МАТЕМАТИКА

MSC 11J68

ГРАНИЦЫ ОТКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ МНОЖЕСТВ ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА

А.А. Абросимова

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
пр. Строителей, 11, Владимир, 600024, Россия, e-mail: AlbinaAbrosimowa@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются трехмерные BR-множества и метод их построения на основе произведения торических разверток. Для полученных множеств найдены точные границы остаточного члена.

Ключевые слова: развертка тора, BR-множества, границы отклонений, произведение торических разверток.

1. Введение. В 1916 г. Г. Вейль [1] впервые ввел понятие последовательности равномерно распределенной по модулю 1, а так же доказал критерий равномерного распределения. Пример такой последовательности — это последовательность $\{i\alpha\}_{i\geq 1}$ при иррациональном α.

Рассмотрим теперь некоторый интервал X и определим для него считающую функцию $r(\alpha, i, X) = \sharp\{j : 0 \leq j < i, \{j\alpha\} \in X\}$, где $\{x\}$ обозначает дробную долю, как количество попаданий точек в этот интервал. Тогда критерий равномерного распределения Вейля может быть записан в следующем виде

$$r(\alpha, i, X) = i|X| + \delta(\alpha, i, X)\,,$$

где $\delta(\alpha, i, X) = o(i)$ — остаточный член этой формулы.

Множество X называется *множеством ограниченного остатка* или *BR-множеством* (bounded remainder set), если существует такая константа C, что выполняется неравенство

$$|\delta(\alpha, i, X)| \leq C$$

для всех i.

Первые примеры таких множеств были построены 1921 г. Э. Гекке [2]. Это интервалы X длинны $0 < |b + a\alpha| < 1$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. Для них Э. Гекке получил следующую оценку остаточного члена

$$|\delta(\alpha, i, X)| \leq |a|\,.$$

Более сложной является задача нахождения BR-множеств и определения границ отклонений в многомерном случае. Подход Э. Гекке, к сожалению, не позволяет получить многомерное обобщение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №11-01-00578-а).

В двумерном случае первый пример BR-множеств был получен в 1954 г. R. Szüsz [3]. Это было семейство параметрических параллелограмов, для которых выполняется оценка $\delta(i) = O(1)$. Анализ конструкции Szüsz привел P.Liardet [4] к открытию возможной редукции от BR-множеств размерности D к аналогичным множествам размерности $D-1$. Абсолютно другой подход к построению множеств ограниченного остатка обнаружили Ж. Рози [5] и S. Ferenczi [6]. Они связали свойство быть BR-множеством со свойствами отображения первого возвращения. Но получить точные оценки остаточного члена никому из вышеперечисленных так и не удалось.

В 2012 г. В.Г. Журавлев [7] нашел способ построения множеств ограниченного остатка на основе многогранников Е.С. Федорова для трехмерного случая, параллелоэдров Г.Ф. Вороного для четырехмерного случая, а для размерности $D \geq 5$ с помощью вытягивания многомерного куба. Эта конструкция обобщается на все размерности. Автор данной работы строит двумерные множества ограниченного остатка на основе шестиугольных разверток тора [8], для них получены точные границы отклонений. Теперь, когда мы можем строить одномерные и двумерные множества ограниченного остатка, возникает естественный вопрос, можно ли на основе множеств ограниченного остатка малых размерностей построить новые множества ограниченного остатка более высоких размерностей. В настоящей работе на основе k-произведения [9] интервалов ограниченного остатка Гекке и гексагональных разверток тора построены трехмерные множества ограниченного остатка, для них вычислены точные оценки остаточного члена, а также получены средние значения отклонений.

2. Перекладывающиеся торические развертки. Пусть дан D-мерный тор $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/L$, где L — полная решетка, имеющая размерность D над $\mathbb{R}$. Пусть задан сдвиг тора

$$S_{\alpha^D} : \mathbb{T}^D \mapsto \mathbb{T}^D : x \mapsto S_{\alpha^D}(x) \equiv x + \alpha^D \bmod L$$

на вектор $\alpha^D = (\alpha_1^D, \ldots, \alpha_D^D)$.

Перекладывающейся разверткой тора $\mathbb{T}^D$ назовем подмножество T^D из $\mathbb{R}^D$, удовлетворяющее условиям:

1. Множество T^D ограничено.

2. Задано разбиение

$$T^D = T_0^D \sqcup T_1^D \sqcup \ldots \sqcup T_D^D \qquad (1)$$

на непересекающиеся подмножества T_k^D.

3. С помощью разбиения (1) и некоторой фиксированной системы векторов $u = (u_0, u_1, \ldots, u_D)$ из $\mathbb{R}^D$ задано перекладывание

$$S_u(T^D) = S_u(T_0^D) \cup S_u(T_1^D) \cup \ldots \cup S_u(T_D^D)\,, \qquad (2)$$

где $S_u(T_k^D) = x + u_k, x \in T_k^D$.

4. Множество T^D замкнуто относительно прекладывания S_u, т.е. перекладывание переводит подмножество T^D в себя.

5. Отображение факторизации

$$T^D \xrightarrow{\bmod L} \mathbb{T}^D : x \mapsto x \bmod L$$

задает биекцию между T^D и тором $\mathbb{T}^D$, где

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_D] \tag{3}$$

— полная решетка из $\mathbb{R}^D$ с базисом $l_k = u_k - u_0$ для $k = 1, \ldots, D$.

6. Коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & T^D & \xrightarrow{\bmod L} & \mathbb{T}^D & \\ S_v & \downarrow & & \downarrow & S_{\alpha^D} \\ & T^D & \xrightarrow{\bmod L} & \mathbb{T}^D & \end{array},$$

где $S_{\alpha^D}(x) = x + \alpha^D \bmod L$ — сдвиг тора $\mathbb{T}^D$ на вектор $\alpha^D \equiv u_0 \bmod L$.

Заметим, что разбиению (1) развертки T^D соответствует разбиение

$$\mathbb{T}^D = \mathbb{T}^D_0 \sqcup \mathbb{T}^D_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}^D_D$$

тора $\mathbb{T}^D$ на области $\mathbb{T}^D_k \equiv T^D_k \bmod L$.

