MSC 11D09

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ОПРЕДЕЛЕННОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Л.Н. Куртова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассмотрен аналог проблемы делителей Ингама. Получена асимптотическая формула для числа решений определенного уравнения с квадратичными формами.

Ключевые слова: аддитивные задачи, число решений, асимптотическая формула, сумма Клоостермана.

1. Введение.

В 1927 году А.Е. Ингам [1] поставил и решил элементарным методом задачу получения асимптотической формулы для числа решений определенного уравнения:

$$x_1x_2 + x_3x_4 = n\,, \tag{1}$$

где $x_1, x_2, x_3, x_4 \in N$.

Оценка остатка асимптотической формулы уточнялась многими авторами.

В 1931 году Т. Эстерман [2], применив к задаче Ингама круговой метод, вывел для числа решений $J(n)$ уравнения (1) асимптотическую формулу, остаточный член которой имеет степенное понижение по сравнению с главным. Им получен следующий результат:

$$J(n) = n\sum_{r=0}^{2} \ln^r n \sum_{j=0}^{2} a_{r,j}\ \sigma_{-1}^{(j)}(n) + R(n)\,,$$

где $\sigma_{-s}^{(j)}(n) = \sum\limits_{d|n} d^{-s}\log^j d$ (j=0..2), а

$$R(n) = O(n^{7/8}\ln^{23/4} n\ \sigma_{-3/4}(n))\,.$$

В 1979 году Д.И. Исмоилов [3], дополнив элементарный метод Т. Эстермана оценками А. Вейля суммы Клоостермана, получил следующую оценку остатка:

$$R(n) \ll n^{3/4}\ln^6 n\ \sigma_{-1/2}^2(n)\,.$$

В 2006 году С.А. Захаров [4], используя круговой метод в форме С.М. Воронина, получил относительно простые «точные» выражения для остаточных членов в асимптотической формуле для $J(n)$.

В 2006 году Г.И. Архипов и В.Н. Чубариков [5] для числа решений $J_1(n)$ неопределенной задачи делителей Ингама:

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1, \quad x_1x_2 \le n$$

получили новую оценку остатка в асимптотической формуле

$$J_1(n) = nP_2(\ln n) + O(n^{3/4}\ln^4 n)\,,$$

где $P_2(x)$ — многочлен 2-ой степени.

В математической литературе известны многочисленные аналоги данной задачи. Рассмотрим один из них.

Пусть d — отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ — мнимое квадратичное поле, δ_F — дискриминант поля F; $Q_i(\overline{m}) = \frac{1}{2}\overline{m}^t A_i\overline{m}$ — бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_i, $\det A_i = -\delta_F$, $i = 1, 2$.

Поставим вопрос о числе решений определенного уравнения с квадратичными формами:

$$Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k}) = n\,. \tag{2}$$

Круговым методом с использованием оценки А. Вейля для суммы Клоостермана доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть ε — произвольное положительное число, δ_F — дискриминант поля F, $n \in N$. Для числа решений $I(n)$ уравнения (2) справедлива асимптотическая формула*

$$I(n) = \frac{4\pi^2 n}{|\delta_F|}\sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i n l/q} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,l,\overline{0}) + O(n^{3/4+\varepsilon})\,,$$

где $G_i(q,l,\overline{0}) = \sum\limits_{\overline{m} \pmod q} \exp(2\pi i l Q_i(\overline{m})/q)$ $(i = 1, 2)$ — двойные суммы Гаусса. Сумма особого ряда асимптотической формулы положительна.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (Функциональное уравнение для двумерного тета-ряда). *Пусть $Im\tau > 0$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$, $\theta(\tau,\overline{x}) = \sum\limits_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^2} \exp\left(2\pi i\tau Q(\overline{n}+\overline{x})\right)$. Тогда*

$$\theta(\tau,\overline{x}) = \frac{i}{\tau\sqrt{|\delta_F|}}\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^2}\exp\left(-\frac{\pi i}{\tau}\overline{n}^t A^{-1}\overline{n} + 2\pi i\overline{n}^t\overline{x}\right).$$

Доказательство см. в [6, глава VI].

