MSC 65D30

О ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

О.Н. Литвин, О.П. Нечуйвитер

Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, Харьков, 61003, Украина, e-mail: olesya@email.com

Аннотация. В статье исследуется погрешность численного интегрирования быстроосциллирующих функций трех переменных на классе дифференцируемых функций. Информация о функции задана ее следами на системе взаимно перпендикулярных плоскостей.

Ключевые слова: быстроосциллирующие функции, кубатурные формулы, погрешность, численное интегрирование.

Введение. Необходимость приближать функцию трех переменных симметрическими отрезками ряда Фурье возникает при рассмотрении, например, задач компьютерной томографии, цифровой обработки многомерных сигналов и многих других. При решении таких современных задач важно уметь находить коэффициенты ряда Фурье в случае, когда в качестве данных заданы не только значения функции в узловых точках, но и следы функции на линиях или плоскостях. Применение теории интерлинации и интерфлетации функций [1] позволило построить кубатурные формулы приближенного вычисления 3D коэффициентов Фурье, в которых учитывается вид задания исходной информации. Более детально с этими кубатурными формулами можно ознакомиться в работах [2-4].

При построении математических моделей вышеуказанных задач нельзя не учитывать погрешность численного интегрирования быстроосциллирующих функций, а также оптимальность или близость к ним кубатурных формул на различных классах функций. Для этого важно иметь не только оценки сверху, но и оценки снизу численного интегрирования на классе. Впервые вопрос об оптимальной погрешности численного интегрирования быстроосциллирующей функции одной переменной на классе дифференцируемых функций был рассмотрен в [5]. В данной работе на классе дифференцируемых функций будет получена оценка снизу численного интегрирования быстроосциллирующей функции трех переменных, при условии, что оператор численного интегрирования использует информацию о следах неосциллирующего множителя подинтегральной функции на N взаимноперпендикулярных плоскостях.

Постановка задачи: на классе действительных функций трех переменных $H_1^{3,r}(M)$, $r=1,2$, определенных на $G=[0,1]^3$ и таких, что $\left|f^{(r,r,r)}(x,y,z)\right| \le M$, найти оценку снизу погрешности численного интегрирования

$$I(f,\omega)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f\left(x,y,z\right)\sin\omega x\sin\omega y\sin\omega z dxdydz$$

в случае, когда информация о функции $f(x,y,z)$ задана ее следами на N плоскостях.

1. Оптимальная погрешность численного интегрирования на классе. В качестве множества кубатурных формул L_N для приближенного вычисления интеграла $I(f,\omega)$ будем рассматривать множество кубатурных формул ℓ_N, которые используют информацию о следах функции не более чем на N плоскостях. Пусть $R(f,\omega,\ell_N)$ погрешность приближенного вычисления $I(f,\omega)$ кубатурною формулой ℓ_N : $R(f,\omega,\ell_N) = I(f,\omega) - \ell_N$.

Определение 1. *Погрешностью кубатурной формулы ℓ_N на классе F называют величину*

$$R(F,\omega,\ell_N) = \sup_{f(x)\in F} |R(f,\omega,\ell_N)|.$$

Определение 2. *Оптимальной погрешностью численного интегрирования на классе называют*

$$R_N(F,\omega) = \inf_{\ell_N\in L_N} R(F,\omega,\ell_N).$$

Для того чтобы получить оценку снизу величины $R_N(F,\omega)$ сначала для фиксированной кубатурной формулы ℓ_N получают оценку снизу величины $R(F,\omega,\ell_N)$. Если эта оценка не зависит от кубатурной формулы ℓ_N , то эта же оценка справедлива и для величины $R_N(F,\omega)$. Для получения оценок снизу величины $R(F,\omega,\ell_N)$ используют метод «шапочек» [5].