В одномерном случае примером развертки может быть единичный полуинтервал $T^1 = [0, 1)$, изоморфный окружности $\mathbb{T}^1$, для которой задан поворот $S_{\alpha^1} : x \longmapsto x + \alpha^1 \,\mathtt{mod}\, 1$ на иррациональный вектор α^1. Полуинтервал T^1 может быть разбит на два полуинтервала

$$T^1 = T^1_0 \sqcup T^1_1 , \tag{4}$$

где $T^1_0 = [0, 1 - \alpha^1)$ и $T^1_0 = [1 - \alpha^1, 1)$. Повороту S_{α^1} окружности $\mathbb{T}^1$ на вектор α^1 соответствует перекладывание полуинтервалов T^1_0 и T^1_1 $S_v : T^1 \to T^1 : S_v(x) = x + v_k$, где $x \in T^1_k, k = 0, 1$, а векторы перекладывания соответственно равны

$$v_0 = \alpha^1, \quad v_1 = \alpha^1 - 1 . \tag{5}$$

Пример двумерного случая перекладывающихся торических разверток был построен в работе [8]. Это класс гексагональных разверток $T^2(c)$ двумерного тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, определенных следующим образом: любой точке $c = (c_1, c_2)$ из области $c \in C = \{c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2; c_i \geq 0, \min(c_1, c_2) \leq 1$ соответствует шестиугольник $T^2(c)$ с координатами вершин $(0, 0)$, $(-c_1, 1 - c_2)$, $(0, 1)$, $(1 - c_1, 1 - c_2)$, $(1, 0)$, $(1 - c_1, -c_2)$. У шесугольника $T^2(c)$ противоположные стороны попарно параллельны и равны. Если функция $\sigma(c) = c_1 + c_2$ не превосходит 1, то шестиугольник выпуклый, и не выпуклый в противном случае. Полученным шестиугольником можно замостить $\mathcal{T} = \coprod_{m \in \mathbb{Z}^2} T^2[m]$ плоскость $\mathbb{R}^2$, используя параллельные переносы на векторы m из квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$. Сдвинув $\mathcal{T}$ относительно развертки $T^2(c)$ на вектор $-\alpha^2 = (-\alpha^2_1, -\alpha^2_2)$, получим ее разбиение на три фигуры

$$T^2(c) = T^2_0 \sqcup T^2_1 \sqcup T^2_2 , \tag{6}$$

T_0^2 — шестиугольник, T_1^2 и T_2^2 — параллелограммы, с площадями соответственно

$$s_0 = 1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = \alpha_0^2\,, \quad s_1 = \alpha_1^2, \quad s_2 = \alpha_2^2\,,$$

где $\alpha^2 = tc, 0 < t \leq 1$. На рис. 1 изображено разбиение выпуклого и невыпуклого шестиугольника на области $T_{k'}^D, k' = 0, 1, 2$.

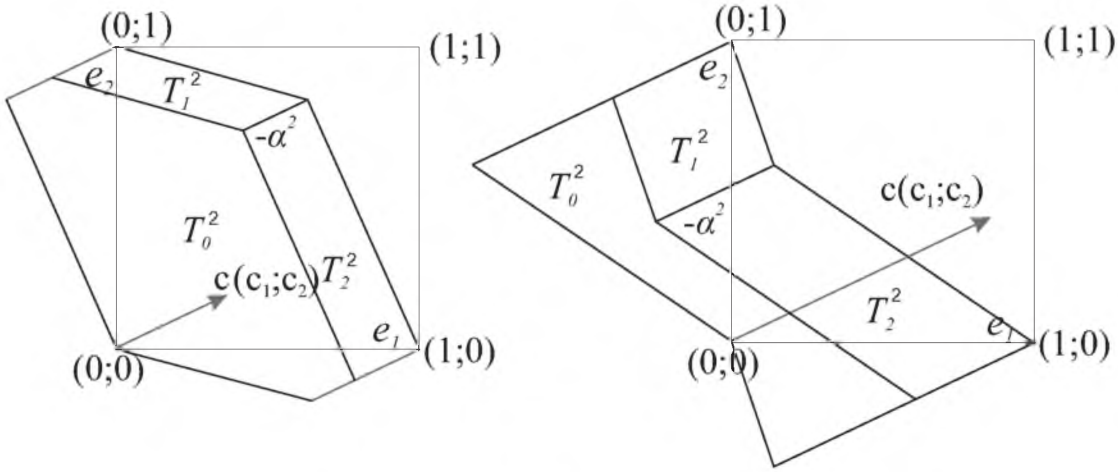

Рис. 1.

Если на торе $\mathbb{T}^2$ задан сдвиг S_{α^2} на вектор α^2, такой что $S_{\alpha^2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2 : x \longmapsto S_{\alpha^2}(x) = x + \alpha^2 \mathrm{mod}\, \mathbb{Z}^2$, то ему будет изоморфно перекладывание $S_w : T^2(c) \longmapsto T^2(c) : x \to S_w(x) = x + w_{k'}$, где $w_{k'}$ — вектора перекладывания для областей $T_{k'}^2$, $k' = 0, 1, 2$ и они соответственно равны

$$w_0 = (\alpha_1^2, \alpha_2^2), \quad w_1 = (\alpha_1^2 - 1, \alpha_2^2), \quad w_2 = (\alpha_1^2, \alpha_2^2 - 1). \tag{7}$$

3. Векторная дробная часть. Для любого $x \in \mathbb{R}^D$ определим *векторную дробную часть* $\mathrm{Fr}(x)$, полагая

$$\mathrm{Fr}(x) = x', \tag{8}$$

где $x' = x \mathrm{mod}\, L$ и $x' \in \mathbb{T}^D$.

Предложение. *Пусть*

$$\triangle \mathrm{Fr}(x) = \mathrm{Fr}(x + \alpha^D) - \mathrm{Fr}(x)\,, \quad k = 0, 1\,, \tag{9}$$

— векторно-значная разностная функция с шагом α^D, где α^D вектор сдвига тора $\mathbb{T}^D$. Тогда выполняется равенство

$$\triangle \mathrm{Fr}(x) = u(x) \tag{10}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^D$, где вектор

$$u(x) = \alpha^D + l(x)\,, \tag{11}$$

при этом $l(x)$ — это векторы решетки L, если $x \in T_k^D = 0, 1, \dots, D$.

□ Для любого x из развертки T^D имеем представление

$$S_{\alpha^D}(x) = x + u(x)\,, \tag{12}$$

при этом $u(x) = u_k$ для $x \in T_k^D$. Так как $u_k \equiv \alpha^D \mathrm{mod}\, L$, то выполняется равенство (11), откуда вытекает формула

$$S_{\alpha^D}(x) = x + \alpha^D + l(x)\,,$$

причем для любого x из T^D его образ $x + \alpha^D + l(x)$ принадлежит торической развертке T^D. Отсюда получаем следующие равенства

$$\mathrm{Fr}(x + \alpha^D) = x + \alpha^D + l(x) = x + u(x)\,, \tag{13}$$

справедливые при любом $x \in T^D$.

