MSC 41A05

ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ НЕВАНЛИННЫ

Ю.М. Дюкарев

Белгородская государственная сельскохозяйственная академия имени В.Я. Горина,
ул. Вавилова, 1, Майский, Белгородская обл., 308503, Россия,
e-mail: yu.dyukarev@karazin.ua

Аннотация. Упорядоченной последовательности интерполяционных задач для неванлинновских матриц-функций поставлена в соответствие последовательность ортонормированных матриц-функций. Доказан критерий вполне неопределенности предельной интерполяционной задачи в терминах сходимости ряда, построенного по ортонормированным матрицам-функциям.

Ключевые слова: упорядоченные интерполяционные задачи, предельные интерполяционные задачи, критерий вполне неопределенности, ортонормированные матрицы-функции.

1. Введение

Одной из важных проблем в теории функций является нахождение условий, при которых голоморфная функция неоднозначно определяется по своим значениям на некоторой бесконечной последовательности точек из своей области определения (узлов интерполяции). Классическое необходимое условие неоднозначности состоит в том, что все предельные точки множества узлов интерполяции принадлежат границе области определения голоморфной функции. Однако это условие не является достаточным. Необходимые и достаточные условия неединственности зависят от области определения и области значений рассматриваемых голоморфных функций. Наиболее изученным является случай, когда областью определения и областью значений голоморфных функций является круг (полуплоскость). Для таких функций критерии неединственности решения интерполяционных задач в терминах параметров Стилтьеса, параметров Шура, ортонормированных многочленов, кругов Вейля были получены в статьях [1]- [5]. Эти исследования были продолжены в работах многих авторов. Особо отметим статьи [8]- [11], выполненные в рамках подхода В.П. Потапова к решению интерполяционных задач для неванлинновских матриц-функций (МФ). Аналогичные результаты для стилтьесовских МФ были получены в статье [12]. В процитированных статьях были рассмотрены конкретные интерполяционные задачи. Общие схемы решения интерполяционных задач, включающие в себя целые классы конкретных интерполяционных задач, были предложены в статьях [13]- [15] для неванлинновских МФ и в статьях [16], [17] – для стилтьесовских МФ. Однако эти общие подходы не включали в себя «пошаговых» объектов типа параметров Стилтьеса, параметров Шура, ортонормированных многочленов, кругов Вейля и соответствующих критериев неопределенности предельных интерполяционных задач. Абстрактные аналоги «пошаговых» объектов были введены в контексте упорядоченных последовательностей обобщенных интерполяционных задач в [18] для неванлинновских МФ и в [19], [20] – для стилтьесовских МФ.

В этой статье с упорядоченной последовательностью обобщенных интерполяционных задач для неванлинновских МФ впервые связана последовательность ортонормированных МФ. В зависимости от типа обобщенных интерполяционных задач эти ортонормированные МФ могут быть целыми или мероморфными МФ. Они являются обобщениями классических ортонормированных многочленов и ортонормированных рациональных функций. В терминах последовательности ортонормированных МФ получен новый критерий вполне неопределенности предельной интерполяционной задачи.

2. Основные определения и обозначения

Пусть $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ и $\mathbb{C}_\pm = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \neq 0\}$. Пусть, далее, $\mathcal{G}$ — сепарабельное и $\mathcal{H}$ – конечномерное гильбертовы пространства. Символом $\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$ обозначим множество всех ограниченных линейных операторов, действующих из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{G}$, символом $\{\mathcal{G}\}$ обозначим множество ограниченных операторов в $\mathcal{G}$, а символом $\{\mathcal{G}\}_H$ — множество ограниченных эрмитовых операторов в $\mathcal{G}$. Оператор $A \in \{\mathcal{G}\}_H$ называется неотрицательным, если $(f, Af) \geq 0$, $\forall f \in \mathcal{G}$. Множество неотрицательных операторов в $\mathcal{G}$ обозначим символом $\{\mathcal{G}\}_\geq$. Неотрицательный оператор $A \in \{\mathcal{G}\}_\geq$ называется положительным, если он обратим и $A^{-1} \in \{\mathcal{G}\}$. Множество положительных операторов в $\mathcal{G}$ обозначим символом $\{\mathcal{G}\}_>$. Пусть операторы $A, B \in \{\mathcal{G}\}_H$. Неравенство $A \geq B$ (соотв. $A > B$) означает, что $A - B \in \{\mathcal{G}\}_\geq$ (соотв. $A - B \in \{\mathcal{G}\}_>$).

Тождественный и нулевой операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$, обозначим символами $I_\mathcal{G}$ и $O_\mathcal{G}$. Нулевой оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathcal{G}_1$ в гильбертово пространство $\mathcal{G}_2$, обозначим символом $O_{\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2}$. Для упрощения записи мы часто будем опускать нижние индексы у нулевого и тождественного операторов, если эти индексы легко определяются из контекста.