Лемма 2. *Пусть $h \le n^{\varepsilon}$; $q, q', q'' \le N$. Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi i n x}}{(n^{-1} - 2\pi i x)^2}dx = ne^{-1} + O(qN)\,.$$

Доказательство следует из формулы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i x}}{(1-2\pi i x)^2}dx = e^{-1}$$

и оценки

$$\int\limits_{[q(q+q')]^{-1}}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i n x}}{(n^{-1}-2\pi i x)^2}dx \ll \int\limits_{[qN]^{-1}}^{+\infty} \frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2} \ll \int\limits_{[qN]^{-1}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \ll qN\,.$$

Лемма 3 (Равенства для произведений сумм Гаусса). *Пусть d — отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ — мнимое квадратичное поле, δ_F — дискриминант поля F, $D = -\delta_F$. Пусть $Q_1(\overline{m})$, $Q_2(\overline{k})$ — бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы; $(l,q)=1$. Справедливы следующие утверждения:*

1. Пусть $(q,D)=1$, $ll^* \equiv 1 \pmod q$, $(D/D_1)(D/D_1)^* \equiv 1 \pmod q$. Тогда

$$G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,l,\overline{k}) = q^2\exp\left(-2\pi i\frac{l^*}{q}D^*(Q_1'(\overline{m})+Q_2'(\overline{k}))\right)\,.$$

2. При любых q и D справедливо неравенство:

$$|G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,l,\overline{k})| \le cq^2\,,$$

где c — постоянная, равная, например D.

□ 1. Пусть $(q,D)=1$. Введем обозначения: $q = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$, $r_j = q/p_j^{\alpha_j}$, $ll^*\equiv 1 \pmod q$, $r_jr_j^* \equiv 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$, $DD_j^* \equiv 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ $(j=1\ldots s)$, $DD^*\equiv 1 \pmod q$.

Если $2\mid q$, то полагаем $p_1 = 2$. Заметим, что в этом случае $2\nmid D$, следовательно, $\delta_F \equiv 1 \pmod 4$. Если $2\mid D$, то $\alpha_1 = 0$. Тогда

$$G_1(q,l,\overline{m}) = \prod_{j=1}^{s} G_1(p_j^{\alpha_j}, lr_j, \overline{m})\,.$$

Для $G_1(p_j^{\alpha_j}, lr_j, \overline{m})$ известны точные формулы (см., например, [7, лемма 1]). Можем утверждать, что

$$G_1(q,l,\overline{m}) = q\exp\left(-2\pi i\frac{l^*}{q}Q_1'(\overline{m})(r_1r_1^*D_1^*+\ldots+r_sr_s^*D_s^*)\right)(-1)^{(1-\delta_F)\alpha_1/4}\left(\frac{\delta_F}{p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}}\right)\,.$$

Докажем сравнение

$$r_1r_1^*D_1^*+\ldots+r_sr_s^*D_s^* \equiv D^* \pmod q\,.$$

Так как $(q,D)=1$ и $DD_j^*\equiv 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ $(j=1..s)$, $DD^*\equiv 1 \pmod q$, то

$$D\left(r_1r_1^*D_1^*+\ldots+r_sr_s^*D_s^*\right) \equiv DD^* \equiv 1 \pmod q\,,$$

и достаточно доказать сравнение $r_1r_1^* + ... + r_sr_s^* \equiv 1 \pmod q$, которое эквивалентно системе сравнений

$$\begin{cases} r_1r_1^* + ... + r_sr_s^* \equiv r_1r_1^* \equiv 1 \pmod{p_1^{\alpha_1}}, \\ \cdots \\ r_1r_1^* + ... + r_sr_s^* \equiv r_sr_s^* \equiv 1 \pmod{p_s^{\alpha_s}}. \end{cases}$$

Тогда $G_1(q,l,\overline{m}) = q\exp\left(-2\pi i\frac{l^*}{q}D^*Q_1'(\overline{m})\right)(-1)^{(1-\delta_F)\alpha_1/4}\left(\frac{\delta_F}{p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}}\right)$.