Для доказательства (10) заметим, что

$$x + \alpha^D = x + \alpha^D + l(x) \mathrm{mod}\, L\,, \tag{14}$$

где $l(x) \in L$, и в силу (12) выполняется включение

$$x + \alpha^D + l(x) \in T^D\,. \tag{15}$$

Из (13) следует

$$\triangle \mathrm{Fr}(x) = \mathrm{Fr}(x + \alpha^D) - \mathrm{Fr}(x) = x + \alpha^D + l(x) - x = \alpha^D + l(x) = u(x)$$

для любого $x \in T^D$.

Рассмотрим теперь общий случай $x \in \mathbb{R}^D$. Так как разверткой T^D можно замостить пространство, любое x можно представить в виде $x = x' + l$ для некоторых $x' \in T^D$ и $l \in L$, и тогда получаем (8). По (14) и (15) имеем

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{Fr}(x) &= \mathrm{Fr}(x + \alpha^D) - \mathrm{Fr}(x) = \\ &= x' + \alpha^D + l(x) - x' = \alpha^D + l(x) = u(x)\,,\end{aligned}$$

то есть снова получили равенство (10). ■

4. Суммарное векторное отклонение. Теперь определим *суммарное векторное отклонение*, как векторно-значную функцию

$$\delta(i, x_0) = \sum_{0 \le j < i} \triangle \mathrm{Fr}(j\beta^D + x_0) \tag{16}$$

для $i = 0, 1, 2, \dots,$ где

$$\beta^D = \frac{1}{h}(\alpha^D + l)\,, \tag{17}$$

при этом h — натуральное число, l — вектор из L. Из равенств (10) и (11) можем функцию (16) записать так

$$\delta(i,x_0) = \sum_{0\le j<i} (\alpha^D + l(x_0 + j\alpha^D)) = i\alpha^D + \sum_{0\le j<i} l(x_0 + j\alpha^D)\,.$$

Откуда можем записать в виде

$$\delta(i,x_0) = i\alpha^D + \sum_{\substack{0\le j<i,\\ \mathrm{Fr}(x_0+j\alpha^D)}} 1\,,$$

или в следующей форме

$$\delta(i,x_0) = i\alpha^D + r_1(i,x_0)l_1 + \ldots + r_D(i,x_0)l_D\,, \tag{18}$$

где

$$r_k(i,x_0) = \sharp\{j : \mathrm{Fr}(j\beta^D + x_0) \in T_k^D, 0 \le j < i\}\,, \tag{19}$$

или, если воспользоваться сдвигом тора, то счетную функцию (19) можно также записать

$$r_k(i,x_0) = \sharp\{j : S^j_{\beta^D}(x_0) \in T_k^D, 0 \le j < i\}\,, \tag{20}$$

где S_{β^D} — сдвиг тора на вектор β^D, определенный в (17), и $S_{\beta^D} : T^D \mapsto \mathbb{T}^D : x \mapsto S_{\beta^D} \equiv x + \beta^D \bmod L$.

Сумму (16) можно вычислить иным способом. Исходя из определения (16), запишем $\delta(i,x_0)$ как разность сумм

$$\delta(i,x_0) = \sum_{0\le j<i} \mathrm{Fr}(j\beta^D + \alpha^D + x_0) - \sum_{0\le j<i} \mathrm{Fr}(j\beta^D)\,. \tag{21}$$

Из (17) имеем

$$\alpha^D \equiv h\beta^D \bmod L\,. \tag{22}$$

Тогда из (22) и определения (8) следует равенство

$$\mathrm{Fr}(j\beta^D + \alpha^D + x_0) = \mathrm{Fr}(j\beta^D + h\beta^D + x_0)\,. \tag{23}$$

Из (23) получаем

$$\sum_{0\le j<i} \mathrm{Fr}(j\beta^D + \alpha^D + x_0) = \sum_{0\le j<i} \mathrm{Fr}(j\beta^D + h\beta^D + x_0) = \sum_{n\le j<i+n} \mathrm{Fr}(j\beta^D + x_0)\,.$$

Из полученного равенства и формулы (21) получаем еще одно представление для $\delta(i,x_0)$

$$\delta(i,x_0) = \sum_{n\le j<i+n} \mathrm{Fr}(j\beta^D + x_0) - \sum_{0\le j<i} \mathrm{Fr}(j\beta^D + x_0)\,. \tag{24}$$

Предположим, что $i > h$, тогда из (24) следует равенство

$$\delta(i,x_0) = \sum_{0\le j\le h-1} \left(\mathrm{Fr}(j\beta^D + i\beta^D + x_0) - \mathrm{Fr}(j\beta^D + x_0)\right), \tag{25}$$

или при $0 \le i \le h$ получим

$$\delta(i,x_0) = \sum_{0\le j< i} \left(\mathrm{Fr}(j\beta^D + i\beta^D + x_0) - \mathrm{Fr}(j\beta^D + x_0)\right). \tag{26}$$

Это равенство вытекает из определения (16) и сравнения (22).

5. Отклонения для считающих функций. По условию L — полная решетка (3). Для ее базиса $l_1,\dots,l_D$ существует двойственный базис $l_1^*,\dots,l_D^*$, связанный с исходным соотношением

$$l_k^*\cdot l_m = \begin{cases} 0, \text{ при } k\ne m \\ 1, \text{ при } k = m\,. \end{cases} \tag{27}$$

где $\cdot$ обозначает скалярное произведение.

Используя (27) и (18), получаем равенства

$$l_k^*\cdot\delta(i,x_0) = r_k(i,x_0) + il_k^*\cdot\alpha^D \text{ для } k=1,\dots,D\,. \tag{28}$$

Обозначим

$$\delta_k(i,x_0) = l_k^*\cdot\delta(i,x_0) \tag{29}$$

и перепишем

$$\delta_k(i,x_0) = r_k(i,x_0) - is_k \text{ для } k=1,\dots,D, \tag{30}$$

где

$$s_k = -l_k^*\cdot\alpha^D\,. \tag{31}$$

Назовем $\delta_k(i,x_0)$ из (30) отклонением распределения точек орбиты

$$\mathrm{Orb}_{S_{\beta^D}}(x_0) = \{S^i_{\beta^D}(x_0) \equiv x_0 + i\beta^D \bmod L, i=0,1,2,\dots\}$$

относительно области $\mathbb{T}_k^D \subset \mathbb{T}^D$ или отклонением считающей функции $r_k(i,x_0)$ (20) от ожидаемой величины is_k, где s_k определяется формулой (31).