Пусть заданы операторы $K \in \{\mathcal{G}\}_\geq$, $T \in \{\mathcal{G}\}$, $u, v \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$. И пусть эти операторы удовлетворяют *Операторному Тождеству (ОТ)*

$$TK - KT^* = vu^* - uv^* . \tag{1}$$

Определение 1. *Упорядоченный набор операторов*

$$\mathcal{P} = \{K, T, u, v\} , \tag{2}$$

удовлетворяющий ОТ (1), называется обобщенной интерполяционной задачей неванлинновского типа, а пространства $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ называются масштабными пространствами обобщенной интерполяционной задачи.

Пусть оператор T таков, что оператор-функция (ОФ) $R_T(z) = (I_\mathcal{G} - zT)^{-1}$ мероморфна в $\mathbb{C}$. Множество особых точек ОФ R_T обозначим символом $\mathcal{Z}$. Из мероморфности R_T следует, что множество $\mathcal{Z}$ дискретно в $\mathbb{C}$, т.е. не имеет предельных точек в $\mathbb{C}$. Пусть $\overline{\mathcal{Z}} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \mathcal{Z}\}$.

Определение 2. *ОФ $w : \mathbb{C}_+ \to \{\mathcal{H}\}$ называется неванлинновской, если она голоморфна в $\mathbb{C}_+$ и $\{w(z) - w^*(z)\}/2i \geq O_\mathcal{H}$, $\forall z \in \mathbb{C}_+$.*

Класс всех таких ОФ обозначим $\mathcal{R}$.

Определение 3. *ОФ $w \in \mathcal{R}$ называется решением обобщенной интерполяционной задачи (2), если она удовлетворяет следующему Основному Матричному Неравенству (ОМН) В.П. Потапова*

$$\begin{pmatrix} K & R_T(z)\,\{\,vw(z)-u\,\} \\ \{\,vw(z)-u\,\}^*\,R_T^*(z) & \{w(z)-w^*(z)\}/\{z-\bar{z}\} \end{pmatrix} \geq O_{\mathcal{G}\oplus\mathcal{H}},\ z\in\mathbb{C}_+\setminus\mathcal{Z}\,.$$

Определение 4. *Обобщенная интерполяционная задача $\mathcal{P}=\{K,T,u,v\}$ с масштабными пространствами $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ называется вполне неопределенной, если*

$$K\in\{\mathcal{G}\}_>,\ vh=0\Leftrightarrow h=0,\ uh=0\Leftrightarrow h=0.$$

Далее в этой статье мы будем рассматривать только вполне неопределенные обобщенные интерполяционные задачи. Множество всех решений обобщенной интерполяционной задачи (2) обозначим символом $\mathcal{F}$. Можно доказать (см. [14]- [15]), что при сделанных предположениях множество $\mathcal{F}$ не пусто.

Пусть дана бесконечная последовательность гильбертовых пространств $\left\{\mathfrak{h}^{(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$. Рассмотрим ортогональные суммы этих пространств

$$\mathcal{G}^{(l)}=\mathfrak{h}^{(1)}\oplus\mathfrak{h}^{(2)}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{h}^{(l)}\,.$$

Каждое из пространств $\mathcal{G}^{(k)}$ можно рассматривать и как подпространство в любом пространстве $\mathcal{G}^{(l)}$ при $l>k$. Мы часто будем отождествлять векторы $(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$ из $\mathcal{G}^{(l)}$ с векторами $(x_1,\ldots,x_k)$ из $\mathcal{G}^{(k)}$. Пусть оператор $A\in\{\mathcal{G}^{(l)}\}$. Сужение оператора A на подпространство $\mathcal{G}^{(k)}$ обозначим через $A|_{\mathcal{G}^{(k)}}$. Пусть $P_{l,k}$ обозначает оператор ортогонального проектирования пространства $\mathcal{G}^{(l)}$ на подпространство $\mathcal{G}^{(k)}$. Оператор $P_{l,k}A|_{\mathcal{G}^{(k)}}$ в подпространстве $\mathcal{G}^{(k)}\subset\mathcal{G}^{(l)}$ мы часто будем рассматривать как оператор в пространстве $\mathcal{G}^{(k)}$.

Пусть теперь для всех $l\geq 1$ определены обобщенные вполне неопределенные интерполяционные задачи

$$\mathcal{P}^{(l)}=\{K^{(l)},T^{(l)},u^{(l)},v^{(l)}\} \tag{3}$$

с масштабными пространствами $\mathcal{G}^{(l)},\ \mathcal{H}$.

