MSC 34M50

О ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Г.М. Айрапетян, В.А. Бабаян

Ереванский государственный университет,
ул. Алека Манукяна 1, Ереван, 0025, Армения, e-mail: hhayrapet@gmail.com,
Южный Федеральный Университет,
ул. Большая Садовая 105/42, Ростов-на-Дону, 344006, Россия, e-mail: bvazgen@gmail.com

Аннотация. В работе исследуется граничная задача Римана-Гильберта в пространстве непрерывных функций. Предложена новая постановка этой задачи, которая позволяет решить ее, когда граничная функция непрерывна на Γ. В явном виде получены условия разрешимости неоднородной задачи, а также линейно независимые решения однородной задачи. Решение неоднородной задачи также записывается в явном виде.

Ключевые слова: задача Римана-Гильберта, аппроксимативная единица, краевая задача, интеграл типа Коши, непрерывные функции.

1. Введение. Формулировка результатов

Пусть G^+ — односвязная ограниченная область комплексной плоскости ограниченная кривой Ляпунова Γ и $G^- = \mathbb{C}\backslash(G^+ \bigcup \Gamma)$. Не умаляя общности можем предполагать, что $0 \in G^+$. Предлагаемая работа посвящена исследованию в этой области граничной задачи Римана-Гильберта в пространстве непрерывных функций. Классическая постановка задачи Римана-Гильберта следующая. Требуется определить функцию Φ, аналитическую в области $G^+ \bigcup G^-$, обращающуюся в нуль на бесконечности $\Phi(\infty) = 0$. Предполагается, что функции $\Phi^\pm$ — ограничения функции Φ на области $G^\pm$ соответственно, непрерывны в $G^\pm \bigcup \Gamma$ и на границе Γ удовлетворяют соотношению:

$$\Phi^+(t) - a(t)\Phi^-(t) = f(t)\,, \quad t \in \Gamma\,. \tag{1}$$

Предполагается, далее, что заданная функция a принадлежат классу Гельдера на Γ, $a \in C^{(\delta)}(\Gamma)$, $0 < \delta \le 1$ и $a(t) \ne 0$ при $t \in \Gamma$. В [1] и [2] полностью изучен случай, когда $f \in C^{(\delta)}(\Gamma)$. Случай, когда $f \in \mathbb{L}^p(\Gamma)$ при $1 < p < \infty$ рассмотрен в [3]. В дальнейшем эта задача исследовалась в различных направлениях, однако так как решение этой задачи выражается при помощи интеграла типа Коши, то поточечное равенство (1) приводит к необходимости рассматривать такие пространства, где интеграл типа Коши является инвариантным оператором, например $C^{(\delta)}$ или $\mathbb{L}^p$ при $1 < p < \infty$ (см. [4]). Поэтому постановка (1) в пространстве непрерывных функций, в пространстве интегрируемых функций $\mathbb{L}^1$ и т.д. некорректна. В работе [5] была предложена новая постановка задачи Римана-Гильберта, которая позволила эффективно решить эту задачу в пространстве интегрируемых функций $\mathbb{L}^1$. В этой формулировке не предполагается, что функции $\Phi^\pm$

имеют граничные значения на граничной кривой Γ, что позволяет рассмотреть задачу в общих пространствах.

В настоящей работе будем предполагать, что граничная функция f непрерывная на Γ, и используем идею изложенную в [5]. Пусть $D^+ = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ единичный круг комплексной плоскости, $T = \partial D^+$ его граница и $D^- = \mathbb{C} \backslash (D^+ \bigcup T)$. Обозначим ω функцию, конформно отображающую круг D^+ на область G^+ и μ – функцию, конформно отображающую внешнюю часть круга D^- на область G^- т.е.

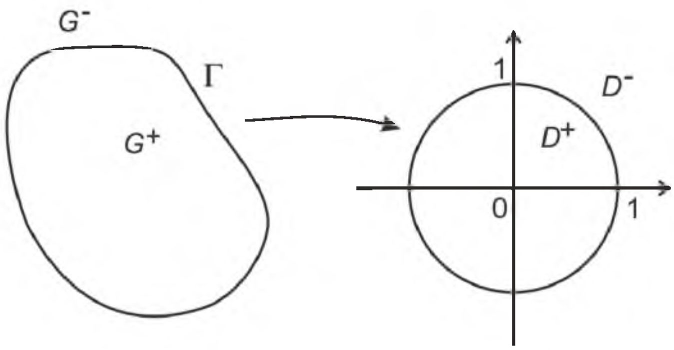
$$D^+ \ni z = \omega^{-1}(\xi) , \quad \xi \in G^+ ;$$