2. Оценка снизу оптимальной погрешности на классе $H_1^{3,r}(M)$, $r=1,2$. В качестве интеграла $I(f,\omega)$ будем рассматривать

$$I_1^3(m,n,p) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)\sin 2\pi mx\, \sin 2\pi ny\, \sin 2\pi pz\, dxdydz.$$

Теорема 1. *В случае, когда информация о функции задана ее следами на $N=3\ell$ плоскостях*

$$x=x_\alpha,\ \alpha=\overline{1,\ell},\quad y=y_\beta,\ \beta=\overline{1,\ell},\quad z=z_\gamma,\ \gamma=\overline{1,\ell}$$

на классе $H_1^{3,r}(M)$, $r=1,2$, справедлива следующая оценка для погрешности вычисления интеграла $I_1^3(m,n,p)$:

$$R_N(f^*,m,n,p,\ell_N) \ge \frac{M(r!)^3}{1728[(2r+1)!]^3}\frac{1}{2^{3r}}\frac{1}{N^{3r}},$$

$$\ell \ge \max(2\pi m, 2\pi n, 2\pi p),$$

$$R_N(f^*,m,n,p,\ell_N) \ge \frac{M(r!)^3}{8[(2r+1)!]^3}\frac{1}{24^{3r+3}}\frac{1}{(mnp)^r},$$

$$\ell < (2\pi m, 2\pi n, 2\pi p).$$

□ Пусть $\psi_r(x, b-a) = (x-a)^r (b-x)^r$, тогда

$$|\psi_r(x, b-a)| \leq C(r)(b-a)^r, \quad a \leq x \leq b,$$

$$\int_a^b \psi_r(x, b-a)\,dx = c_1(r)(b-a)^{2r+1} = \frac{r!r!}{(2r+1)!}(b-a)^{2r+1},$$

$$C(r) = \sup_{0\leq t\leq 1}\left|\Phi_r^{(r)}(t)\right| = r!, \quad c_1(r) = \int_0^1 \Phi_r(t)\,dt,$$

$$\Phi_r(t) = t^r(1-t)^r.$$

На каждой подобласти $G_{kqs} = \Delta_k \times \bar{\Delta}_q \times \tilde{\Delta}_s$,

$$\Delta_k = \{x : x \in [(6k+1)/12m; (6k+5)/12m]\}, \quad k = 0, 1, ..., 2m-1,$$

$$\bar{\Delta}_q = \{y : y \in [(6q+1)/12n; (6q+5)/12n]\} \quad q = 0, 1, ..., 2n-1,$$

$$\tilde{\Delta}_s = \{z : z \in [(6s+1)/12p; (6s+5)/12p]\} \quad s = 0, 1, ..., 2p-1,$$

объемом $\dfrac{1}{3m} \times \dfrac{1}{3n} \times \dfrac{1}{3p}$ имеем

$$|\sin 2\pi mx| \geq \frac{1}{2}, \quad |\sin 2\pi ny| \geq \frac{1}{2}, \quad |\sin 2\pi pz| \geq \frac{1}{2}.$$

1. Пусть $\ell \geq \max(2\pi m, 2\pi n, 2\pi p)$. Разобьем каждую область

$$G_{kqs} = \Delta_k \times \bar{\Delta}_q \times \tilde{\Delta}_s$$

на $c = ([\ell/m]+1)([\ell/n]+1)([\ell/p]+1)$ подобластей

$$G_{kqs}^{\nu\mu\lambda} = \Delta_k^\nu \times \bar{\Delta}_q^\mu \times \tilde{\Delta}_q^\lambda, \qquad \nu, \mu, \lambda = 0, ..., c-1.$$