Пусть произвольные натуральные числа l и k удовлетворяют неравенствам $1\leq k<l$. Рассмотрим ортогональное разложение масштабных пространств интерполяционной задачи (3)

$$\mathcal{G}^{(l)}=\mathcal{G}^{(k)}\oplus\left(\mathcal{G}^{(l)}\ominus\mathcal{G}^{(k)}\right). \tag{4}$$

Определение 5. *Пусть дана последовательность интерполяционных задач (3) и матричные представления операторов интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$, построенные по разложению (4), имеют вид*

$$K^{(l)}=\begin{pmatrix}\tilde{K}^{(k)} & B^{(l,k)}\\ B^{(l,k)*} & C^{(l,k)}\end{pmatrix},\quad T^{(l)}=\begin{pmatrix}\tilde{T}^{(k)} & O_{\mathcal{G}^{(l)}\ominus\mathcal{G}^{(k)}\mathcal{G}^{(k)}}\\ T_{21}^{(l,k)} & T_{22}^{(l,k)}\end{pmatrix},$$

$$v^{(l)} = \begin{pmatrix} \tilde{v}^{(k)} \\ \check{v}^{(l,k)} \end{pmatrix}, \quad u^{(l)} = \begin{pmatrix} \tilde{u}^{(k)} \\ \check{u}^{(l,k)} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Последовательность интерполяционных задач (3) *называется упорядоченной, если операторы* $\tilde{K}^{(k)}$, $\tilde{T}^{(k)}$, $\tilde{v}_1^{(k)}$, $\tilde{u}^{(k)}$, *рассматриваемые как операторы в пространствах* $\mathcal{G}^{(k)}$ *и* $\mathcal{H}$, *совпадают с операторами* $K^{(k)}$, $T^{(k)}$, $v^{(k)}$, $u^{(k)}$ *интерполяционной задачи* $\mathcal{P}^{(k)}$.

Для упрощения записи в формулах (5) мы будем обозначать $\tilde{K}_1^{(l)}$ через $K_1^{(l)}$ и т.д. Упорядоченную последовательность интерполяционных задач обозначим через $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$. В этом контексте обобщенные интерполяционные задачи $\mathcal{P}^{(l)}$ называются *усеченными интерполяционными задачами*. В обозначения объектов, связанных с усеченной задачей $\mathcal{P}^{(l)}$, введем верхний индекс (l). Имеют место включения $\mathcal{F}^{(l+1)} \subset \mathcal{F}^{(l)}$ (см. [18]).

3. Ортонормированные ОФ, ассоциированные с упорядоченными интерполяционными задачами

Рассмотрим упорядоченную последовательность обобщенных интерполяционных задач $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$. И пусть в представлении масштабных пространств (см. (4)) $k = l-1$

$$\mathcal{G}^{(l)} = \mathcal{G}^{(l-1)} \oplus \mathfrak{h}^{(l)}, \qquad l \geq 2\,.$$

Введем упрощенные обозначения для операторов

$$K^{(l)} = \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & B^{(l)} \\ B^{(l)*} & C^{(l)} \end{pmatrix}, \; v^{(l)} = \begin{pmatrix} v^{(l-1)} \\ \check{v}^{(l)} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

И пусть

$$S^{(l)} = \begin{cases} I_{\mathcal{H}}, & l = 1, \\ C^{(l)} - B_r^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)}, & l > 1\,. \end{cases}$$

Легко видеть, что выполнены равенства

$$K^{(l)} = \begin{pmatrix} I & O \\ B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(l-1)} & O \\ O & S^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ O & I \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$K^{(l)^{-1}} = \begin{pmatrix} K^{(l-1)^{-1}} & O \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} S^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} -B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Пусть операторы

$$V^{(l)} : \mathcal{G}^{(l)} = \mathcal{G}^{(l-1)} \oplus \mathfrak{h}^{(l)} \to \mathfrak{h}^{(l)}$$

и естественных матричных представлениях задаются формулами

$$V^{(l)} = \begin{pmatrix} O_{\mathcal{G}^{(l-1)}\,\mathfrak{h}^{(l)}} & I_{\mathfrak{h}^{(l)}} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что

$$S^{(l)} V^{(l)} K^{(l)^{-1}} = \begin{pmatrix} -B^{(l)*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix}. \tag{9}$$

С упорядоченной последовательностью $\left\{\mathcal{P}^{(l)}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ обобщенных интерполяционных задач свяжем последовательность ОФ

$$P^{(1)}(z)=K^{(1)^{-\frac{1}{2}}}R_{T^{(1)}}(z)\,,\quad P^{(l)}(z)=S^{(l)^{1/2}}V^{(l)}K^{(l)^{-1}}R_{T^{(l)}}(z)v^{(l)}\,,\quad l>1\,. \tag{10}$$

Пусть неванлинновская ОФ $w\in\mathcal{F}^{(l)}$ и ее интегральное представление (см. [21]) имеет вид

$$w^{(l)}(z)=\mu^{(l)}z+\nu^{(l)}+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{t}{1+t^2}\right)\sigma^{(l)}(dt),\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma^{(l)}(dt)}{1+t^2}\text{ — сходится.}$$