Аналогичное равенство справедливо и для $G_2(q,l,\overline{k})$. Запишем произведение сумм Гаусса:

$$G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,l,\overline{k}) = q^2\exp\left(-2\pi iD^*(l^*Q_1'(\overline{m}) + Q_2'(\overline{k}))/q\right)(-1)^{(1-\delta_F)\alpha_1/2}.$$

Так как $\delta_F \equiv 1 \pmod 4$ или $\alpha_1 = 0$, то $(-1)^{(1-\delta_F)\alpha_1/2} = 1$. Следовательно,

$$G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,l,\overline{k}) = q^2\exp\left(-2\pi i\frac{l^*}{q}D^*(Q_1'(\overline{m}) + Q_2'(\overline{k}))\right).$$

2. В случае, когда $(q,D) = 1$ неравенство следует из полученной выше формулы для произведений сумм Гаусса. В остальных случаях, требуемая оценка следует из точных формул для сумм Гаусса от степени простого числа, полученных С.А. Гриценко в работе [7]. ■

Лемма 4 (Оценка суммы Клоостермана). *Пусть $K(q,u,v)$ — сумма Клоостермана. Справедлива оценка*

$$K(q,u,v) \ll \tau(q)q^{1/2}(u,v,q)^{1/2}.$$

Доказательство см., например, в [8].

Лемма 5. *Пусть $q = q_1q_2$, $(q_1,q_2) = 1$, $(q_1,D) = 1$; q_2 — либо 1, либо натуральное число, все простые делители которого делят D. Пусть*

$$V(q,n,\overline{m},\overline{k}) = \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi inl/q}G_1(q,l,\overline{m})G_2(q,l,\overline{k}).$$

Тогда справедливы оценки:

$$V(q_1q_2,n,\overline{0},\overline{0}) \ll q_1^2\sum_{s|(q_1,n)} s\mu\left(\frac{q_1}{s}\right)q_2^3, \quad V(q_1q_2,n,\overline{m},\overline{k}) \ll q_1^{5/2+\varepsilon}q_2^3(n,q_1)^{1/2}.$$

□ Так как сумма Гаусса являются вполне мультипликативной функцией, т.е.

$$G(q_1q_2,l,\overline{m}) = G(q_1,l_1q_2^2,\overline{m})G(q_2,l_2q_1^2,\overline{m}),$$

то и функция $V(q,n,\overline{m},\overline{k})$ мультипликативна. Тогда

$$V(q_1q_2,n,\overline{m},\overline{k}) = V_1(q_1,n,q_2,\overline{m},\overline{k})V_2(q_2,n,q_1,\overline{m},\overline{k}).$$

Оценим каждую из функций $V_1(q_1,n,q_2,\overline{m},\overline{k})$ и $V_2(q_2,n,q_1,\overline{m},\overline{k})$. Воспользуемся леммой 3.

Так как $(q_1,D)=1$, то из равенства для произведений сумм Гаусса имеем:

$$V_1(q_1,n,q_2,\overline{m},\overline{k}) \ll q_1^2 \sum_{\substack{l_1=1,\\(l_1,q_1)=1}}^{q_1} \exp\left(-2\pi i n\frac{l_1}{q_1}-2\pi i\frac{{l_1}^*}{q_1}D^*(q_2^2)^*(Q_1'(\overline{m})+Q_2'(\overline{k}))\right).$$

К сумме Клоостермана применим оценку А. Вейля из леммы 4; при любом q_1 получим:

$$V_1(q_1,n,q_2,\overline{m},\overline{k}) \ll q_1^{2+1/2+\varepsilon}(n,q_1)^{1/2}.$$

В случае, когда $\overline{m}=\overline{0}$, $\overline{k}=\overline{0}$, можем улучшить данную оценку. Имеем:

$$V_1(q_1,n,q_2,\overline{0},\overline{0}) \ll q_1^2\left|\sum_{\substack{l_1=1,\\(l_1,q_1)=1}}^{q_1} e^{-2\pi i n l_1/q_1}\right| \ll q_1^2\sum_{s|(q_1,n)} s\mu(\frac{q_1}{s}).$$

Оценим тривиально $V_2(q_2,n,q_1,\overline{m},\overline{k})$. Используем неравенство из леммы 3. Тогда

$$V_2(q_2,n,q_1,\overline{m},\overline{k}) \ll q_2^2\left|\sum_{\substack{l_2=1,\\(l_2,q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i n l_2/q_2}\right| \ll q_2^3. \ \blacksquare$$

3. Доказательство теоремы.