Из равенств (28) и (30) следует, что $\delta(i,x_0)$ связано с отклонениями $\delta_k(i,x_0)$ соотношениями

$$\delta(i,x_0) = \delta_1(i,x_0)l_1 + \ldots + \delta_D(i,x_0)l_D.$$

Найдем теперь формулу для вычисления отклонения $\delta_0(i,x_0)$ относительно области $\mathbb{T}_0^D$.

Из определений (19) и (20) считающих функций $r_k(i,x_0)$ следует, что они удовлетворяют тождеству

$$r_0(i,x_0) + r_1(i,x_0) + \ldots + r_D(i,x_0) = i \tag{32}$$

для любого $i = 0,1,2,\dots$ Определим s_0 равенством

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_D = 1\,. \tag{33}$$

Из (32) и (33) получаем

$$[r_0(i,x_0) - is_0] + [r_1(i,x_0) - is_1] + \ldots + [r_D(i,x_0) - is_D] = 0\,.$$

По аналогии с отклонениями $\delta_1(i,x_0),\ldots,\delta_D(i,x_0)$ (29) определим нулевое отклонение

$$\delta_0(i,x_0) = r_0(i,x_0) - is_0\,.$$

Тогда между всеми отклонениями $\delta_k(i,x_0), k = 0,1,\ldots,D$ выполняется соотношение

$$\delta_0(i,x_0) + \delta_1(i,x_0) + \ldots + \delta_D(i,x_0) = 0$$

для всех $i = 0,1,2,\ldots$, и для нулевого отклонения получаем представление

$$\delta_0(i,x_0) = -\delta_1(i,x_0) - \ldots - \delta_D(i,x_0)\,, \tag{34}$$

или согласно (29) и (34) для отклонения $\delta_0(i,x_0)$ можем записать

$$\delta_0(i,x_0) = -l_1^*\delta(i,x_0) - \ldots - l_D^*\delta(i,x_0) = -(l_1^* + \ldots + l_D^*)\delta(i,x_0)\,.$$

Определим в дополнение к векторам (27) вектор l_0^* равенством

$$l_0^* = -l_1^* - \ldots - l_D^*\,,$$

тогда для нулевого отклонения $\delta_0(i,x_0)$ будет следовать представление

$$\delta_0(i,x_0) = l_0^*\delta(i,x_0)\,. \tag{35}$$

Сравнивая полученную формулу с выражением (29) легко заметить, что нам удалось восстановить симметрию между всеми отклонениями $\delta_k, k = 0,1,\ldots,D$.

6. Точные границы для отклонений. Все готово, чтобы получить следующий результат.

Предложение 1. *Пусть вектор сдвига β^D определен равенством (17) и определены отклонения $\delta_k(i,x_0) = r_k(i,x_0) - ia_k$ для $k = 0,1,\ldots,D$. Тогда отклонения могут быть представлены еще в одной из двух форм:*

$$\delta_k(i,x_0) = \sum_{0\le j\le h-1} (\mathrm{Fr}_k(j\beta^D + i\beta^D + x_0) - \mathrm{Fr}_k(j\beta^D + x_0)) \tag{36}$$

для $i > h$, и

$$\delta(i,x_0) = \sum_{0\le j<i} (\mathrm{Fr}(j\beta^D + i\beta^D + x_0) - \mathrm{Fr}(j\beta^D + x_0)) \tag{37}$$

для $0 \le i \le h$, где $\mathrm{Fr}_k(x) = l_k^*\cdot\mathrm{Fr}(x)$ для $k = 0,1,\ldots,D$, и $\mathrm{Fr}(x)$ определено в (8).

□ Равенство (36) вытекает непосредственно из определения (16) и формул для отклонений $\delta_k(i,x_0), k = 0,1,\ldots,D$, (29), (35), а равенство (37) из (25). ■

Используя предложение 1, можем доказать теорему о границах отклонений для сдвига на вектор β^D.

Теорема 1. *Пусть задан вектор $\beta^D = \frac{1}{h}(\alpha^D + l)$, где h — натуральное число, и l — вектор из решетки L, определенной в (3). Тогда при любом $k = 0, 1, \ldots, D$ для отклонений δ_k выполняются неравенства*

$$h\underline{m}_k(T^D) \le \delta_k(x, x_0) \le h\overline{m}_k(T^D) \quad \text{для } 0 \le i \le h\,, \tag{38}$$

$$i\underline{m}_k(T^D) \le \delta_k(x, x_0) \le i\overline{m}_k(T^D) \quad \text{для } i > h\,, \tag{39}$$

где крайние значения $\underline{m}_k(X)$ и $\overline{m}_k(X)$ определяются формулами

$$\underline{m}_k(X) = \inf\nolimits_{x\in X} l_k^* \cdot x, \quad \overline{m}_k(X) = \sup\nolimits_{x\in X} l_k^* \cdot x\,. \tag{40}$$

□ Пусть $x \in \mathbb{R}^D$. Определим векторно-значную функцию

$$\mathcal{D}(x, x_0) = \sum_{0\le j\le h-1} (\mathrm{Fr}(j\beta^D + x_0 + x) - \mathrm{Fr}(j\beta^D + x_0)).$$

Из определения (8) векторной дробной части $\mathrm{Fr}(x)$ вытекает равенство

$$\mathcal{D}(x + l, x_0) = \mathcal{D}(x, x_0)$$

для любого вектора l из решетки L, т.е. $\mathcal{D}(x, x_0)$ — периодическая функция на пространстве $\mathbb{R}^D$ с полной решеткой периодов L. В терминах функции $\mathcal{D}(x, x_0)$ равенство (25) можем записать как композицию

$$\delta(i, x_0) = \mathcal{D}(\mathrm{Fr}(j\beta^D), x_0) \tag{41}$$

функций $\mathrm{Fr}(x)$ и $\mathcal{D}(x, x_0)$.

Пусть $i > h$. Определим разностную функцию

$$\Delta(x, y) = \mathrm{Fr}(x + y) - \mathrm{Fr}(y)\,, \tag{42}$$

обладающую, согласно определению (8) векторной дробной части $\mathrm{Fr}(x)$, свойством периодичности

$$\Delta(x + l, y + l') = \Delta(x, y)\,,$$

с периодами l, l' из решетки L. Используя (42), функцию $\mathcal{D}(x, x_0)$ можно будет переписать в виде

$$\mathcal{D}(x, x_0) = \sum_{0\le j\le h-1} \Delta(x, j\beta^D + x_0)\,. \tag{43}$$

Из определения (42) разностной функции $\Delta(x, y)$ следует, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^D$ справедливо включение

$$\Delta(x, y) \in T^D_\Delta\,, \tag{44}$$

где $T^D_\Delta = \{t-t'; t,t' \in T^D\}$ — *разностное множество* для развертки T^D. Из определения следует, что разностное множество T^D_Δ центрально-симметрично относительно начала координат в $\mathbb{R}^D$. Из (43) и (44) вытекает включение

$$\mathcal{D}(x,x_0) \in hT^D_\Delta \tag{45}$$

для любого x из $\mathbb{R}^D$ где умножение на h означает гомотетию $t \to ht$ с натуральным коэффициентом h.