Здесь $\mu^{(l)}\in\{\mathcal{H}\}_{\geq}$, $\nu^{(l)}\in\{\mathcal{H}\}_H$, а неотрицательная операторная мера σ определена на борелевских подмножествах $\mathbb{R}$ и принимает значения в $\{\mathcal{H}\}_{\geq}$. Тогда при выполнении некоторых дополнительных условий (см. [14], [15]) имеют место интегральные представления

$$K^{(l)}=\int_{-\infty}^{\infty}R_{T^{(l)}}(t)v^{(l)}\sigma^{(l)}(dt)v^{(l)^*}R^*_{T^{(l)}}(t)+W^{(l)}\,. \tag{11}$$

Здесь $W^{(l)}\in\left\{\mathcal{G}^{(l)}\right\}_{\geq}$. Мы будем считать, что в наших задачах всегда имеет место интегральное представление (11).

Теорема 1. *Пусть дана упорядоченная последовательность обобщенных вполне неопределенных интерполяционных задач неванлинновского типа* $\left\{\mathcal{P}^{(l)}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$. *И пусть, далее, функция* $w\in\mathcal{F}^{(l)}$ *и* $K^{(l)}$ *допускает интегральное представление* (11).

Тогда для любого $l\in\mathbb{N}$ *имеют место соотношения обобщенной ортонормированности*

$$\int_{-\infty}^{\infty}P^{(l)}(t)\sigma^{(l)}(dt)P^{(l)^*}(t)+S^{(l)^{1/2}}V^{(l)}K^{(l)^{-1}}W^{(l)}K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}}=I_{\mathcal{H}}\,, \tag{12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}P^{(k)}(t)\sigma^{(l)}(dt)P^{(l)^*}(t)+S^{(k)^{1/2}}V^{(k)}K^{(k)^{-1}}X^{l,k}W^{(l)}K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}}=O_{\mathcal{H}}\,,\quad k<l\,, \tag{13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}P^{(k)}(t)\sigma^{(k)}(dt)P^{(l)^*}(t)+S^{(k)^{1/2}}V^{(k)}K^{(k)^{-1}}W^{(k)}Y^{l,k}K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}}=O_{\mathcal{H}}\,,\quad k>l\,. \tag{14}$$

Здесь операторы $X^{l,k}\in\left\{\mathcal{G}^{(l)}=\mathcal{G}^{(k)}\oplus\left(\mathcal{G}^{(l)}\ominus\mathcal{G}^{(k)}\right),\ \mathcal{G}^{(k)}\right\}$ *и задаются с помощью матричных представлений*

$$X^{l,k}=\begin{pmatrix}I_{\mathcal{G}^{(k)}} & O_{\mathcal{G}^{(l)}\ominus\mathcal{G}^{(k)},\ \mathcal{G}^{(k)}}\end{pmatrix},$$

а операторы $Y^{l,k}\in\left\{\mathcal{G}^{(k)}=\mathcal{G}^{(l)}\oplus\left(\mathcal{G}^{(k)}\ominus\mathcal{G}^{(l)}\right),\ \mathcal{G}^{(l)}\right\}$ *и задаются с помощью матричных представлений*

$$Y^{l,k}=\begin{pmatrix}I_{\mathcal{G}^{(l)}}\\ O_{\mathcal{G}^{(k)}\ominus\mathcal{G}^{(l)},\ \mathcal{G}^{(l)}}\end{pmatrix}.$$

□ Имеем

$$\int_0^\infty P^{(l)}(t)\sigma^{(l)}(dt)P^{(l)^*}(t) + S^{(l)^{1/2}}V^{(l)}K^{(l)^{-1}}W^{(l)}K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}}$$
$$= S^{(l)^{1/2}}V^{(l)}K^{(l)^{-1}}\Big(\int_0^\infty R_{T^{(l)}}(t)v^{(l)}\sigma^{(l)}(dt)v^{(l)^*}R^*_{T^{(l)}}(t) + W^{(l)}\Big)K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}}$$
$$= S^{(l)^{1/2}}V^{(l)}K^{(l)^{-1}}K^{(l)}K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}}$$
$$= S^{(l)^{1/2}}V^{(l)}K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}} = S^{(l)^{1/2}}S^{(l)^{-1}}S^{(l)^{1/2}} = I_{\mathcal{H}}.$$

Здесь мы воспользовались формулами (10), интегральными представлениями (11) и равенством

$$\begin{aligned} V^{(l)}K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*} &= \begin{pmatrix} O_{\mathcal{G}^{(l-1)}\mathfrak{h}^{(l)}} & I_{\mathfrak{h}^{(l)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(l-1)^{-1}} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{\mathfrak{h}^{(l)}\mathcal{G}^{(l-1)}} \\ I_{\mathfrak{h}^{(l)}} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} O_{\mathcal{G}^{(l-1)}\mathfrak{h}^{(l)}} & I_{\mathfrak{h}^{(l)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}}B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} \\ &\times S^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} -B^{(l)^*}K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{\mathfrak{h}^{(l)}\mathcal{G}^{(l-1)}} \\ I_{\mathfrak{h}^{(l)}} \end{pmatrix} = S^{(l)^{-1}}. \end{aligned}$$

Формулы (12) доказаны.