Полное число подобластей $G_{kqs}^{\nu\mu\lambda}$ равно $c \cdot 8mn \geq 8\ell^3$, поэтому будет не менее чем ℓ^3 областей $G_{kqs}^{\nu\mu\lambda}$, куда не попали плоскости кубатурной формулы. Построим 'плохую' функцию на классе, обобщая на трехмерный случай результаты [5]

$$f^*(x,y,z) = \frac{M}{(C(r))^3} \cdot \frac{\psi(x, |\Delta_k^\nu|)}{(|\Delta_k^\nu|)^r} \cdot \frac{\psi\left(y, \left|\overline{\Delta}_q^\mu\right|\right)}{\left(\left|\overline{\Delta}_q^\mu\right|\right)^r} \cdot \frac{\psi\left(z, \left|\tilde{\Delta}_s^\lambda\right|\right)}{\left(\left|\tilde{\Delta}_s^\lambda\right|\right)^r} \times$$

$$\times \mathrm{sign}(\sin 2\pi mx)\,\mathrm{sign}(\sin 2\pi ny)\,\mathrm{sign}(\sin 2\pi pz)$$

на тех $\Delta_k^{\nu}\times\bar{\Delta}_q^{\mu}\times\tilde{\Delta}_s^{\lambda}$, куда не попали плоскости интегрирования. Когда $(x,y,z)\in G\backslash G_{kqs}^{\nu\mu\lambda}$, тогда $f^*(x,y,z)=0$. Ясно, что $f^*(x,y,z)\in H_1^{3,r}(M)$. Найдем оценку снизу

$$\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f^*(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz\right|\geq$$

$$\geq\frac{M(c_1(r))^3}{8(C(r))^3}\ell^3\left|\Delta_k^{\nu}\right|^{r+1}\left|\overline{\Delta}_q^{\mu}\right|^{r+1}\left|\tilde{\Delta}_s^{\lambda}\right|^{r+1}=$$

$$=\frac{M(r!)^3}{8[(2r+1)!]^3}\ell^3\left(\frac{1}{3m\left[\ell/m\right]}\right)^{r+1}\left(\frac{1}{3n\left[\ell/n\right]}\right)^{r+1}\left(\frac{1}{3p\left[\ell/p\right]}\right)^{r+1}\geq$$

$$\geq\frac{M(r!)^3}{8[(2r+1)!]^3}\frac{1}{6^{3r+3}}\frac{1}{\ell^{3r}}=\frac{M(r!)^3}{1728[(2r+1)!]^3}\frac{1}{2^{3r}}\frac{1}{(3\ell)^{3r}}=$$

$$=\frac{M(r!)^3}{1728[(2r+1)!]^3}\frac{1}{2^{3r}}\frac{1}{N^{3r}}.$$

Рассмотрим функцию $f_1{}^*(x,y,z)=-f^*(x,y,z)$. Приближенные значения интегралов от $f^*(x,y,z)$, f_1 ℓ_N равны нулю. Точные значения равны по модулю и имеют противоположный знак. Поэтому хотя бы для одной из этих функций погрешность интегрирования будет больше или равна модулю интеграла. Эту функцию и возьмем в качестве функции $f^*(x,y,z)$:

$$R_N(f^*,m,n,p,\ell_N)\geq$$

$$\geq\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f^*(x,y,z)\sin 2\pi mx\,\sin 2\pi ny\,\sin 2\pi pz\,dxdydz\right|\geq$$

$$\geq\frac{M(r!)^3}{1728[(2r+1)!]^3}\frac{1}{2^{3r}}\frac{1}{N^{3r}}\ .$$

2. Пусть $\ell<\max(2\pi m,2\pi n,2\pi p)$. Разобьем каждую из сторон параллелепипеда $G_{kqs}=\Delta_k\times\bar{\Delta}_q\times\tilde{\Delta}_s$ на 8 равных частей подобластей. Получим $16m\cdot 16n\cdot 16p=4096mnp$ параллелепипедов $G_{kqs}^{\nu\mu\lambda}=\Delta_k^{\nu}\times\bar{\Delta}_q^{\mu}\times\tilde{\Delta}_q^{\lambda}$, $\nu,\mu,\lambda=0,...,7$ с соответствующими сторонами длинной $\frac{1}{24m}$, $\frac{1}{24n}$, $\frac{1}{24p}$, причем при приближенном вычислении интеграла будет не менее чем $c=(16m-\ell)(16n-\ell)(16p-\ell)\geq mnp$ областей $G_{kqs}^{\nu\mu\lambda}$, куда не попали плоскости кубатурной формулы. Повторяя почти дословно рассуждения предыдущего пункта, получим оценку погрешности