Следовательно из (44) получим последовательность включений для любых $x, y \in \mathbb{R}^D$

$$l^*_k \cdot \Delta(x,y) \in (l^*_k \cdot T^D)_\Delta \quad \text{для } k = 0,1,\ldots,D\,, \tag{46}$$

так как $l^*_k \cdot (T^D)_\Delta$ в силу равенства $l^*_k \cdot T^D = \{l^*_k \cdot t; t \in T^D\}$. Если обозначить

$$\mathcal{D}_k(x,x_0) = l^*_k \cdot \mathcal{D}(x,x_0)\,, \tag{47}$$

то из формул (45) — (47) для любого $x \in \mathbb{R}^D$ получаем включения

$$\mathcal{D}_k(x,x_0) \in h(l^*_k \cdot T^D)_\Delta \quad \text{для } k = 0,1,\ldots,D\,. \tag{48}$$

Из (48) и (40) следует неравенство

$$h\underline{m}_k(T^D)\mathcal{D}_k(x,x_0) \le h\overline{m}_k(T^D) \tag{49}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^D$ и $k = 0,1,\ldots,D$. Согласно формулам (41) и (49) получаем неравенства (38). В случае $0 \le i \le h$, используя аналогичные рассуждения, равенство (26) и включение (45), получаем (39). ■

В одномерном случае для полуинтервалов T^1_0 и T^1_1 Э. Гекке получил следующую оценку остаточных членов

$$|\delta_0(i)| \le 1, \quad |\delta_1(i)| \le 1$$

для всех $i = 0,1,2,\ldots$.

Для двумерного случая в [8] были получены точные границы отклонений в случае сдвига на вектор α^2. Для сдвига S_{β^2} тора $\mathbb{T}^2$ на вектор β^2 справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть дан сдвиг тора S_{β^2} на вектор $\beta^2 = \frac{1}{h}(\alpha^2 + d)$, где $h \in \mathbb{N}$, а d вектор из решетки $\mathbb{Z}^2$. Пусть тор $\mathbb{T}^2$ разбит на области $\mathbb{T}^2_{k'}$: $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2_0 \sqcup \mathbb{T}^2_1 \sqcup \mathbb{T}^2_2$, тогда области $\mathbb{T}^2_{k'}$ являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига S_{β^2} на вектор β^2 и для отклонений выполняются неравенства:*

$$\begin{array}{rcll} -h(x_{01}+x_{02}) & \le \delta_0(i,x_0) \le & h(2-\sigma(c)-x_{01}-x_{02}) & \text{для } \sigma(c) \le; \\ -h(x_{01}+x_{02}+\sigma(c)-1) & \le \delta_0(i,x_0) \le & h(1-x_{01}-x_{02}) & \text{для } \sigma(c) > 1; \\ h(x_{01}-1) & \le \delta_1(i,x_0) \le & h(x_{01}+c_1); & \\ h(x_{02}-1) & \le \delta_2(i,x_0) \le & h(x_{01}+c_2). & \end{array} \tag{50}$$

□ Справедливость неравенств (50) вытекает из теоремы 1. ■

Эта теорема является обобщением теоремы Гекке на случай двумерных торов. В этом случае границы отклонений $\delta_k(i, x_0)$ зависят только от формы развертки тора $T^2(c)$ и выбора параметра h вектора β^2 и не зависят от выбора вектора α^2.

7. Произведение торических разверток.

7.1. Определение. В [9] определено понятие произведения торических разверток. Рассмотрим определение применительно к случаю произведения полуинтерва T^1 и шестиугольной развертки двумерного тора $T_2(c)$, имеющих разбиения (4) и (6) и векторы перекладывания (5) и (7) соответственно.

Определим *k-произведение* $T^1 \otimes_k T^2(c), k = 0, 1$ следующими свойствами:

1)
$$T^1 \otimes_k T^2(c) = \{(x, y, z); x \in T^1, y, z \in T^2(c)\} \subset \mathbb{R}^3, \tag{51}$$

то есть как множество произведение $T^1 \otimes_k T^2(c)$ совпадает с прямым произведением $T^1 \times T^2(c)$ множеств T^1 и $T^2(c)$;

2) на множестве (51) задано разбиение

$$T^1 \otimes_k T^2(c) = \coprod_{\substack{0 \le n \le 1, \\ n \ne k}} T_n^3 \coprod_{0 \le m \le 2} T_{k,m}^3 \tag{52}$$

на множества

$$\begin{array}{rcll} T_n^3 & = & T_n^1 \times T^2 & \text{для } n = 0, 1, n \ne k, \\ T_{k,m}^3 & = & T_k^1 \times T_m^2 & \text{для } m = 0, 1, 2, \end{array}$$

а также определено перекладывание $S_{v \otimes_k w}$ этих множеств

$$\begin{array}{rcll} S_{v \otimes_k w} : T_n^3 & \longmapsto & T_n^3 + (v_n, 0) & \text{для } n = 0, 1, n \ne k, \\ S_{v \otimes_k w} : T_{k,m}^3 & \longmapsto & T_{k,m}^3 + (v_k, w_m) & \text{для } m = 0, 1, 2. \end{array} \tag{53}$$

Замечание 1.

1. Количество множеств в разбиении (52) равно $D_1 + D_2 + 1 = 4$.

2. Непосредственно из определения (51) следует некоммутативность операции умножения $T^1 \otimes_k T^2(c)$.

3. Для торических разверток T^1 и $T^2(c)$ с учетом перестановок $T^1 \otimes_k T^2(c)$ и $T^2(c) \otimes_{k'} T^1$ и выбора индексов k, k' существует пять различных произведений.

Из леммы 3.1., доказанной в [9], следует, что перекладывание (53) множества (52) замкнуто, и множества $T^1 \otimes_k T^2(c)$ и $T^2(c) \otimes_{k'} T^1$ имеют объем $\operatorname{vol} T^1 \otimes_1 T^2(c) = \operatorname{vol} T^2(c) \otimes_{k'} T^1 = \operatorname{vol} T^1 \cdot \operatorname{vol} T^2(c) = \operatorname{vol} T^2(c) \cdot \operatorname{vol} T^1 = 1$.

