$$\widehat{r}_k(\alpha, I_1, \dots, I_k, n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_k(I_1, \dots, I_k, \{n\alpha\}) n^{k-1} + O(n^{k-2}\Delta(\alpha, n)) \ .$$

Используя преобразование Абеля, получим

$$\widehat{r}_k(\alpha, I_1, \dots, I_k, n) = n^{k-2}B_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} B_i((i+1)^{k-1} - i^k),$$

где

$$B_i = \sum_{j=1}^{i} c_k(I_1, \dots, I_k, \{n\alpha\}) \ .$$

Пусть

$$C_k = \int_0^1 c_k(I_1, \dots, I_k, x)dx \ .$$

Поскольку функция $c_k(I_1, \dots, I_k, \varepsilon)$ представляет собой кусочный многочлен, она имеет ограниченную вариацию. Следовательно, по неравенству Коксмы-Главки,

$$B_i = C_k i + O(\Delta(\alpha, i)).$$

Подставляя асимптотику для B_i и действуя аналогично доказательству теоремы 4, находим

$$\widehat{r}_k(\alpha, I_1, \dots, I_k, n) = \frac{C_k}{k} n^{k-1} + O(n^{k-2}\Delta(\alpha, n)) \ .$$

Для доказательства теоремы 12 нам остается доказать, что

$$C_k = \int_0^1 c_k(I_1, \dots, I_k, x)dx = \frac{\prod_{i=1}^k |I_i|}{(k-1)!} \ . \qquad (13)$$

Формулу (13) будем доказывать индукцией по k. Для $k = 1$ формула очевидно верна. Заметим, что для перехода $k \to k+1$ достаточно доказать, что

$$C_{k+1} = \frac{C_k}{k}|I_k| \ . \qquad (14)$$

Имеем,

$$C_{k+1} = \int_0^1 c_{k+1}(I_1, \dots, I_k, x)dx = \int_0^1 \Big(\frac{1}{k}\int_{I^{k+1}(x)} c_k(I_1, \dots, I_k, y)dy\Big)dx \ .$$

Пусть $I^{k+1}(0) = (a;b)$. Тогда

$$C_{k+1} = \frac{1}{k}\int_0^1 \int_{a+x}^{b+x} c_k(I_1, \ldots, I_k, y)dydx \ .$$

Сделаем замену переменной $x' = x$, $y' = y - x$. Якобиан соответствующего преобразования равен 1, поэтому

$$C_{k+1} = \frac{1}{k}\int_0^1 \int_a^b c_k(I_1, \ldots, I_k, y' - x')dy'dx' \ .$$

Поменяем пределы интегрирования местами:

$$C_{k+1} = \frac{1}{k}\int_a^b \int_0^1 c_k(I_1, \ldots, I_k, y' - x')dx'dy' \ .$$

Заметим, что в силу периодичности функции $c_k(I_1, \ldots, I_k, x)$

$$\int_0^1 c_k(I_1, \ldots, I_k, x)dx = \int_0^1 c_k(I_1, \ldots, I_k, x + z)dx$$

для всех z. Кроме того, в силу теоремы 7, $c_k(I_1, \ldots, I_k, y' - x') = c_k(I_1, \ldots, I_k, y' + x' + R_k)$ для некоторого R_k. Отсюда

$$C_{k+1} = \frac{1}{k}\int_a^b \int_0^1 c_k(I_1, \ldots, I_k, y' + x' + R_k)dx'dy' = \frac{1}{k}\int_a^b \int_0^1 c_k(I_1, \ldots, I_k, x')dx'dy' =$$

$$= \frac{1}{k}\int_a^b C_k dy' = \frac{C_k}{k}(b - a) \ ,$$

откуда и следует формула (14). ■

Замечание 3. Можно было бы получить также аналог формулы (12) для среднего числа решений на промежутке $(n; n + h(n))$, где $h(n) \to +\infty$ – произвольная функция, монотонно стремящаяся к бесконечности.

Замечание 4. Используя формулу (10) и действуя аналогично доказательству теоремы 12, можно получить следующую асимптотическую формулу для среднего значения функции $N(\alpha, \psi_1, \ldots, \psi_k, n)$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N(\alpha, \psi_1, \ldots, \psi_k, i) \sim \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k}\int_0^1 \psi_j(x)dx \cdot n^{k-1}.$$

В случае, когда все функции $\psi_1, \ldots, \psi_k$ имеют ограниченную вариацию, можно также получить аналог данной формулы с остаточным членом.

Литература

1. Гриценко С.А., Мотькина Н.Н. Об одном варианте тернарной проблемы Гольдбаха // ДАН республики Таджикистан. – -2009. – 52,Вып.6. –С.413-417.
2. Гриценко С.А., Мотькина Н.Н. Задача Хуа Ло-кена с простыми числами специального вида // ДАН республики Таджикистан. – 2009. – 52,Вып.7. – С.497-500.
3. Журавлев В.Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распрделение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. – 2008. – 20,Вып.3. – С.18-46.
4. Швагирева И.К. Бинарные аддитивные задачи над ∘-прогессиями Фибоначчи // Материалы VII международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященной памяти А.А. Карацубы, Тула, 11-16 мая 2010 года / Тула: ТГПУ, 2010. – С.198-200.
5. Koksma J.F. Een algemeene stelling uit de theorie der gelijkmatige verdeeling modulo 1 // Mathematica B (Zutphen). – 1942/43. – 11. – P.7-11.
6. Pinner C.G. On Sums of Fractional Parts $\{n\alpha+\gamma\}$ // J.Number Theory. – 1997. – 65. – P.48-73.
7. Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. – 1910. – 30. – P.377-407.

ON ONE ADDITIVE PROBLEM WITH THE FRACTIONAL PART FUNCTION

A.V.Shutov

Vladimir State University,
Stroiteley Av., 11, Vladimir, 600024, Russia, e-mail: a1981@mail.ru

Abstract. The asymptotic formula of the soltion number of the equation $n_1+\ldots+n_k=n$ with the special conditions on summands $\{n_i\alpha\}\in I_i$ is obtained.

Key words: additive problems, fractional part function, Weyl theorem.