1. Запишем $I(n)$ в виде интеграла

$$I(n)=e\int\limits_0^1 S_1(\alpha)S_2(\alpha)e^{-2\pi i\alpha n}d\alpha\,,$$

где

$$S_1(\alpha)=\sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2} e^{(-1/n+2\pi i\alpha)Q_1(\overline{m})},\quad S_2(\alpha)=\sum_{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2} e^{(-1/n+2\pi i\alpha)Q_2(\overline{k})}.$$

Пусть $N=[\sqrt{n}]$, $\xi_{0,1}=\left[-\frac{1}{N},1-\frac{1}{N}\right)$. Разобьем промежуток $\left[-\frac{1}{N},1-\frac{1}{N}\right)$ числами ряда Фарея, отвечающего параметру N(см. [9]). Пусть $\frac{l''}{q''}<\frac{l}{q}<\frac{l'}{q'}$ — соседние дроби Фарея, $1\le l,q\le N$, $q'\le N$, $q''\le N$. Определим промежутки

$$\xi_{l,q}=\left[\frac{l}{q}-\frac{1}{q(q+q'')},\ \frac{l}{q}+\frac{1}{q(q+q')}\right).$$

Из свойств дробей Фарея следует, что

$$\left[-\frac{1}{N},1-\frac{1}{N}\right)=\bigcup_{q=1}^{N}\bigcup_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}\xi_{l,q}\,,$$

причем $\xi_{l,q} \cap \xi_{l',q'} = \emptyset$ при $(l,q) \neq (l',q')$. Тогда

$$I(n) = e\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}\int\limits_{\xi_{l,q}} S_1(\alpha)S_2(\alpha)e^{-2\pi in\alpha}d\alpha =$$

$$= \sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi inl/q}\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} S_1(l/q+x)S_2(l/q+x)e^{-2\pi inx}dx\,.$$

2. Преобразуем суммы $S_1(l/q+x)$ и $S_2(l/q+x)$.

$$S_1(l/q+x) = \sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2}\exp((-n^{-1}+2\pi il/q+2\pi ix)Q_1(\overline{m}))\,.$$

Разобьем сумму по $\overline{m}$ по арифметическим прогрессиям с разностью q:

$$S_1(l/q+x) = \sum_{\overline{s}\pmod q} e^{2\pi il/qQ_1(\overline{s})}\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\equiv\overline{s}\pmod q}} e^{(-n^{-1}+2\pi ix)Q_1(\overline{m})} =$$

$$= \sum_{\overline{s}\pmod q} e^{2\pi il/qQ_1(\overline{s})}\sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2} e^{(-n^{-1}+2\pi ix)q^2Q_1(\overline{m}+\overline{s}/q)} =$$

$$= \sum_{\overline{s}\pmod q} e^{2\pi il/qQ_1(\overline{s})}\theta\left((x+\frac{i}{2\pi n})q^2,\frac{\overline{s}}{q}\right)\,,$$

где $\theta\left((x+\frac{i}{2\pi n})q^2,\frac{\overline{s}}{q}\right)$ — двумерный тета-ряд.

Используем функциональное уравнение для тета-ряда из леммы 1:

$$\theta\left((x+\frac{i}{2\pi n})q^2,\frac{\overline{s}}{q}\right) = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D}(n^{-1}-2\pi ix)}\times$$
$$\times\sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2}\exp\left(-\frac{2\pi^2Q_1'(\overline{m})}{Dq^2(n^{-1}-2\pi ix)}+2\pi i\frac{\overline{m}^t\overline{s}}{q}\right)\,,$$

где $Q_1'(\overline{m}) = \frac{1}{2}\overline{m}^t\ DA_1^{-1}\ \overline{m}$ — квадратичная форма с матрицей DA_1^{-1}.

Тогда для $S_1(l/q+x)$ справедливо равенство

$$S_1(l/q+x) = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D}(n^{-1}-2\pi ix)}\sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2}\exp\left(-\frac{2\pi^2Q_1'(\overline{m})}{Dq^2(n^{-1}-2\pi ix)}\right)\times$$
$$\times\sum_{\overline{s}\pmod q}\exp\left(2\pi i(lQ_1(\overline{s})+\overline{m}^t\overline{s})/q\right)\,.$$

Сумма по $\overline{s}$ представляет собой сумму Гаусса, соответствующую квадратичной форме $Q_1(\overline{s})$.

