MSC 11L03

ОБ ОЦЕНКЕ ОДНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ ПО ПРОСТЫМ ЧИСЛАМ

С.А. Гриценко, Н.А. Зинченко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, г.Белгород, 308007, Россия, e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru

Аннотация. Оценена тригонометрическая сумма по простым числам, лежащим в арифметической прогрессии с большой разностью, и на основе этой оценки получен вариант теоремы Бомбьери–Виноградова для простых чисел специального вида.

Ключевые слова: тригонометрическая сумма, простые числа специального вида, оценки.

1. Введение. В 30–40-х годах XX века И.М. Виноградов создал метод тригонометрических сумм и с большим успехом решил на его основе ряд задач теории чисел (см. [1], [2]).

В настоящей работе дано краткое изложение оценки тригонометрической суммы по простым числам, лежащим в арифметической прогрессии с «предельно большой» разностью. Оценка проводится методом И.М. Виноградова. Кроме того, мы с помощью указанной оценки уточняем в частном случае следующую теорему, принадлежащую Д. Толеву [3].

Теорема 1. *Пусть $c \in (1, 2]$ — константа и $\pi_c(x, q, l)$ — число таких простых чисел p, не превосходящих x и сравнимых с l по модулю q, для которых $\{0.5p^{1/c}\} \leq 0.5$. Тогда для любого $A > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$\sum_{q:\, q \leq x^{1/4-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \pi_c(x, q, l) - \frac{\operatorname{Li} x}{2\varphi(q)} \right| \leq c\, x (\ln x)^{-A},$$

где $c = c(A) > 0$, $\operatorname{Li} x = \int_2^x \frac{dx}{\ln x}$.

Сформулируем наши результаты.

Теорема 2. *Пусть $c \in (1, 2]$ — константа. Пусть $A > 1$ — произвольная константа, $f(n) = 0.5mn^{1/c}$, где $1 \leq m \leq (\ln N)^{2A}$. Пусть, далее, $0 < \varepsilon \leq 0.001$ — сколь угодно малое число, q — натуральное число, $q \leq N^{1/3-\varepsilon}$.*

Тогда справедлива оценка

$$\sum_{\substack{n \leq N, \\ n \equiv r (\operatorname{mod} q)}} \Lambda(n) e^{2\pi i f(n)} = O(Nq^{-1}N^{-\varkappa}),$$

где $\varkappa = \varkappa(\varepsilon) > 0$.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт 14.A18.21.0357

Теорема 3. Пусть $c \in (1,2]$ — константа и $\pi_c(x,q,l)$ — число таких простых чисел p, не превосходящих x и сравнимых с l по модулю q, для которых $\{0.5p^{1/c}\} \le 0.5$.

Тогда для любого $A > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\sum_{q:\, q \le x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \pi_c(x,q,l) - \frac{\operatorname{Li} x}{2\varphi(q)} \right| \le c\, x(\ln x)^{-A},$$

где $c = c(A) > 0$.

2. Схема доказательства теоремы 2.

Пусть $u = N^{1/3}$. Оценим сумму S,

$$S = \sum_{\substack{u<n\le N,\\ n\equiv r (\operatorname{mod} q)}} \Lambda(n) e^{2\pi i f(n)}.$$

1) Воспользуемся тождеством Вона (см. [4, глава 3]):

$$S = W_1 - W_2 - W_3,$$

где

$$W_1 = \sum_{d\le u} \mu(d) \sum_{\substack{n\le Nd^{-1}\\ dn\equiv r(\mod q)}} \ln n\; e^{2\pi i f(dn)},$$

$$W_2 = \sum_{d\le u} \mu(d) \sum_{n\le u} \Lambda(n) \sum_{\substack{dnt\le N\\ dnt\equiv r(\mod q)}} e^{2\pi i f(dnt)},$$

$$W_3 = \sum_{u<x\le Nu^{-1}} a_x \sum_{\substack{u<y\le Nx^{-1}\\ xy\equiv r(\mod q)}} \Lambda(y) e^{2\pi i f(xy)},$$

$$a_x = \sum_{d\le u, d|x} \mu(d).$$

2) Оценим W_2. Для этого зафиксируем $d \le u$ и $n \le u$ и оценим внутреннюю сумму по t, обозначив ее как $W_2(d,n)$. Имеем:

$$W_2(d,n) = \sum_{\substack{t\le Nd^{-1}n^{-1}\\ t\equiv r_0 (\operatorname{mod} q)}} e^{2\pi i l f(dnt)},$$

где $r_0 \equiv rd^{-1}n^{-1} (\operatorname{mod} q)$.

Поскольку $d \le N^{1/3}$, $n \le N^{1/3}$, $q \le N^{1/3-\varepsilon}$, число слагаемых суммы $W_2(d,n)$ не меньше, чем N^{ε}. Оценивая ее методом ван дер Корпута, приходим к асимптотическим равенствам

$$W_2(d,n) = O(N^{1-2\varkappa}), \quad W_2 = O(N^{1-\varkappa}).$$

Для суммы W_1 тем же способом получается оценка $W_1 = O(N^{1-\varkappa})$.

3) Оценим W_3. Разобьем промежутки суммирования по x и по y на промежутки вида $X < x \leq 2X$, $Y < y \leq 2Y$, где $u < X$, $u < Y$, $(2X)(2Y) \leq N$. Тогда

$$|W_3| \ll L^2 \sum_{X<x\leq 2X} |a_x| \cdot \left| \sum_{\substack{Y<y\leq 2Y \\ xy\equiv r \pmod q}} \Lambda(y) e^{2\pi i f(xy)} \right|,$$

где $L = \ln N$.