$$D^- \ni z = \mu^{-1}(\xi) , \quad \xi \in G^-, \mu(\infty) = \infty .$$

Для любого $0 < r < 1$ положим:

$$\lambda_r^+(z) = \omega(r\omega^{-1}(z)) , \quad z \in G^+ ; \tag{2}$$

$$\lambda_r^-(z) = \mu(r^{-1}\mu^{-1}(z)) , \quad z \in G^- . \tag{3}$$

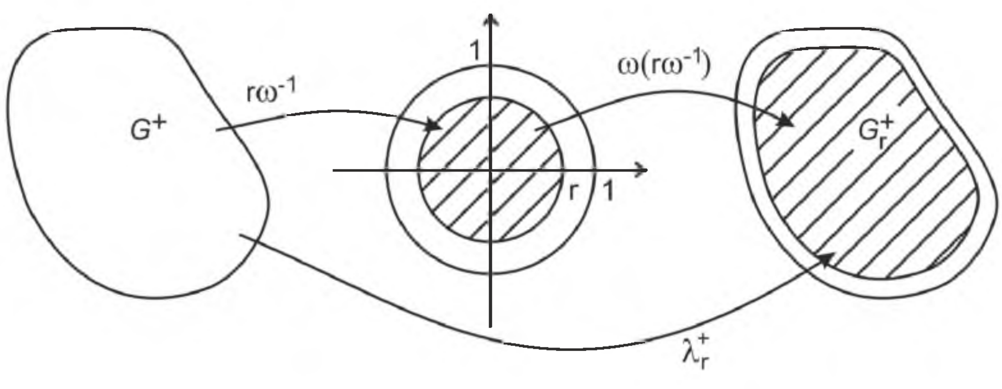


Задачу Римана в классе $C(\Gamma)$ определим следующим образом:

Определение. *Определить голоморфную в $G^+ \cup G^-$ функцию $\Phi \in A(\Gamma)$ по граничному условию*

$$\lim_{r \to 1-0} \left\| \Phi^+(\lambda_r^+(t)) - a(t)\Phi^-(\lambda_r^-(t)) - f(t) \right\|_{C(\Gamma)} = 0 , \tag{4}$$

где $f \in C(\Gamma)$, $\| \cdot \|_{C(\Gamma)}$ — норма в пространстве непрерывных функций $C(\Gamma)$ а $A(\Gamma)$ – класс аналитических вне Γ функций, обращающихся в нуль на бесконечности. Здесь и далее будем предполагать, что $\Phi^\pm$ ограничения функции Φ на области $G^\pm$ соответственно. Задачу (4) при $f \equiv 0$ будем называть однородной.



Мы предполагаем, что функция a принадлежит классу $C^{(\delta)}(\Gamma)$ и $a(t) \neq 0$ при всех $y \in \Gamma$. При этих предположениях функцию a можно представить в виде ([1]):

$$a(t) = t^{\kappa}\frac{S^{+}(t)}{S^{-}(t)}, \quad t \in \Gamma, \tag{5}$$

где $S^{\pm}$ аналитичны в $G^{\pm}$, $S^{\pm}(t) \neq 0$ при $t \in \overline{G^{\pm}}$, $S^{-}(\infty) = 1$, $S^{\pm} \in C^{(\delta)}(\overline{G^{\pm}})$, $\kappa = \operatorname{ind} a(t)\big|_{t\in\Gamma}$ — индекс функции a на Γ. Используя эти обозначения, полученные результаты можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1. *При $\kappa \geq 0$ задача (4) всегда имеет решение, а соответствующая однородная задача имеет κ линейно независимых решений. Общее решение задачи (4) определяется следующими соотношениями:*

$$\Phi^{+}(z) = \frac{S^{+}(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)}{S^{+}(t)}\frac{dt}{t-z} + S^{+}(z)P_{\kappa-1}(z), \quad z \in G^{+}, \tag{6}$$

$$\Phi^{-}(z) = \frac{S^{-}(z)}{z^{\kappa}2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)}{S^{+}(t)}\frac{dt}{t-z} + \frac{S^{-}(z)}{z^{\kappa}}P_{\kappa-1}(z), \quad z \in G^{-}. \tag{7}$$

Здесь $P_{\kappa-1}$ произвольный многочлен порядка $\kappa-1$ при $\kappa > 0$. Если $\kappa = 0$, то $P_{\kappa-1} \equiv 0$, соответственно, в этом случае задача (4) однозначно разрешима.