Выделим слагаемое, которое отвечает нулевому вектору $\overline{m}$. Тогда $S_1(l/q+x)$ можно представить в виде суммы:

$$S_1(l/q+x) = \varphi_1 + \Phi_1\,,$$

где

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D}(n^{-1}-2\pi i x)} G_1(q,l,\overline{0})\,,$$

$$\Phi_1 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D}(n^{-1}-2\pi i x)} \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{Dq^2(n^{-1}-2\pi i x)}\right) G_1(q,l,\overline{m})\,.$$

Аналогично получаем представление в виде суммы двух функций для $S_2(l/q+x)$. Функции φ_2 и Φ_2 отличаются от φ_1 и Φ_1 лишь тем, что суммы Гаусса, входящие в них, зависят от квадратичной формы $Q_2(\overline{k})$. Имеем

$$S_2(l/q+x) = \varphi_2 + \Phi_2\,,$$

где

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D}(n^{-1}-2\pi i x)} G_2(q,l,\overline{0})\,,$$

$$\Phi_2 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D}(n^{-1}-2\pi i x)} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{Dq^2(n^{-1}-2\pi i x)}\right) G_2(q,l,\overline{k})\,.$$

3. Подставляем полученные для функций $S_1(l/q+x)$ и $S_2(l/q+x)$ представления в виде суммы двух функций в равенство для $I(n)$ из пункта 1. Имеем

$$I(n) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4\,,$$

где

$$I_1 = \frac{4\pi^2 e}{D} \sum_{q\le N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i n l/q} G_1(q,l,\overline{0}) G_2(q,l,\overline{0}) \times \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi i n x}dx}{(n^{-1}-2\pi i x)^2}\,,$$

$$I_2 = \sum_{q\le N} \sum_{\substack{l=1\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i n l/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_1 \Phi_2 e^{-2\pi i n x} dx\,,$$

$$I_3 = \sum_{q\le N} \sum_{\substack{l=1\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i n l/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_2 \Phi_1 e^{-2\pi i n x} dx\,,$$

$$I_4=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi inl/q}\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}\Phi_1\Phi_2e^{-2\pi inx}dx\,.$$

Интеграл I_1 вычислим асимптотически, а интегралы I_2, I_3, I_4 оценим сверху.

4. Начнем с I_1. Согласно равенству из леммы 2 получаем, что

$$I_1=\frac{4\pi^2n}{D}\sum_{q\le N}q^{-4}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi inl/q}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,l,\overline{0})+O(I_{1,1})\,,$$

где

$$I_{1,1}=N\sum_{q\le N}q^{-3}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi inl/q}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,l,\overline{0})=N\sum_{q\le N}q^{-3}V(q,n,\overline{0},\overline{0})\,.$$

Используя оценку для функции $V(q,n,\overline{0},\overline{0})$ из леммы 5, будем иметь

$$I_{1,1}\ll N\sum_{q_1q_2\le N}q_1^{-3}q_2^{-3}|V(q_1q_2,n,\overline{0},\overline{0})|\ll N{\sum_{q_2\le N}}'\sum_{q_1\le N/q_2}q_1^{-1}\sum_{s|(q_1,n)}s\mu(\frac{q_1}{s})\ll$$

$$\ll N{\sum_{q_2\le N}}'\sum_{s|n}\sum_{q\le\frac{N}{q_2s}}\mu(q)q^{-1}\ll n^{1/2+\varepsilon}\,,$$

где $'$ в сумме по q_2 означает, что суммирование идет по всем не взаимно простым с D числам. Можно показать, что их количество не больше, чем n^{ε}.