Докажем теперь соотношения (13). Из блочной структуры оператора $T^{(l)}$ (см. (5)) следует, что ОФ $R_{T^{(l)}}(z)$ имеет следующую структуру

$$R_{T^{(l)}}(z) = (I_{\mathcal{G}^{(l)}} - zT^{(l)})^{-1} = \begin{pmatrix} R_{T^{(k)}}(z) & O_{\mathcal{G}^{(l)}\ominus\mathcal{G}^{(k)}\mathcal{G}^{(k)}} \\ R_{21}(z) & R_{22}(z) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Здесь $R_{21}(z)$ и $R_{22}(z)$ некоторые мероморфные вместе с $R_{T^{(l)}}(z)$ ОФ, конкретный вид которых нас не интересует.

Имеем

$$\begin{aligned} X^{l,k}R_{T^{(l)}}(z)v^{(l)} &= \begin{pmatrix} I_{\mathcal{G}^{(k)}} & O_{\mathcal{G}^{(l)}\ominus\mathcal{G}^{(k)},\,\mathcal{G}^{(k)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{T^{(k)}}(z) & O_{\mathcal{G}^{(l)}\ominus\mathcal{G}^{(k)}\mathcal{G}^{(k)}} \\ R_{21}(z) & R_{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(k)} \\ \check{v}^{(l,k)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{T^{(k)}}(z) & O_{\mathcal{G}^{(l)}\ominus\mathcal{G}^{(k)}\mathcal{G}^{(k)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(k)} \\ \check{v}^{(l,k)} \end{pmatrix} = R_{T^{(k)}}(z)v^{(k)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R_{T^{(k)}}(z)v^{(k)} = X^{l,k}R_{T^{(l)}}(z)v^{(l)}.$$

Воспользовавшись этим равенством, получим

$$\int_0^\infty P^{(k)}(t)\sigma^{(l)}(dt)P^{(l)^*}(t) + S^{(k)^{1/2}}V^{(k)}K^{(k)^{-1}}X^{l,k}W^{(l)}K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}}$$
$$= S^{(k)^{1/2}}V^{(k)}K^{(k)^{-1}}\int_0^\infty R_{T^{(k)}}(t)v^{(k)}\sigma^{(l)}(dt)v^{(l)^*}R^*_{T^{(l)}}(t)K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}}$$
$$+S^{(k)^{1/2}}V^{(k)}K^{(k)^{-1}}X^{l,k}W^{(l)}K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}}$$
$$= S^{(k)^{1/2}}V^{(k)}K^{(k)^{-1}}X^{l,k}\int_0^\infty R_{T^{(l)}}(t)v^{(l)}\sigma^{(l)}(dt)v^{(l)^*}R^*_{T^{(l)}}(t)K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}}$$

$$
\begin{aligned}
&+S^{(k)^{1/2}}V^{(k)}K^{(k)^{-1}}X^{l,k}W^{(l)}K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}}\\
&=S^{(k)^{1/2}}V^{(k)}K^{(k)^{-1}}X^{l,k}\Big(\int_0^\infty R_{T^{(l)}}(t)v^{(l)}\sigma^{(l)}(dt)v^{(l)^*}R^*_{T^{(l)}}(t)+W^{(l)}\Big)K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}}\\
&=S^{(k)^{1/2}}V^{(k)}K^{(k)^{-1}}X^{l,k}K^{(l)}K^{(l)^{-1}}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}}=S^{(k)^{1/2}}V^{(k)}K^{(k)^{-1}}X^{l,k}V^{(l)^*}S^{(l)^{1/2}}=O_{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned}
$$

Мы воспользовались равенством $X^{l,k}V^{(l)^*}=O$, которое следует из того, что образ оператора

$$
V^{(l)^*}=\begin{pmatrix} O_{\mathfrak{h}^{(l)}\,\mathcal{G}^{(l-1)}} \\ I_{\mathfrak{h}^{(l)}} \end{pmatrix}
$$

содержится в ядре оператора $X^{l,k}=\Big(I_{\mathcal{G}^{(k)}}\quad O_{\mathcal{G}^{(l)}\ominus\mathcal{G}^{(k)}\ \mathcal{G}^{(k)}}\Big)$. Равенства (13) доказаны. Аналогичным образом доказываются равенства (14). ■

4. Предельная интерполяционная задача

Определение 6. *Пусть дана упорядоченная последовательность обобщенных интерполяционных задач неванлинновского типа $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$ и пусть $\mathcal{F}^{(l)}$ обозначает множество всех решений интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$. ОФ $w\in\mathcal{R}$ называется решением предельной интерполяционной задачи, если $w\in\mathcal{F}^{(l)}$, $\forall l\in\mathbb{N}$.*