Теорема 2. *При $\kappa < 0$ задача (4) имеет решение тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет κ линейно независимым условиям:*

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)}{S^{+}(t)}t^{k}dt = 0, \qquad k = 0, ..., |\kappa| - 1, \tag{8}$$

а соответствующая однородная задача не имеет нетривиальных решений. Общее решение задачи (4) определяется по формулам (6), (7) при $P_{\kappa-1} \equiv 0$.

В заключение задача Римана-Гильберта в указанной постановке рассмотрена также для вектор-функций $\Phi^{\pm}$.

2. Вспомогательные предложения.

В этом пункте докажем два вспомогательных утверждения, необходимых для доказательства теорем.

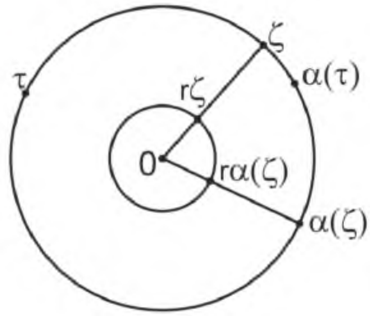
Лемма 1. *Пусть*

$$\alpha(\tau) \equiv \omega^{-1}(\mu(\tau)), \quad \tau \in T \tag{9}$$

— взаимно однозначное отображение единичной окружности T на себя. Тогда для произвольных точек τ и ζ, $\tau, \zeta \in T$ выполняется неравенство

$$|\alpha(t) - r\alpha(\zeta)| \geq C|\tau - r\zeta|, \quad \tau, \zeta \in T, \tag{10}$$

где C постоянная, не зависящая от r, τ, ζ.



□ Отметим, что при любом $0 \le r \le 1$, $\tau, \zeta \in T$ имеет место соотношение

$$1 - r \le |\alpha(\tau) - r\alpha(\zeta)| \le 1 + r\,,$$

где α определяется формулой (9). Аналогичная оценка верна также для $|\tau - r\zeta|$:

$$1 - r \le |\tau - r\zeta| \le 1 + r\,.$$

Пусть $0 \le r \le r_0$, где $0 \le r_0 < 1$. Тогда, учитывая, что функция $\frac{1-r}{1+r}$ монотонно убывает, получим

$$|\alpha(\tau) - r\alpha(\zeta)| \ge 1 - r = \frac{1-r}{1+r}(1+r) \ge \frac{1-r_0}{1+r_0}|\tau - r\zeta|\,. \tag{11}$$

Пусть теперь $r_0 \le r \le 1$. Если r, θ — полярные координаты точки $z = re^{i\theta}$, обозначим λ_1 и λ_2 соответственно действительную и мнимую части функции $\alpha(e^{i\theta})$:

$$\alpha(e^{i\theta}) \equiv \lambda_1(\theta) + i\lambda_2(\theta) \tag{12}$$

и рассмотрим отображение кольца $S = \{(\rho, \theta), r_0 \le \rho \le 1, -\pi \le \theta \le \pi\}$ на себя:

$$F(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho\lambda_1(\theta) \\ \rho\lambda_2(\theta) \end{pmatrix}\,. \tag{13}$$

Якобиан этого отображения имеет вид

$$J = \rho(\lambda_1(\theta)\lambda_2'(\theta) - \lambda_2(\theta)\lambda_1'(\theta))\,. \tag{14}$$

Учитывая, что из (9) $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$, получим

$$\lambda_1(\theta)\lambda_1'(\theta) + \lambda_2(\theta)\lambda_2'(\theta) = 0\,. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что якобиан $J \ne 0$ при всех $(\rho, \theta) \in S$. Действительно, если $J = 0$ то, так как $\rho \ne 0$, то из (14) и (15) получили бы, что $\lambda_1'(\theta) = \lambda_2'(\theta) = 0$ что невозможно, так как $(\alpha(e^{i\theta}))' \ne 0$.