Оценим сумму

$$R=n\sum_{q>N}q^{-4}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi inl/q}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,l,\overline{0})=n\sum_{q>N}q^{-4}V(q,n,\overline{0},\overline{0})\,.$$

Снова используем лемму 5. Получаем, что

$$R\ll n\sum_{q_1q_2>N}q_1^{-4}q_2^{-4}|V(q_1q_2,h,\overline{0},\overline{0})|\ll n{\sum_{q_2\le N}}'q_2^{-1}\sum_{q_1>N/q_2}q_1^{-2}\sum_{s|(q_1,n)}s\mu(\frac{q_1}{s})\ll$$

$$\ll N{\sum_{q_2\le N}}'\sum_{s|n}s^{-1}\sum_{q>\frac{N}{q_2s}}\mu(q)q^{-2}\ll n^{1/2+\varepsilon}\,.$$

Таким образом,

$$I_1=\frac{4\pi^2n}{D}\sum_{q=1}^{+\infty}q^{-4}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi inl/q}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,l,\overline{0})+O(n^{1/2+\varepsilon})\,.$$

5. Оценка I_2, I_3, I_4 проводится одинаково. Приведем полное доказательство для I_4:

$$I_4 = \sum_{q\le N} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i n l/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1 \Phi_2 e^{-2\pi i n x} dx \,.$$

Вместо Φ_1, Φ_2 подставим их значения, полученные в п. 2. В результате имеем

$$I_4 = \frac{4\pi^2}{D} \sum_{q\le N} q^{-4} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{2\pi i n x} dx}{(n^{-1} - 2\pi i x)^2} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{2} \sum_{\substack{\overline{m_j}\in \mathbf{Z}^2 \\ \overline{m_j}\ne \overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_j'(\overline{m_j})}{q^2 D(n^{-1} - 2\pi i x)} \right) V(q, n, \overline{m_1}, \overline{m_2}) \,.$$

Пусть θ – сколь угодно малое положительное число. Разобьем интеграл $\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}$ на сумму интегралов.

$$\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} = \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{-[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \int\limits_{-[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \,.$$

Соответственно этому разбиению получаем

$$I_4 = I_{4,1} + I_{4,2} + I_{4,3} \,.$$

6. Оценим $I_{4,2}$. Используя оценку для $V(q_1 q_2, n, \overline{m_1}, \overline{m_2})$ из леммы 5, будем иметь:

$$I_{4,2} \ll \sum_{\substack{q\le N \\ q=q_1 q_2}} q_1^{-3/2+\varepsilon} (n, q_1)^{1/2} q_2^{-1} \int\limits_{0}^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \prod_{j=1}^{2} \sum_{\substack{\overline{m_j}\in \mathbf{Z}^2 \\ \overline{m_j}\ne \overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_j'(\overline{m_j})}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)} \right) .$$

Проведем разбиение суммы по q:

$$I_{4,2} \ll \sum_{q\le n^{1/2-\theta}} \int\limits_{0}^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \sum_{n^{1/2-\theta}<q\le N} \int\limits_{0}^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} = \sum\nolimits_{41} + \sum\nolimits_{42} \,.$$

Рассмотрим сумму $\sum_{41}$. Так как $q \le n^{1/2-\theta}$ и $0 \le x \le [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, то

$$\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_j'(\overline{m_j})}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)} \right) \ll \exp(-cn^{2\theta}) \,,$$

где c – постоянная, $j = 1, 2$. Тогда

$$\prod_{j=1}^{2} \sum_{\substack{\overline{m_j} \in \mathbf{Z}^2 \\ \overline{m_j} \neq \overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_j'(\overline{m_j})}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) = O\left(\exp(-cn^{2\theta})\right) .$$

Учтем также, что при тех же ограничениях на q:

$$\int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \ll \int\limits_0^{2\pi[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dt}{n^{-2} + t^2} \ll n^{3/2-\theta} q^{-1} .$$

После проведенных рассуждений получаем оценку:

$$\sum\nolimits_{41} \ll n^{3/2-\theta} \exp(-cn^{2\theta}) \sum_{q_1 q_2 \le n^{1/2-\theta}} q_1^{-5/2+\varepsilon} (n, q_1)^{1/2} q_2^{-2} \ll n^{3/4+\varepsilon} .$$

Перейдем к оценке $\sum_{42}$. Так как $q \le N$ и $0 \le x \le [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, то

$$\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_j'(\overline{m_j})}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) \ll \exp\left(-cQ_j'(\bar{j})\right) ,$$

где c – постоянная, $j = 1, 2$. Тогда

$$\prod_{j=1}^{2} \sum_{\substack{\overline{m_j} \in \mathbf{Z}^2 \\ \overline{m_j} \neq \overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_j'(\overline{m_j})}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) = O\left(1\right) .$$