Множество решений предельной интерполяционной задачи обозначим символом $\mathcal{F}^{(\infty)}$, а саму предельную интерполяционную задачу – символом $\mathcal{P}^{(\infty)}$. Пусть $\mathcal{Z}^{(l)}$ обозначает множество особых точек ОФ $R_{T^{(l)}}$. И пусть $\mathcal{Z}^{(\infty)}=\cup_{l\in\mathbb{N}}\mathcal{Z}^{(l)}$, а $\overline{\mathcal{Z}}^{(\infty)}=\cup_{l\in\mathbb{N}}\overline{\mathcal{Z}}^{(l)}$. Нас будет интересовать тот случай, когда предельная интерполяционная задача имеет бесконечно много решений. Для этого необходимо, чтобы множества $\mathcal{Z}^{(\infty)}$ и $\overline{\mathcal{Z}}^{(\infty)}$ не имели предельных точек в $\mathbb{C}_\pm$. Будем считать, что для наших задач выполнено это необходимое условие.

Сформулируем некоторые известные результаты из теории операторных кругов Вейля (см. [9]- [11], [22]- [24]). Зафиксируем точку $z_0\in\mathbb{C}_+\setminus\{\mathcal{Z}^{(\infty)}\cup\overline{\mathcal{Z}}^{(\infty)}\}$ и и рассмотрим множество операторов

$$
\mathcal{K}^{(l)}(z_0)=\{w(z_0):w\in\mathcal{F}^{(l)}\}.
$$

Множество $\mathcal{K}^{(l)}(z_0)$ допускает представление вида

$$
\mathcal{K}^{(l)}(z_0)=\{c^{(l)}(z_0)+r^{(l)}(z_0)V\rho^{(l)}(z_0):V^*V\le I\}\,. \tag{16}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
c^{(l)}(z_0)&=\Big(i(\bar z_0-z_0)v^{(l)^*}R^*_{T^{(l)}}(z_0)K^{(l)^{-1}}R_{T^{(l)}}(z_0)v^{(l)}\Big)^{-1}\times\\
&\qquad\times\{i(\bar z_0-z_0)u^{(l)^*}R^*_{T^{(l)}}(z_0)K^{(l)^{-1}}v^{(l)}-iI\}^*\,,\\
r^{(l)}(z_0)&=\Big(i(\bar z_0-z_0)v^{(l)^*}R^*_{T^{(l)}}(z_0)K^{(l)^{-1}}R_{T^{(l)}}(z_0)v^{(l)}\Big)^{-1/2}>O\,,\\
\rho^{(l)}(z_0)&=\Big(i(\bar z_0-z_0)v^{(l)^*}R^*_{T^{(l)}}(\bar z_0)K^{(l)^{-1}}R_{T^{(l)}}(\bar z_0)v^{(l)}\Big)^{-1/2}>O\,.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

С геометрической точки зрения множество $\mathcal{K}^{(l)}(z_0)$ из (16) можно считать операторным кругом с центром в точке $c^{(l)}(z_0)$ левым радиусом $r^{(l)}(z_0)$ и правым радиусом $\rho^{(l)}(z_0)$. Этот круг называется операторным кругом Вейля.

Из включения $\mathcal{F}^{(l+1)} \subset \mathcal{F}^{(l)}$ следует, что

$$\mathcal{K}^{(l+1)}(z_0) \subset \mathcal{K}^{(l)}(z_0)\,.$$

Пусть

$$\mathcal{K}^{(\infty)}(z_0) = \bigcap_{l=1}^{\infty} \mathcal{K}^{(l)}(z_0)\,.$$

Оказывается, что существуют пределы

$$c^{(\infty)}(z_0) = \lim_{l\to\infty} c^{(l)}(z_0)\,, \quad \rho^{(\infty)}(z_0) = \lim_{l\to\infty} \rho^{(l)}(z_0) \geq O\,, \quad r^{(\infty)}(z_0) = \lim_{l\to\infty} r^{(l)}(z_0) \geq O\,.$$

Более того,

$$\mathcal{K}^{(\infty)}(z_0) = \{w(z_0) : w \in \mathcal{F}^{(\infty)}\} = \{c^{(\infty)}(z_0) + r^{(\infty)}(z_0) V \rho^{(\infty)}(z_0) : V^*V \leq I\}$$

Множество матриц $\mathcal{K}^{(\infty)}(z_0)$ называется предельным кругом Вейля в точке z_0.

По теореме С.А. Орлова (см. [22]) для любых точек $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}_\infty \cup \overline{\mathcal{Z}}_\infty\}$ имеем

$$m = \operatorname{rank} r^{(\infty)}(z_1) = \operatorname{rank} r^{(\infty)}(z_2)\,, \quad n = \operatorname{rank} \rho^{(\infty)}(z_1) = \operatorname{rank} \rho^{(\infty)}(z_2)\,.$$

Числа m и n служат мерой вырожденности предельной интерполяционной задачи.