Итак якобиан отображения (13) отличен от нуля, следовательно, по теореме об обратной функции ([6], стр. 111) получим, что обратное отображение F ограничено, то есть

$$|F(1, \varphi) - F(r, \theta)| \ge C\sqrt{(1-r)^2 + (\varphi - \theta)^2} = Cd$$

или

$$|\alpha(\tau) - r\alpha(\zeta)| \geq Cd\,, \tag{16}$$

где $\tau = e^{i\varphi}, \zeta = e^{i\theta}$. В этих обозначениях

$$|\tau - r\zeta| = \sqrt{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\varphi-\theta}{2}}$$

и поэтому, используя неравенство $|\sin x| \leq |x|, r < 1$, получим

$$d = \sqrt{(1-r)^2 + (\varphi-\theta)^2} \geq \sqrt{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\varphi-\theta}{2}} = |\tau - r\zeta|\,.$$

Подставляя эту оценку в (16) получим

$$|\alpha(\tau) - r\alpha(\zeta)| \geq C|\tau - r\zeta|\,. \tag{17}$$

Окончательно, из (11) и (17)

$$|\alpha(\tau) - r\alpha(\zeta)| \geq \tilde{C}|\tau - r\zeta|\,,$$

где $\tilde{C} = \min\left(C, \frac{1-r_0}{1+r_0}\right)$. ■

Следующее предложение является основным для дальнейших рассуждений.

Лемма 2. *Определим функцию $H_r(t,\xi)$ по следующей формуле*

$$H_r(t,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{t-\lambda_r^+(\xi)} - \frac{1}{t-\lambda_r^-(\xi)}\right), \quad \xi, t \in \Gamma\,, \tag{18}$$

где функции $\lambda_r^\pm$ определяются соотношениями (2), (3). Эта функция является аппроксиматпвной единицей, то есть удовлетворяет условиям

1. $\int\limits_\Gamma H_r(t,\xi)dt = 1$;
2. $\sup\limits_{|t-\xi|>\delta} |H_r(t,\xi)| \rightrightarrows 0$ *при* $r \to 1-0$ *равномерно по* t *и* ξ;
3. $\int\limits_\Gamma |H_r(t,\xi)||dt| \leq C$ *при всех* $0 < r < 1$.

□ Так как $\lambda_r^+(\xi) \in D^+$ и $\lambda_r^-(\xi) \in D^-$ при каждом $0 < r < 1, \xi \in \Gamma$ то по интегральной теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{dt}{t-\lambda_r^+(\xi)} = 1, \qquad \int\limits_\Gamma \frac{dt}{t-\lambda_r^-(\xi)} = 0\,,$$

то есть, соотношение 1) верно.

Далее, используя тот факт, что контур Γ является кривой Ляпунова, из теоремы Келлога ([7], гл. 10, параграф 1, т.6 стр. 411) имеем, что

$$0 < c \le |\omega'(z)| \le C$$

при $z \in \overline{D}^+$ и $\omega' \in C^{(1,\delta)}(\overline{D}^+)$. Аналогичные оценки выполняются для функции μ. Таким образом,

$$\lambda_r^+(\xi) = \xi + A(\xi)(1-r) + O((1-r)^{1+\delta})\,, \tag{19}$$

$$\lambda_r^-(\xi) = \xi + B(\xi)(1-r) + O((1-r)^{1+\delta})\,, \tag{20}$$

где $A(\xi)$ и $B(\xi)$ — ограниченные в $\overline{D}^+$ и $\overline{D}^-$ соответственно, функции. Из этих соотношений сразу следует соотношение 2).

Перейдем к доказательству соотношения 3). Для этого представим ядро $H_r(t,\xi)$ в виде:

$$H_r(t,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\lambda_r^+(\xi) - \lambda_r^-(\xi)}{(t-\lambda_r^+(\xi))(t-\lambda_r^-(\xi))}\,. \tag{21}$$

Используя оценки (19), (20), получим:

$$|\lambda_r^-(\xi) - \lambda_r^+(\xi)| \le C(1-r)\,.$$

Далее

$$|t-\lambda_r^+(\xi)| = |\omega(\omega^{-1}(t)) - \omega(r\omega^{-1}(\xi))| \ge C|\omega^{-1}(t) - r\omega^{-1}(\xi)|\,, \tag{22}$$

а также

$$|t-\lambda_r^-(\xi)| = |\mu(\mu^{-1}(t)) - \mu(r^{-1}\mu^{-1}(\xi))| \ge C|\mu^{-1}(t) - r^{-1}\mu^{-1}(\xi)|\,. \tag{23}$$