Интеграл оценим тривиально: $\int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2 x^2} \ll n \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \ll n.$

В итоге получаем следующую оценку для суммы $\sum_{42}$:

$$\sum\nolimits_{42} \ll n^{1+\varepsilon} \sum_{n^{1/2-\theta} < q_1 q_2 \le N} q_1^{-3/2} (n, q_1)^{1/2} q_2^{-1} \ll$$

$$\ll n^{1+\varepsilon} \sum_{q_2 \le N}{}' q_2^{-1} \sum_{s|n} s^{-1} \sum_{q > n^{1/2-\theta}/(q_2 s)} q^{-3/2} \ll n^{3/4+\varepsilon} ,$$

где $'$ в сумме по q_2 означает, что суммирование идет по всем не взаимно простым с D числам.

Таким образом, доказана оценка: $I_{4,2} = O(n^{3/4+\varepsilon})$.

7. Интегралы $I_{4,1}$ и $I_{4,3}$ оцениваются одинаково. Все рассуждения проведем для $I_{4,3}$. Используем оценку $V(q_1 q_2, n, \overline{m_1}, \overline{m_2}) \ll q_1^{5/2+\varepsilon} (n, q_1)^{1/2} q_2^3$, полученную в лемме 5. Так как $q \le N$ и $[qn^{1/2+\theta}]^{-1} \le x \le [q(q+q')]^{-1}$, то

$$\left| \prod_{j=1}^{2} \sum_{\substack{\overline{m_j} \in \mathbb{Z}^2 \\ \overline{m_j} \neq \overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q_j'(\overline{m_j})}{q^2 D(n^{-1} - 2\pi i x)}\right) \right| = O(1) .$$

Кроме того, при тех же ограничениях на q можем оценить интеграл

$$\int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi inx}dx}{(n^{-1}-2\pi ix)^2} \ll \int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{+\infty} \frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2} \ll \int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \ll qn^{1/2+\theta}.$$

После проведенных рассуждений, получаем, что

$$I_{4,3} \ll n^{1/2+\theta+\varepsilon} \sum_{q_1q_2\le N} q_1^{-1/2}(n,q_1)^{1/2} \ll n^{1/2+\theta+\varepsilon} \sum_{q_2\le N}{}' \sum_{s|n} \sum_{q\le\frac{N}{q_2 s}} q^{-1/2} \ll n^{3/4+\varepsilon}.$$

Объединяя полученные оценки, получаем, что $I_4 = O(n^{3/4+\varepsilon})$, и доказательство теоремы завершено. ■

Литература

1. Ingham A.E. Some asymptotic formulae in the theory of numbers // J. London Math. Soc. – 1927. – 2(7). – P. 202-208.
2. Estermann T. Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten // J. Reine Angew. Math. – 1931. – 164. – P. 173-182.
3. Исмоилов Д.И. Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений // Докл. АН Тадж. ССР. – 1979. – 22;2. – С. 75-79.
4. Захаров С.А. Метод С.М. Воронина в задаче о числе решений диофантова уравнения $x_1x_2 + x_3x_4 = N$ // Чебышевский сборник. – 2006. – 7. – Вып. 4. – С. 35-91.
5. Архипов Г.И., Чубариков В.Н. Об аддитивной проблеме делителей Ингама // Вестник Московского университета. Сер.1. Математика. Механика. – 2006. – №5. – С. 32-35.
6. Ogg A.P. Modular Forms and Dirichlet Series / N.-Y. : W.A. Benjamin Inc., 1969. – 211 p.
7. Гриценко С.А. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле // Чебышевский сборник. – 2003. – 4;2. – С. 53-67.
8. Estermann T. On Klostermann's sum // Mathematika. – 1961. – 8. – P. 83-86.
9. Виноградов И.М. Основы теории чисел / СПб-М: Лань, 2004. – 167 с.

ABOUT THE NUMBER OF SOLUTIONS OF ONE DEFINITE EQUATION WITH QUADRATIC FORMS

L.N. Kurtova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: lmoskalenko@bsu.edu.ru

Abstract. The additive problem of number theory that presents the analogue of additive divisor problem is under consideration. The asymptotical formula of the solution number of the definite equation with quadratic forms is obtained.

Key words: additive problems of number theory, asymptotic formula, Kloosterman's sum.