Определение 7. *Если $m = n = \dim \mathcal{H}$, то предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ называется вполне неопределенной.*

Резольветной матрицей для усеченной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$ называется

$$U^{(l)}(z) = \begin{pmatrix} I + zv^{(l)^*} R_{T^{(l)*}}(z) K^{(l)^{-1}} u^{(l)} & -zv^{(l)^*} R_{T^{(l)*}}(z) K^{(l)^{-1}} v^{(l)} \\ zu^{(l)^*} R_{T^{(l)*}}(z) K^{(l)^{-1}} u^{(l)} & I - zu^{(l)^*} R_{T^{(l)*}}(z) K^{(l)^{-1}} v^{(l)} \end{pmatrix}.$$

Матрицей Вейля для усеченной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$ называется

$$W^{(l)}(z) = U^{(l)^{-1^*}}(z) J U^{(l)^{-1}}(z), \qquad J = \begin{pmatrix} O_{\mathcal{H}} & -iI_{\mathcal{H}} \\ iI_{\mathcal{H}} & O_{\mathcal{H}} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

В [18] доказано, что

$$W^{(l)}(z) = \begin{pmatrix} I & -c^{(l)^*}(z) \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{(l)^2}(z) & O \\ O & -\rho^{(l)^{-2}}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ -c^{(l)}(z) & I \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Теорема 2. *Пусть дана упорядоченная последовательность обобщенных интерполяционных задач неванлинновского типа $\left\{\mathcal{P}^{(l)}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ и предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$. И пусть, далее, последовательность ортонормированных ОФ $\left\{P^{(l)}(z)\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ определена в (10), а последовательность матриц Вейля $\left\{W^{(l)}(z)\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ определена в (18).*

Для того, чтобы предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ была вполне неопределенной необходимо, чтобы во всех точках $z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}}^{(\infty)}\}$ существовал отличный от нуля предел числовой последовательности

$$\lim_{l\to\infty} \det W^{(l)}(z) \neq 0 \tag{20}$$

и сходился ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} P^{(l)^*}(z) P^{(l)}(z) \tag{21}$$

и достаточно, чтобы хотя бы в одной точке $z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}}^{(\infty)}\}$ существовал отличный от нуля предел числовой последовательности (20) и сходился ряд (21).

□ Для все $l \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}}^{(\infty)}\}$ имеют место равенства

$$r^{(l)^{-2}}(z) = i(\bar z - z) \sum_{j=1}^{l} P_1^{(j)^*}(z) P_1^{(j)}(z)\,. \tag{22}$$

Индукцией по l докажем формулы (22). При $l = 1$ формула (22) очевидна. Пусть теперь при некотором фиксированном $l > 1$ формулы (22) выполнены для всех $k < l$. Тогда для $k = l$ имеем

$$\begin{aligned}
r^{(l)^{-2}}(z) &= i(\bar z - z) v^{(l)^*} R^*_{T^{(l)}}(z) K^{(l)^{-1}} R_{T^{(l)}}(z) v^{(l)} \\
&= i(\bar z - z) \begin{pmatrix} v^{(l-1)} \\ \check v^{(l)} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)}}(z) & O_{\mathfrak{h}^{(l)}\mathcal{G}^{(l-1)}} \\ R_{21}(z) & R_{22}(z) \end{pmatrix}^* \\
&\times \left\{ \begin{pmatrix} K^{(l-1)^{-1}} & O \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} S^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} -B^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} \right\} \\
&\times \begin{pmatrix} R_{T^{(l-1)}}(z) & O_{\mathfrak{h}^{(l)}\mathcal{G}^{(l-1)}} \\ R_{21}(z) & R_{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(l-1)} \\ \check v^{(l)} \end{pmatrix} \\
&= i(\bar z - z) v^{(l-1)^*} R^*_{T^{(l)}}(x) K^{(l-1)^{-1}} R_{T^{(l)}}(x) v^{(l-1)} \\
&+ v^{(l)^*} R^*_{T^{(l)}}(x) \begin{pmatrix} -K^{(l-1)^{-1}} B^{(l)} \\ I \end{pmatrix} S^{(l)^{-1}} \begin{pmatrix} -B^{(l)^*} K^{(l-1)^{-1}} & I \end{pmatrix} R_{T^{(l)}}(x) v^{(l)} \\
&= r^{(l-1)^{-2}}(z) + i(\bar z - z) v^{(l)^*} R^*_{T^{(l)}}(x) K^{(l)^{-1}} V^{(l)^*} S^{(l)} S^{(l)^{-1}} S^{(l)} V^{(l)} K^{(l)^{-1}} R_{T^{(l)}}(x) v^{(l)} \\
&= r^{(l-1)^{-2}}(z) + i(\bar z - z) \left(S^{(l)^{1/2}} V^{(l)} K^{(l)^{-1}} R_{T^{(l)}}(x) v^{(l)} \right)^* \cdot \left(S^{(l)^{1/2}} V^{(l)} K^{(l)^{-1}} R_{T^{(l)}}(x) v^{(l)} \right) \\
&= r^{(l-1)^{-2}}(z) + i(\bar z - z) P^{(l)^*}(x) P^{(l)}(x) = i(\bar z - z) \sum_{j=1}^{l} P^{(j)^*}(x) P^{(j)}(x)\,.
\end{aligned}$$