Следовательно, интеграл из 3) оценивается следующим образом:

$$\int\limits_\Gamma |H_r(t,\xi)||dt| \le C\int\limits_\Gamma \frac{(1-r)|dt|}{|\omega^{-1}(t) - r\omega^{-1}(\xi)||\mu^{-1}(t) - r^{-1}\mu^{-1}(\xi)|}\,, \tag{24}$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной $\mu^{-1}(t) = \tau$, а также обозначим $\mu^{-1}(\xi) = \zeta$. Тогда $|\tau| = |\zeta| = 1, dt = (\mu^{-1})'(\tau)d\tau$ и оценка (24) примет вид:

$$\int\limits_\Gamma |H_r(t,\xi)||dt| \le C\int\limits_T \frac{(1-r)|d\tau|}{|\alpha(\tau) - r\alpha(\zeta)||\tau - r^{-1}\zeta|}\,. \tag{25}$$

Используя лемму 1, имеем

$$|\alpha(t) - r\alpha(\zeta)| \ge C|\tau - r\zeta|\,,$$

то есть оценка (25) примет вид:

$$\int\limits_\Gamma |H_r(t,\xi)||dt| \le C\int\limits_{|\tau|=1} \frac{(1-r)|d\tau|}{|\tau - r\zeta|^2} \le C_0\,.$$

Последнее неравенство верно, так как $(1-r^2)(2\pi i|\tau - r\zeta|^2)^{-1}$ — ядро Пуассона для круга. Таким образом, оценка 3) справедлива. ■

3. Доказательство теорем 1 и 2

Перейдем к доказательству основных утверждений. Обозначая $\Psi^+(z) \equiv \Phi^+(\omega(z))$ при $z \in D^+$ и $\Psi^-(z) \equiv \Phi^-(\mu(z))$ при $z \in D^-$ условие () можно представить в виде:

$$\lim_{r\to 1-0} \left\|\Psi^+(r\omega^{-1}(t)) - a(t)\Psi^-(r^{-1}\mu^{-1}(t)) - f(t)\right\|_{C(\Gamma)} = 0\,. \tag{26}$$

Функции $\Psi^\pm$ по определению аналитичны соответственно в $D^\pm$, следовательно, обозначая

$$\Omega_r^+(z) \equiv \Psi^+(r\omega^{-1}(z)), \quad z \in G^+, \quad \Omega_r^-(z) \equiv \Psi^-(r^{-1}\mu^{-1}(z))\,, \quad z \in G^-\,, \tag{27}$$

получим, что эти функции аналитичны в $G^\pm$ и удовлетворяют условию Гельдера вплоть до границы Γ. Обозначим

$$\Omega_r^+(t) - a(t)\Omega_r^-(t) = f_r(t)\,, \quad t \in \Gamma\,. \tag{28}$$

При этом предельное соотношение (26) примет вид:

$$\lim_{r\to 1-0} \|f_r - f\|_{C(\Gamma)} = 0\,. \tag{29}$$

Рассмотрим классическую задачу Римана-Гильберта (28). Используя факторизацию (5) по формулам из [1] определим решение задачи (28). При $\kappa \geq 0$ имеем

$$\Omega_r^+(z) = \frac{S^+(z)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f_r(t)}{S^+(t)}\frac{dt}{t-z} + S^+(z)P_{r,\kappa-1}(z)\,, \quad z \in G^+\,, \tag{30}$$

$$\Omega_r^-(z) = \frac{S^-(z)}{z^\kappa 2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f_r(t)}{S^+(t)}\frac{dt}{t-z} + \frac{S^-(z)}{z^\kappa}P_{r,\kappa-1}(z)\,, \quad z \in G^-\,, \tag{31}$$

где $P_{r,\kappa-1} \equiv 0$ при $\kappa = 0$, $P_{r,\kappa-1}$ — произвольный многочлен порядка $\kappa - 1$ при $\kappa > 0$. В случае $\kappa < 0$ решение существует тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\int\limits_\Gamma \frac{f_r(t)}{S^+(t)}t^k dt = 0\,, \quad k = 0, ..., -\kappa - 1\,. \tag{32}$$

При этом решение определяется по формулам (30), (31), где $P_{r,\kappa-1} \equiv 0$. Возвращаясь к функциям $\Psi^\pm$, получим

$$\Psi^+(r\omega^{-1}(z)) = \frac{S^+(z)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f_r(t)}{S^+(t)}\frac{dt}{t-z} + S^+(z)P_{r,\kappa-1}(z)\,, \quad z \in G^+\,,$$

$$\Psi^-(r^{-1}\mu^{-1}(z)) = \frac{S^-(z)}{z^\kappa 2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f_r(t)}{S^+(t)}\frac{dt}{t-z} + \frac{S^-(z)}{z^\kappa}P_{r,\kappa-1}(z)\,, \quad z \in G^-\,.$$