$$\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f^*(x,y,z)\sin 2\pi mx\,\sin 2\pi ny\,\sin 2\pi pz\,dxdydz\right|\geq$$

$$\geq \frac{M(c_1(r))^3}{8(C(r))^3} m \cdot n \cdot p \cdot |\Delta_k^{\nu}|^{r+1} |\overline{\Delta}_q^{\mu}|^{r+1} |\tilde{\Delta}_s^{\lambda}|^{r+1} =$$

$$= \frac{M(r!)^3}{8[(2r+1)!]^3} mnp \left(\frac{1}{24m}\right)^{r+1} \left(\frac{1}{24n}\right)^{r+1} \left(\frac{1}{24p}\right)^{r+1} \geq$$

$$\geq \frac{M(r!)^3}{8[(2r+1)!]^3} \frac{1}{24^{3r+3}} \frac{1}{(mnp)^r} . \blacksquare$$

3. Численный эксперимент. Введем обозначения

$$h_{10}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{-\Delta}, & x_0 \leq x < x_1, \\ 0, & x \geq x_1, \end{cases}$$

$$h_{1\ell}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{\ell-1}, \\ \frac{x-x_\ell}{\Delta}, & x_{\ell-1} < x \leq x_\ell, \end{cases}$$

$$h_{1k}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{k-1}, \\ \dfrac{x-x_{k-1}}{\Delta}, & x_{k-1} < x < x_k, \\ \dfrac{x-x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k \leq x < x_{k+1}, \\ 0, & x \geq x_{k+1}, \end{cases}$$

$$k = \overline{1, \ell-1}, \quad x_k = k\Delta, \ \Delta = \frac{1}{\ell} .$$

Функции $h_{2j}(y)$, $j = \overline{0, \ell}$, $h_{3s}(z)$, $s = \overline{0, \ell}$, $y_j = j\Delta, z_s = s\Delta$, $\Delta = \frac{1}{\ell}$ определяются аналогично.

Для вычисления интеграла $I_1^3(m, n, p)$ в [4] построена кубатурная формула

$$\Phi_1^3(m,n,p) = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\ell-1} f(x_k, y, z) I(x, k, m) \sin 2\pi n y \, dy \, \sin 2\pi p z \, dz +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \sum_{j=0}^{\ell-1} f(x, y_j, z) I(y, j, n) \sin 2\pi m x \, dx \, \sin 2\pi p z \, dz +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \sum_{s=0}^{\ell-1} f(x, y, z_s) I(z, s, p) \sin 2\pi n y \, dy \, \sin 2\pi m x \, dx -$$

$$- \int_0^1 \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} f(x_k, y_j, z) I(x, k, m) I(y, j, n) \sin 2\pi p z \, dz -$$

$$-\int_0^1 \sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1} f(x_k,y,z_s)I(x,k,m)I(z,s,p)\sin 2\pi ny\,dy-$$

$$-\int_0^1 \sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1} f(x,y_j,z_s)I(y,j,n)I(z,s,p)\sin 2\pi mx\,dx+$$

$$+\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1} f(x_k,y_j,z_s)I(x,k,m)I(y,j,n)I(z,s,p),$$

$$I(x,k,m)=\int_{x_k}^{x_{k+1}} h_{1k}(x)\sin 2\pi mx\,dx,\quad I(y,j,n)=\int_{y_j}^{y_{j+1}} h_{2j}(y)\sin 2\pi ny\,dy,$$

$$I(z,s,p)=\int_{z_s}^{z_{s+1}} h_{3s}(z)\sin 2\pi pz\,dz\,,$$

которая в своем построении использует следы функции $f(x,y,z)$ на взаимно перпендикулярных плоскостях.