7.2. Случай $k = 0$. Рассмотрим 0-произведение полуинтервала на шестиугольник, то есть случай $k = 0$. Формула (51) примет вид

$$T^1 \otimes_0 T^2(c) = \{(x, y, z); x \in T^1, y, z \in T^2(c)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Геометрически множество $T^1 \otimes_0 T^2(c)$ представляет собой шестиугольную призму Е.С. Федорова [10] с координатами вершин $(0, 0, 0), (0, 1-c_1, -c_2), (0, 1, 0), (0, 1-c_1, 1-c_2)$,

$(0,0,1),(0,-c_1,1-c_2),(1,0,0),(1,1-c_1,-c_2),(1,1,0),(1,-c_1,-c_2),(1,0,1),(1,-c_1,1-c_2)$ в ортонормированном базисе (e_1,e_2,e_3).

Разбиение (52) осуществляется на множества (рис. 2)

$$\begin{array}{lcll} T^3_1 & = & T^1_1 \times T^2 & \text{— шестиугольная призма,} \\ T^3_{0,0} & = & T^1_0 \times T^2_0 & \text{— шестиугольная призма,} \\ T^3_{0,1} & = & T^1_0 \times T^2_1 & \text{— параллелепипед,} \\ T^3_{0,2} & = & T^1_0 \times T^2_2 & \text{— параллелепипед.} \end{array} \tag{54}$$

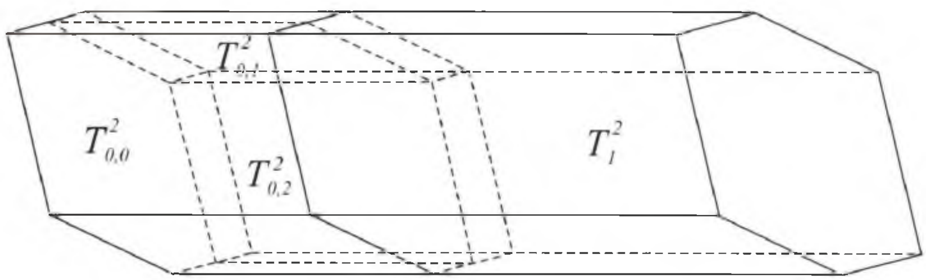

Рис. 2.

В соответствии с определением (53) для множеств (10) имеем следующее множество векторов перекладывания

$$\begin{gathered} v\otimes_0 w = \{(v_1,0),(v_0,w_0),(v_0,w_1),(v_0,w_2)\} = \\ = \{(\alpha^1-1,0,0),(\alpha^1,\alpha^2_1,\alpha^2_2),(\alpha^1,\alpha^2_1-1,\alpha^2_2),(\alpha^1,\alpha^2_1,\alpha^2_2-1)\}\,. \end{gathered} \tag{55}$$

За начальный или нулевой вектор примем вектор $(v_0,w_0)=(\alpha^1,\alpha^2_1,\alpha^2_2)$, тогда векторы (55) задают решетку

$$L^1\otimes_0 L^2 = \mathbb{Z}[\bar{l}^0_1,\overline{m}_1,\overline{m}_2], \tag{56}$$

порождаемую векторами

$$\left\{ \begin{array}{lll} \bar{l}^0_1 & =(v_1,0)-(v_0,w_0) & =(l^0_1,-w_0)\,, \\ \overline{m}_1 & =(v_0,w_1)-(v_0,w_0) & =(0,m_1)\,, \\ \overline{m}_2 & =(v_0,w_2)-(v_0,w_0) & =(0,m_2)\,, \end{array} \right. \tag{57}$$

где

$$L^1=\mathbb{Z}[l^0_1], \quad L^2=\mathbb{Z}[m_1,m_2] \tag{58}$$

с векторами $l^0_1=-1$ и $m_1=(-1,0), m_2=(0,-1)$ обозначают полные решетки соответственно для полуинтервала T^1 и шестиугольной развертки $T^2(c)$ двумерного тора $\mathbb{T}^2$.

Исходя из леммы 3.2. [9] решетка $L^1\otimes_0 L^2$ — полная и ее обьем равен

$$\mathrm{vol}\, L^1\otimes_0 L^2 = \mathrm{vol}\, L^1\cdot \mathrm{vol}\, L^2\,.$$

Шестиугольной призмой Федорова $T^1 \otimes_0 T^2(c)$ можно замостить пространство $\mathbb{R}^3$, таким образом $T^1 \otimes_0 T^2(c)$ можно считать фундаментальной областью для решетки (56) и ее можно считать разверткой трехмерного тора $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.

В качестве вектора сдвига тора $\mathbb{T}^3$ выберем начальный вектор $\gamma^0 = (v_0, w_0)$. Для полуинтервала T^1 и шестиугольной развертки $T^2(c)$ разложение векторов сдвига v_0 и w_0 по базисам (58) имееют вид: $v_0 = \alpha^1 l_1^0, w_0 = \alpha_1^2 m_1 + \alpha_2^2 m_2$. По (57) и данному разложению имеем равенство

$$\gamma^0 - \alpha^1 \overline{l}_1^0 = (0, (\alpha^1 + 1)w_0)\,,$$

и для вектора γ^0 получаем разложение в базисе (57)

$$\gamma^0 = \alpha^1 \overline{l}_1^0 + (\alpha^1 + 1)\alpha_1^2 m_1 + (\alpha^1 + 1)\alpha_2^2 m_2\,.$$

Отсюда вытекает, что вектор $\gamma^0 = (v_0, w_0) = (\alpha^1, \alpha_1^2, \alpha_2^2)$ иррационален относительно решетки $L^1 \otimes_0 L^2$ тогда и только тогда, когда числа $\alpha^1, (\alpha^1+1)\alpha_1^2, (\alpha^1+1)\alpha_2^2, 1$ линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

Сдвиг тора $\mathbb{T}^3$ на вектор γ^0 задает орбиту распределения точек на нем. Рассмотрим орбиту с произвольной начальной точкой $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$. Так как тору $\mathbb{T}^3$ изоморфна его развертка $T^1 \otimes_0 T^2(c)$, то для каждой ее области (10) определим считающие функции

$$\begin{aligned} r_1(i, x_0) &= \sharp\{j : S_{\gamma^0}^j(x_0) \in T_1^3\,, 0 \le j < i\}\,, \\ r_{0,m}(i, x_0) &= \sharp\{j : S_{\gamma^0}^j(x_0) \in T_{0,0}^3, 0 \le j < i\}, \quad m = 0, 1, 2\,, \end{aligned} \tag{59}$$

как количество попаданий точек в соответствующую область. Также определим отклонения функций (59) от ожидаемой величины

$$\begin{aligned} \delta_1(i, x_0) &= r_1(i, x_0) - i\,\mathrm{vol} T_1^3, \\ \delta_{0,0}(i, x_0) &= r_{0,0}(i, x_0) - i\,\mathrm{vol}\, T_{0,0}^3, \quad m = 0, 1, 2\,, \end{aligned} \tag{60}$$

где $\mathrm{vol}\, T_1^3, \mathrm{vol}\, T_{0,m}^3, m = 0, 1, 2$ — объемы областей $T_1^3, T_{0,m}^3, m = 0, 1, 2$ с одной стороны, а с другой, — частота попадания точек в соответствующую область, так как общий объем призмы $T^1 \otimes_0 T^2(c)$ равен 1.