Зафиксируем z и устремим r к $1-0$. Учитывая (29), а также то, что $\Psi^+(r\omega^{-1}(z)) \to \Psi^+(\omega^{-1}(z))$ и $\Psi^-(r^{-1}\mu^{-1}(z)) \to \Psi^-(\mu^{-1}(z))$, получим

$$\Psi^+(\omega^{-1}(z)) = \frac{S^+(z)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(t)}{S^+(t)}\frac{dt}{t-z} + S^+(z)P_{\kappa-1}(z)\,, \quad z \in G^+\,,$$

$$\Psi^-(\mu^{-1}(z)) = \frac{S^-(z)}{z^\kappa 2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(t)}{S^+(t)}\frac{dt}{t-z} + \frac{S^-(z)}{z^\kappa}P_{\kappa-1}(z)\,, \quad z \in G^-\,,$$

или, возвращаясь к исходным значениям $\Phi^\pm$, имеем

$$\Phi^+(z) = \frac{S^+(z)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(t)}{S^+(t)}\frac{dt}{t-z} + S^+(z)P_{\kappa-1}(z)\,, \quad z \in G^+\,, \tag{33}$$

$$\Phi^-(z) = \frac{S^-(z)}{z^\kappa 2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(t)}{S^+(t)}\frac{dt}{t-z} + \frac{S^-(z)}{z^\kappa}P_{\kappa-1}(z)\,, \quad z \in G^-\,. \tag{34}$$

Эти решения получены при $\kappa \ge 0$. В случае $\kappa < 0$ решение определяется по формулам (33), (34), где $P_{\kappa-1} = 0$, при условии, что граничные функции удовлетворяют условию:

$$\int\limits_\Gamma \frac{f(t)}{S^+(t)}t^k dt = 0\,, \quad k = 0, ..., |\kappa| - 1\,. \tag{35}$$

Итак, мы определили вид решения задачи (4), если оно существует. Остается проверить, что решение, определяемое формулами (33), (34), удовлетворяет условию (4).

Подставим функции (33) и (34) в соотношение (4). Рассмотрим случай $\kappa < 0$ (при $\kappa \ge 0$ рассуждения аналогичны). Имеем

$$R(t) \equiv \Phi^+(\lambda_r^+(t)) - a(t)\Phi^-(\lambda_r^-(t)) - f(t) =$$

$$= S^+(t)\left(\frac{S^+(\lambda_r^+(t))}{2\pi i S^+(t)}\int\limits_\Gamma \frac{f(x)}{S^+(x)}\frac{dx}{x-\lambda_r^+(t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{S^-(\lambda_r^-(t))t^\kappa}{(\lambda_r^-(t))^\kappa 2\pi i S^-(t)} \cdot \int\limits_\Gamma \frac{f(x)}{S^+(t)}\frac{dx}{x-\lambda_r^-(t)} - \frac{f(t)}{S^+(t)}\right) \equiv S^+(t)R_1(t)\,.$$

Функцию $R_1(t)$ представим в виде

$$R_1(t) = I_{1,r}(t) - I_{2,r}(t) + J_r(t)\,, \tag{36}$$

где

$$I_{1,r}(t) = \frac{S^+(\lambda_r^+(t)) - S^+(t)}{2\pi i S^+(t)}\int\limits_\Gamma \frac{f(x)}{S^+(x)}\frac{dx}{x-\lambda_r^+(t)}\,, \tag{37}$$

$$I_{2,r}(t) = \left(\frac{S^-(\lambda_r^-(t))}{(\lambda_r^-(t))^\kappa} - \frac{S^-(t)}{t^\kappa} \right) \frac{t^\kappa}{2\pi i S^-(t)} \int\limits_\Gamma \frac{f(x)}{S^+(x)} \frac{dx}{x - \lambda_r^-(t)} \qquad (38)$$

и

$$J_r(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(x)}{S^+(x)} \left(\frac{1}{x - \lambda_r^+(t)} - \frac{1}{x - \lambda_r^-(t)} \right) dx - \frac{f(t)}{S^+(t)}\,. \qquad (39)$$