Теорема 2 [4]. *Для кубатурной формулы* $\Phi_1^3(m,n,p)$ *вычисления* $I_1^3(m,n,p)$ *справедлива следующая оценка*

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3(m,n,p)\right|\le \frac{8\tilde{M}}{[(r+2)!]^3\ell^{3r}}.$$

В таблице 1 для функции

$$f(x,y,z)=\sin(100x+100y+100z)$$

приведена погрешность ε приближенного вычисления интеграла $I_1^3(m,n,p)$ по кубатурной формуле $\Phi_1^3(m,n,p)$, а также погрешность численного интегрирования $\tilde{\varepsilon}$ на классе $H_1^{3,2}(M)$. Целью численного эксперимента является подтверждение неравенства $\tilde{\varepsilon}\le\varepsilon$, где

$$\varepsilon=\left|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3(m,n,p)\right|,$$

$$\tilde{\varepsilon}=\begin{cases}\dfrac{M(r!)^3}{1728[(2r+1)!]^3}\dfrac{1}{2^{3r}}\dfrac{1}{(3\ell)^{3r}}, & \ell\ge\max(2\pi m,2\pi n,2\pi p)\,;\\[2ex] \dfrac{M(r!)^3}{8[(2r+1)!]^3}\dfrac{1}{24^{3r+3}}\dfrac{1}{(mnp)^r}, & \ell\le\max(2\pi m,2\pi n,2\pi p)\,.\end{cases}$$

Таблица 1

Приближенное вычисление I_1^3 по формуле Φ_1^3

m	n	p	ℓ	ε	$\tilde{\varepsilon}$
3	3	3	5	0.000013365075428	0.000000000300488
3	3	3	10	0.000005512964248	0.000000000300488
3	3	3	20	0.000014447274293	0.000000000897253
3	3	3	25	0.00000002814482	0.00000000023521

Таким образом, численный эксперимент подтверждает теоретические результаты.

Вывод. В работе получена оценка погрешности численного интегрирования быстро осциллирующих функций трех переменных на классе дифференцируемых функций в случае, когда информация о неосциллирующем множителе подинтегральной функции задана ее следами на системе взаимно перпендикулярных плоскостей. Показано, что оценка численного интегрирования на классе меньше погрешности приближенного вычисления интеграла от быстро осциллирующей функции кубатурной формулой, которая использует в своем построении оператор интерфлетации.

Литература

1. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи. Навчальний посібник / К.: Наукова думка, 2005. – 331 с.
2. Lytvyn, O.N., Nechuyviter O.P. 3D Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflatation // Journal of Automation and Information Sciences. – 2012. – 44;3. – P.45-56.
3. Литвин О.Н., Нечуйвитер О.П. Обоснование точности кубатурных формул для приближеного вычисления 3D интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием интерфлетации // Электронное моделирование. – 2012. – 34;5. — С.206-217.
4. Литвин О.Н., Нечуйвитер О.П. Приближенное вычисление коэффициентов Фурье функции трех переменных с использованием сплайн-интерфлетации на классе дифференцируемых функций // Доклады Национальной Академии наук Украины. – 2012. – №8. – С.36-41.
5. Жилейкин Я.М., Кукаркин А.Б. Об оптимальном вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций // ЖВМ и МФ. 1978. – 18;2. – С.294-301.

ABOUT ACCURACY OF NUMERICAL INTEGRATION OF HIGHLY OSCILLATORY FUNCTIONS OF THREE VARIABLES

O.N. Lytvyn, O.P. Nechuiviter

Ukrainian Engineering Pedagogical Academy,
Universitetskaya St., 16, Kharkiv, 61003, Ukraine, e-mail: olesya@email.com

Abstract. The accuracy of numerical integration of highly oscillatory functions of three variables on the class of differentiable functions is investigated. Information about function is set of values on the flats.

Key words: highly oscillatory functions of many variables, cubature formulas, numerical integration.