Для отклонений докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть задан трехмерный тор $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ с разбиением $T_1^3 \sqcup T_{0,0}^3 \sqcup T_{0,1}^3 \sqcup T_{0,2}^3$, которое задается произведением $T^1 \otimes_0 T^2(c)$. Пусть кроме того задан иррациональный вектор γ^0 сдвига тора $\mathbb{T}^3$, тогда для отклонений $\delta_1(i, x_0), \delta_{0,m}(i, x_0), m = 0, 1, 2$ справедливы следующие точные неравенства:*

$$\begin{array}{rcccll} -\sigma(x_0) & \le & \delta_{0,0}(i, x_0) & \le & 3 - \sigma(c)(t+1) - \sigma(x_0) & \text{для } \sigma(c) \le 1\,; \\ 1 - \sigma(c) - \sigma(x_0) & \le & \delta_{0,0}(i, x_0) & \le & 2 - t\sigma(c) - \sigma(x_0) & \text{для } \sigma(c) > 1\,; \\ x_{01} - 1 & \le & \delta_1(i) & \le & x_{01}\,; & \\ x_{02} - 1 & \le & \delta_{0,1}(i, x_0) & \le & x_{02} + \alpha_1^2 + c_1\,; & \\ x_{03} - 1 & \le & \delta_{0,2}(i, x_0) & \le & x_{03} + \alpha_2^2 + c_2\,. & \end{array} \tag{61}$$

□ Для доказательства неравенств (61) определим для решетки $L^1 \otimes_0 L^2$ двойственный базис. Так как $L^1 \otimes_0 L^2$ — полная, тогда для ее базиса (57) существует двойственный базис $\overline{l}_1^{0*}, \overline{m}_1^*, \overline{m}_2^*$, связанный с исходным базисом соотношениями (27). Полученный базис будет иметь следующие координаты

$$\overline{l}_1^{0*} = (-1, 0, 0), \quad \overline{m}_1^* = (\alpha_1^2, -1, 0), \quad \overline{m}_2^* = (\alpha_2^2, 0, -1) \,. \tag{62}$$

Из выражения (18) следует, что суммарное векторное отклонение может быть записано следующим образом

$$\delta(i, x_0) = i\gamma^0 + r_1(i, x_0)\overline{l}_1^0 + r_{0,1}(i, x_0)\overline{m}_1 + r_{0,2}(i, x_0)\overline{m}_2 \,. \tag{63}$$

Используя двойственный базис (62) и представление $\delta(i)$ (63), получаем следующие равенства

$$\begin{array}{lll} \overline{l}_1^{0*} \cdot \delta(i) & = r_1(i) - \ i\overline{l}_1^{0*} \cdot \gamma^0 & = \delta_1(i) \,, \\ \overline{m}_1^* \cdot \delta(i) & = r_{0,1}(i) - \ i\overline{m}_1^* \cdot \gamma^0 & = \delta_{0,1}(i) \,, \\ \overline{m}_2^* \cdot \delta(i) & = r_{0,2}(i) - \ i\overline{m}_2^* \gamma^0 & = \delta_{0,2}(i) \,, \end{array} \tag{64}$$

где объемы областей (10) рассчитываются по следующим формулам

$$\operatorname{vol} T_1^3 = \overline{l}_1^{0*} \cdot \gamma^0 = \alpha^1, \quad \operatorname{vol} T_{0,1}^3 = \overline{m}_1^* \cdot \gamma^0 = \alpha_1^2(1 - \alpha^1), \quad \operatorname{vol} T_{0,2}^3 = \overline{m}_2^* \cdot \gamma^0 = \alpha_2^2(1 - \alpha^1) \,.$$

Вычислим также вектор решетки для определения отклонения $\delta_{0,0}(i, x_0)$. Из определения (59) считающих функций следует, что они удовлетворяют тождеству

$$r_1(i, x_0) + r_{0,0}(i, x_0) + r_{0,1}(i, x_0) + r_{0,2}(i, x_0) = i \tag{65}$$

для любого $i = 0, 1, 2, \ldots$. Объем области $T_{0,0}^3$ определим равенством

$$\operatorname{vol} T_1^3 + \operatorname{vol} T_{0,0}^3 + \operatorname{vol} T_{0,1}^3 + \operatorname{vol} T_{0,2}^3 = 1 \,. \tag{66}$$

Согласно (65) и (66), имеем

$$\delta_{0,0}(i, x_0) = -\delta_1(i, x_0) - \delta_{0,1}(i, x_0) - \delta_{0,2}(i, x_0)$$

или можем записать

$$\delta_{0,0}(i, x_0) = -\overline{l}_1^{0*} \cdot \delta(i, x_0) - \overline{m}_1^* \cdot \delta(i, x_0) - \overline{m}_2^* \cdot \delta(i, x_0) = (-\overline{l}_1^{0*} - \overline{m}_1^* - \overline{m}_2^*) \cdot \delta(i) \,. \tag{67}$$

Обозначим вектор

$$\overline{l}_0^0 = -\overline{l}_1^{0*} - \overline{m}_1^* - \overline{m}_2^* = (1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2, 1, 1) \,. \tag{68}$$

Так как развертка $T^1 \otimes_0 T^2(c)$ перекладывающаяся, можно записать

$$x_0 + \delta(i, x_0) \in T^1 \otimes_0 T^2(c).$$

Спроектировав это выражение на векторы двойственного базиса (62) и (68) получим доказываемые неравенства (61). Таким образом границы отклонений определяются вершинами развертки. ■

Заметим, что полученные границы отклонений не зависят от выбора вектора α^1, так как геометрически границы отклонений определяются проекциями афинного образа развертки $T^1 \otimes_0 T^2(c)$ в ортонормированном базисе, а они не зависят от вектора α^1. В случае остальных четырех произведений границы отклонений также не зависят от выбора вектора сдвига первого множителя.