Оценим слагаемые отдельно. Так как $S^+ \in C^{(\delta)}(\overline{G}^+)$, то

$$|S^+(\lambda_r^+(t)) - S^+(t)| \le C|\lambda_r^+(t) - t|^\delta = C|\omega(r\omega^{-1}(t)) - \omega(\omega^{-1}(t))|^\delta \le$$

$$\le C \max_{z\in G^+} |\omega'(z)||r-1|^\delta = O(1-r)^\delta$$

при $r \to 1-0$. Учитывая, что

$$\left| \int\limits_\Gamma \frac{f(x)}{S^+(x)} \frac{dx}{x - \lambda_r^+(t)} \right| \le \left\| \frac{f}{S^+} \right\|_{C(\Gamma)} \int\limits_\Gamma \frac{|dx|}{|x - \lambda_r^+(t)|} \le C|\log(1-r)|$$

получим, что $I_{1,r} \rightrightarrows 0$ при $r \to 1-0$. Аналогично, $I_{2,r} \rightrightarrows 0$ при $r \to 1-0$. Для оценки третьего слагаемого заметим, что по лемме 2 ядро $H_r(t,\xi)$ является аппроксимативной единицей, поэтому аналогично теореме о равномерной сходимости чезаровских средних ряда Фурье непрерывной на окружности функции ([8], гл. 2, стр. 34), получаем $J_r(t) \rightrightarrows 0$. Теоремы 1 и 2 доказаны.

4. Случай вектор-функций

В этом пункте рассмотрим задачу (4) в случае векторнозначных неизвестных функций. Так как рассуждения аналогичны, ограничимся случаем, когда область G единичный круг.

Пусть D^+ — единичный круг комплексной плоскости с границей T и $D^- = \mathbb{C}\backslash(D^+ \bigcup T)$. Требуется определить вектор-функцию Φ, аналитическую в области $D^+ \bigcup D^-$, обращающуюся в нуль на бесконечности $\Phi(\infty) = 0$. Предполагается, что функции $\Phi^\pm$ — ограничения функции Φ на области $D^\pm$ соответственно на границе T удовлетворяют соотношению:

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| \Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t) \right\|_{C(T)} = 0\,, \quad t \in \Gamma\,. \qquad (40)$$

Предполагается, что заданная матрица a принадлежит классу Гельдера на T, $C^{(\delta)}(T)$, $0 < \delta \le 1$ и $\det a(t) \ne 0$ при $t \in T$, вектор-функция f непрерывна на T. При этих предположениях матрицу-функцию a можно представить в виде ([1]):

$$a(t) = (S^+(t))^{-1}\Lambda(t)S^-(t)\,, \quad \Lambda(t) = \mathrm{diag}(t^{\kappa_1}, ..., t^{\kappa_n})\,, \qquad (41)$$

где $S^{\pm}$ невырожденные аналитические матрицы функции в $D^{\pm}$, $S^{-}(\infty) = E$, $S^{\pm} \in C^{(\delta)}(\overline{D}^{\pm})$, κ_j — частные индексы матрицы G ($j = 1, ..., n$). Предполагаем, что $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \ldots \geq \kappa_n$. Определим решение задачи (40),

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| \Phi^{+}(rt) - (S^{+}(t))^{-1}\Lambda(t)S^{-}(t)\Phi^{-}(r^{-1}t) - f(t) \right\|_{C(T)} = 0$$

или

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| S^{+}(t)\Phi^{+}(rt) - \Lambda(t)S^{-}(t)\Phi^{-}(r^{-1}t) - S^{+}(t)f(t) \right\|_{C(T)} = 0\,. \tag{42}$$

Обозначим $S^{+}(t)\Phi^{+}(rt) - \Lambda(t)S^{-}(t)\Phi^{-}(r^{-1}t) = f_r(t)$. Обозначим $\Psi_r^{+}(z) = S^{+}(z)\Phi^{+}(rz)$ и $\Psi_r^{-}(z) = S^{-}(z)\Phi^{-}(r^{-1}z)$. Так как функции $\Psi_r^{\pm}$ аналитичны соответственно в $D^{\pm}$, то мы получаем классическую задачу о скачке для определения этих функций:

$$\Psi_r^{+}(t) - \Lambda(t)\Psi_r^{-}(t) = g_r(t)\,. \tag{43}$$

Отметим, что из (42) следует, что вектор-функция $g_r \rightrightarrows S^{+}f$. Так как Λ является диагональной матрицей, уравнение (42) распадается на n следующих уравнений:

$$\Psi_{rk}^{+}(t) - t^{\kappa_k}\Psi_{rk}^{-}(t) - g_{rk}(t) = 0\,, \quad k = 1, ...n\,.$$