Без ограничения общности считаем, что $X \geq Y$. Пользуясь неравенством Коши и неравенством

$$\sum_{x\leq 2X} \tau^2(x) \ll XL^3,$$

получаем:

$$|W_3|^2 \ll XL^7 \sum_{X<x\leq 2X} \left| \sum_{\substack{Y<y\leq 2Y \\ xy\equiv r \pmod q}} \Lambda(y) e^{2\pi i f(xy)} \right|^2.$$

Разобьем промежуток суммирования по x по арифметической прогрессии с разностью q. Имеем:

$$|W_3|^2 \ll XL^7 \sideset{}{'}\sum_{b=1}^{q-1} \sum_{X<l+qx\leq 2X} \left| \sum_{\substack{Y<y\leq 2Y \\ ly\equiv r \pmod q}} \Lambda(y) e^{2\pi i f((l+qx)y)} \right|^2,$$

где $\sum'$ обозначает суммирование по l, взаимно простым с q.

Далее имеем:

$$W_3^2 \ll XL^9 \sideset{}{'}\sum_{b=1}^{q} \sum_{y_1 b\equiv r \pmod q} \sum_{\substack{yb\equiv r \pmod q, \\ Y<y_1<y\leq 2Y}} \sum_{X<b+qx\leq 2X} e^{2\pi i (f((l+qx)y) - f((l+qx)y_1))} +$$

$$+ \frac{(XY)^2}{q^2} L^9 \frac{q}{X}.$$

Поскольку $q \leq N^{1/3-\varepsilon}$, $X > u = N^{1/3}$, имеем неравенство:

$$L^9 \frac{q}{X} \ll N^{-3\varkappa}.$$

Так как $X > u = N^{1/3}$, $q \leq N^{1/3-\varepsilon}$, оставшаяся сумма по x имеет по меньшей мере N^{ε} слагаемых. Оценивая ее методом ван дер Корпута, получаем:

$$W_3 = O(N^{1-\varkappa} q^{-1}).$$

3. Схема доказательства теоремы 3.

1) Определим функцию

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x < 1/2, \\ 0, & \text{если } 1/2 \le x < 1, \end{cases}$$

и продолжим ее периодически с периодом 1 на всю числовую ось. Тогда

$$\pi_c(x,q,l) = \sum_{\substack{n \le N, \\ n \equiv l (\mathrm{mod}\, q)}} \psi_0(0.5p^{1/c}).$$

2) «Сглаживаем» $\psi_0(x)$, приближая ее «стаканчиками Виноградова» $\psi(x)$. При надлежащем выборе параметров (см., например, [15]) будем иметь:

$$\sum_{\substack{n \le N, \\ n \equiv l (\mathrm{mod}\, q)}} \psi_0(0.5p^{1/c}) = \sum_{\substack{n \le N, \\ n \equiv l (\mathrm{mod}\, q)}} \psi(0.5p^{1/c}) + O(Nq^{-1}L^{-A-1}).$$

3) Приближаем функцию $\psi(x)$ конечным отрезком ее ряда Фурье:

$$\psi(x) = \sum_{|m| \le M} c(m) e^{\pi i m p^{1/c}} + O(L^{-A-1}).$$

Здесь $M = L^{2A}$, $c(0) = \frac{1}{2} + O(L^{-A})$, $|c(m)| \le \frac{1}{|m|}$ при $0 < |m| \le M$.

Далее,

$$\sum_{q:\, q \le x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \pi_c(x,q,l) - \frac{\mathrm{Li}\, x}{2\varphi(q)} \right| \le \frac{1}{2} \sum_{q:\, q \le x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \pi(x,q,l) - \frac{\mathrm{Li}\, x}{\varphi(q)} \right| +$$

$$+ \sum_{0<|m|\le M} \frac{1}{|m|} \sum_{q:\, q \le x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv l \mathrm{mod}\, q}} e^{\pi i m p^{1/c}} \right| + O(NL^{-A-1}).$$

Из «обычной» теоремы Бомбьери-Виноградова имеем:

$$\sum_{q:\, q \le x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \pi_c(x,q,l) - \frac{\mathrm{Li}\, x}{2\varphi(q)} \right| \le \sum_{0<|m|\le M} \frac{1}{|m|} \sum_{q:\, q \le x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \le x, \\ p \equiv l \mathrm{mod}\, q}} e^{\pi i m p^{1/c}} \right| +$$

$$+ O(NL^{-A}).$$

Наконец, из теоремы 2 и преобразования Абеля следует, что

$$\max_{(l,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \le x, \\ p \equiv l \mathrm{mod}\, q}} e^{\pi i m p^{1/c}} \right| = O(N^{1-\varkappa} q^{-1}),$$

а значит

$$\sum_{q:\, q \le x^{1/3-\varepsilon}} \max_{(l,q)=1} \left| \pi_c(x,q,l) - \frac{\mathrm{Li}\, x}{2\varphi(q)} \right| = O(NL^{-A}).$$

Литература

1. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / М.: Наука, 1980. – 160 с.
2. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм / М.: Наука, 1976. – 120 с.
3. Tolev D. On a theorem of Bombieri-Vinogradov type for prime numbers from a thin set. // Acta Arithmetic. – 1997. – 81;1. – P.57-68.
4. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М: Наука, 1975. – 184 с.
5. Гриценко С.А. Об одной задаче И.М. Виноградова // Математические заметки. – 1986. – 39;5. – С.625-640.

ON THE ESTIMATE OF A TRIGONOMETRIC SUM OVER PRIMES

S.A. Gritsenko, N.A. Zinchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru

Abstract. The trigonometric sum on primes in arithmetic progression with big difference is estimated. The theorem of Bombieri-Vinogradov's type for specific primes is proved.

Key words: trigonometric sum, specific primes, estimates.