Следствие 1. *Если в качестве вектора сдвига выбрать вектор* $\gamma' = \frac{1}{h}(\gamma^0 + d)$, *где* $h \in \mathbb{N}, d \in L^1 \otimes_0 L^2$ *для произведения* $T^1 \otimes_0 T^2(c)$, *то границы отклонений примут вид:*

$$\begin{array}{rcccll} -h\sigma(x_0) & \le & \delta_{0,0}(i,x_0) & \le & h(3-\sigma(c)(t+1)-\sigma(x_0)) & \text{для}\, \sigma(c) \le 1\,; \\ h(1-\sigma(c)-\sigma(x_0)) & \le & \delta_{0,0}(i,x_0) & \le & h(2-t\sigma(c)-\sigma(x_0)) & \text{для}\, \sigma(c) > 1\,; \\ h(x_{01}-1) & \le & \delta_1(i) & \le & hx_{01}\,; & \\ h(x_{02}-1) & \le & \delta_{0,1}(i,x_0) & \le & h(x_{02}+\beta_1+c_1)\,; & \\ h(x_{03}-1) & \le & \delta_{0,2}(i,x_0) & \le & h(x_{03}+\beta_2+c_2)\,. & \end{array} \tag{69}$$

□ вытекает из теорем 1 и 2. ■

Следствие 1 является обобщением теоремы Гекке на случай разбиений трехмерных торов. Аналогичные рассуждения можно провести для 1-произведения полуинтервала на шестиугольник и k'-произведений, $k' = 0, 1, 2$, шестиугольника и полуинтервала.

8. Средние значения отклонений. Определим теперь среднее значение векторного отклонения

$$\langle \delta(x_0) \rangle = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\le i\le N} \delta(i,x_0)\,, \tag{70}$$

если указанный предел существует.

Относительно средних значений отклонений доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть дан сдвиг тора* $\mathbb{T}^3$ *на вектор* γ^0. *Пусть вектор* γ^0 *иррациональный.*

1. Тогда существует среднее значение $\langle \delta(x_0) \rangle$ (70) *суммарного векторного отклонения* $\delta(i)$, *и оно вычисляется по формуле*

$$\langle \delta(x_0) \rangle = C_{T^1 \otimes_0 T^2(c)} - x_0, \tag{71}$$

где $C_{T^1 \otimes_0 T^2(c)} = (1/2, (1-c_1)/2, (1-c_2)/2)$ — *центр тяжести призмы* $T^1 \otimes_0 T^2(c)$.

2. Также $T^3_1, T^3_{0,m}, m = 0, 1, 2$ *существуют средние значения отклонений*

$$\langle \delta_1(x_0) \rangle = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\le i\le N} \delta_1(i,x_0)\,,$$

$$\langle \delta_{0,1}(x_0) \rangle = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\le i\le N} \delta_{0,1}(i,x_0)\,,$$

и они соответственно равны

$$\begin{aligned} \langle\delta_{0,0}(x_0)\rangle &= \sigma(x)+\sigma(c)/2-3/2\,, \\ \langle\delta_1(x_0)\rangle &= 1/2-x_{01}\,, \\ \langle\delta_{0,1}(x_0)\rangle &= (1-c_1)/2-x_{02}\,, \\ \langle\delta_{0,2}(x_0)\rangle &= (1-c_2)x_{03}/2\,. \end{aligned} \tag{72}$$

□ Из определения (10), формул (9)и (70) следует

$$\sum_{1\le i\le N}\delta(i,x_0)=\sum_{1\le i\le N}\left(\mathrm{Fr}(x_0+i\gamma^0)-\mathrm{Fr}(x_0)\right). \tag{73}$$

Для доказательства (71) воспользуемся формулой (73) и критерием Вейля

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\le i\le N}\delta(i,x_0)=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\le i\le N}(\mathrm{Fr}(x_0+i\gamma^0)-\mathrm{Fr}(x_0)=$$

$$=\int\limits_{T^1\otimes_0T^2(c)}xdx-x_0\int\limits_{T^1\otimes_0T^2(c)}dx=C_{T^1\otimes_0T^2(c)}-x_0\,\mathrm{vol}\,T^1\otimes_0T^2(c)\,,$$

где vol : $T^1\otimes_0T^2(c)$ — объем развертки тора vol $T^1\otimes_0T^2(c)$, и он равен 1. Таким образом утверждение (71) доказано.

Для доказательства формулы (72) воспользуемся выражениями (64), (67) и формулой (71). ■

Справедливо следующее следствие из теоремы 3.

Следствие 2. *Если начальная точка орбиты* $x_0=(x_{01},x_{02},x_{03})$ *расположена в центре тяжести* $C_{T^2(c)}=(1/2,(1-c_1)/2,(1-c_2)/2)$, *то*

1) среднее суммарное векторное отклонение

$$\langle\delta(x_0)\rangle=0;$$

2) средние отклонения выражаются формулами

$$\langle\delta_1(x_0)\rangle=0,\quad\langle\delta_{0,m}(x_0)\rangle=0,\quad m=0,1,2\,.$$

Аналогичным образом можно получить средние значения отклонений для 1-произведения полуинтервала на шестиугольник и $0,1,2$-произведений шестиугольника и полуинтервала.

Литература

1. Weyl H. Über die Gibbssche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo. – 1910. – 30. – P.377-407.
2. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins // Math. Sem. Hamburg. Univ. – 1921. – 1. – P.54-76.

3. Szüsz R. Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1954. – 5. – S.35-39.
4. Liardet P. Regularities of distribution // Compositio Math. – 1987. – 61. – P.267-293.
5. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France – 1982. – 110. – S.147-178.
6. Ferenczi S. Bounded remainder sets // Acta Arithmetica. – 1992. – 61. – P.319-326.
7. Журавлев В.Г. Многогранники ограниченного остатка // Труды математического института им. В.А. Стеклова, Современные проблемы математики. – 2012. – 16. – C 82-102.
8. Абросимова А.А. Множества ограниченного остатка на двумерном торе // Чебышевский сборник. – 2011. – 12. – 4(40). – С. 15–23.
9. Журавлев В.Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2011.– №392. – С. 95–145.
10. Федоров Е.С. Симметрия и структура кристаллов. Основные работы / М.: Изд-во Академии наук СССР, 1949.

BOUNDARIES OF DEVIATIONS FOR THREE-DIMENSIONAL BOUNDED REMAINDER SETS

A.A. Abrosimova

Vladimir State University named after A. and N. Stoletovs,
Stroiteley Av., 11, Vladimir, 600024, Russia, e-mail: AlbinaAbrosimowa@yandex.ru

Abstract. Three-dimensional bounded remainder sets and method of their construction is studied. It is found deviation boundaries of these sets.

Key words: bounded remainder sets, distribution of fractional parts, toric development, exchanged domains.