Здесь $\Psi_{rk}^{\pm}$ и g_{rk} компоненты вектор-функций $\Psi_r^{\pm}$ и g_r соответственно. Решение последнего уравнения при $\kappa_j > 0$ определяется по формулам:

$$\Psi_{rk}^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{g_{rk}(t)}{t-z}dt + P_{r,\kappa_k - 1}(t)\,, \tag{44}$$

$$t^{\kappa_j}\Psi_{rk}^{-}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{g_{rk}(t)}{t-z}dt + P_{r,\kappa_k - 1}(t)\,. \tag{45}$$

При $\kappa_k < 0$ решение определяется по формулам (44), (45), где $P_{r,\kappa_k-1} \equiv 0$, при условиях

$$\int\limits_T g_{rk}(t)t^l dt = 0\,, \quad l = 0, \ldots, -\kappa_k - 1\,. \tag{46}$$

При $\kappa_j = 0$ условия (46) отсутствуют. Аналогично случаю одной функции, при $r \to 0$, получим

$$\Psi_k^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{g_k(t)}{t-z}dt + P_{\kappa_k - 1}(t)\,, \tag{47}$$

$$t^{\kappa_k}\Psi_k^{-}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{g_k(t)}{t-z}dt + P_{\kappa_k - 1}(t)\,. \tag{48}$$

Здесь g_k — k-я компонента вектор функции $S^{+}f$. Соответственно, условия (46) примут вид

$$\int\limits_T g_k(t)t^l dt = 0\,, \quad l = 0, \ldots, -\kappa_k - 1\,. \tag{49}$$

Функции $\Phi^{\pm}$ определяются полученными функциями $\Psi^{\pm}$, и подставляя их в (40) получаем, что определенные таким образом функции $\Phi^{\pm}$ действительно являются решениями (40).

Таким образом, получаем результат, аналогичный классическому случаю функций из класса Гельдера (см. [2]).

Теорема 3. *Пусть частные индексы матрицы a удовлетворяют соотношению*

$$\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \kappa_p \geq 0\,, \quad 0 > \kappa_{p+1} \geq \dots \geq \kappa_n\,. \tag{50}$$

Тогда соответствующая однородная задача (40) имеет $K_1 = \kappa_1 + \dots + \kappa_p$ линейно независимых решений, которые определяются по формуле $\Phi_0^{\pm} = S^{\pm}P$, где $P = (P_{\kappa_1 - 1}, \dots P_{\kappa_p - 1}, 0, \dots 0)^T$ полиномиальная вектор-функция. Неоднородная задача (40) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются $K_2 = |\kappa_{p+1}| + \dots + |\kappa_n|$ линейно независимых условий (49)(при $k = p+1, \dots, n$; $l = 0, \dots, |\kappa_k| - 1$). Общее решение задачи (40) определяется по формулам (47), (48).

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: ОГИЗ, 1945. – 448 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / М.:Физматгиз, 1963. – 640 с.
3. Хведелидзе Б.В. О разрывной задаче Римана-Привалова для нескольких функций / Сообщения АН Груз.ССР. – 1956. – 17;№.10. – С.865-872.
4. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций / М.: ГИТТЛ, 1950. – 338 с.
5. Айрапетян Г.М. Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1 // Известия АН Армении, сер. математика. – 1990. – 25;№.1. – С.3-20.
6. Зорич В.А. Математический анализ, ч.2 / М.:Наука, 1984. – 640 с.
7. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / М.:Наука, 1966. – 628 с.
8. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций /М.:ИЛ, 1975. – 312 с.

ON THE RIEMANN-HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM IN THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

H.M. Hayrapetyan, V.A. Babayan

Yerevan State University,
Alex Manoogian St., 1, Yerevan, 0025, Armenia, e-mail: hhayrapet@gmail.com,
Southern Federal University,
Bolshaya Sadovaya St., 105/42, Rostov-on-Don, 344006, Russia, e-mail: bvazgen@gmail.com

Abstract. The Riemann-Hilbert boundary value problem in the space of continuous functions is investigated. The new formulation of the problem is introduced which allows to solve it when the boundary function is continuous. The conditions of the solvability of inhomogeneous problem and linearly independent solutions of the corresponding homogeneous problem are obtained in explicit form. The solution of the inhomogeneous problem is obtained in explicit form as well.

Key words: Riemann-Hilbert's problem, approximate identity, boundary value problem, Cauchy's type integral, continuous functions.