В этой цепочке равенств первое равенство следует из (17), второе — из (6), (7) и (15) при $k = l - 1$, четвертое — из (9) и последнее равенство следует из предположения индукции. Доказаны равенства (22).

Пусть предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ является вполне неопределенной. Тогда во всех точках $z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}}^{(\infty)}\}$ имеем

$$\lim_{l\to\infty} r^{(l)}(z_0) = r^{(\infty)}(z_0) > O\,, \quad \lim_{l\to\infty} \rho^{(l)}(z_0) = \rho^{(\infty)}(z_0) > O\,.$$

Поэтому

$$\lim_{l\to\infty} r^{(l)^2}(z_0) = r^{(\infty)^2}(z_0) > O\,, \quad \lim_{l\to\infty} \rho^{(l)^{-2}}(z_0) = \rho^{(\infty)^{-2}}(z_0) > O\,. \tag{23}$$

Отсюда и из (22) следует сходимость ряда (21). В силу (19) имеем

$$\det W^{(l)}(z) = -\det r^{(l)^2}(z) \det \rho^{(l)^{-2}}(z)\,. \tag{24}$$

Переходя в этом равенстве к пределу $l \to \infty$ и учитывая (23), получим (20).

Наоборот, пусть в некоторой точке $z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}}^{(\infty)}\}$ к ненулевому пределу сходится последовательность (20) и сходится ряд (21). Из (22) и (21) следует, что

$$\lim_{l\to\infty} r^{(l)^2}(z_0) = r^{(\infty)^2}(z_0) > O\,. \tag{25}$$

Переходя в равенстве (24) к пределу $l \to \infty$ и воспользовавшись (25), (20), получим $\det \rho^{(\infty)^{-2}}(z) \neq 0$. Отсюда и из (25) следует, что в рассматриваемой точке $z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}}^{(\infty)}\}$ выполнены неравенства

$$r^{(\infty)}(z_0) > O\,, \qquad \rho^{(\infty)}(z) > O\,.$$

По теореме С.А. Орлова [22] эти неравенства выполняются во всех точках $z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}}^{(\infty)}\}$. И, таким образом, предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ является вполне неопределенной. ■

Литература

1. Stieltjes T. J. Recherches sur les fractions continues // Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. – 1894. – 8;4. – P. 1-122.
2. Stieltjes T. J. Recherches sur les fractions continues // Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math.Sci. Phys. – 1895. – 9;1. – P. 1-47.
3. Hamburger H. Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems // Math. Ann. – 1920. – 81;2-4. – P. 235–319.
4. Hamburger H. Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems // Math. Ann. – 1921. – 82;1-2. – P. 120–164.
5. Hamburger H. Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems // Math. Ann. – 1921. – 82;3-4. – P. 168–187.
6. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind // J. reine u. angew. Math. – 1917. – 147. – P. 205-232.
7. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind // J. reine u. angew. Math. – 1918. – 148. – P. 122-145.

8. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны–Пика // Докл. АН АрмССР. – 1974. – 59;1. – С.17-22.
9. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны–Пика // Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения, Сб. науч. тр., Наукова думка, Киев. – 1981. – С.25-49.
10. Потапов В.П. К теории матричных кругов Вейля // Функциональный анализ и прикладная математика, Сб. науч. тр. / Киев: Наукова думка, Киев, 1982. – С. 113-121.
11. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1983. – 47;3. – С. 455-497.
12. Дюкарев Ю.М. О критериях неопределенности матричной проблемы моментов Стилтьеса // Математические заметки. – 2004. – 75;1. – С. 71-88.
13. Кацнельсон В.Э., Хейфец А.Я., Юдицкий П.М. Абстрактная интерполяционная проблема и теория расширений изометрических операторов // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций. Сб. науч. тр.(ред. Марченко В.А.) / Киев: Наукова думка, 1987. –С.83-96.
14. Иванченко Т.С., Сахнович Л.А. Операторный подход к схеме В.П. Потапова исследования интерполяционных задач // Укр. мат. журн. – 1987. – 39;5. – С. 573-578.
15. Ivanchenko T.S., Sakhnovich L.A An operator approach to the Potapov scheme for the solution of interpolation problems // Operator Theory: Advances and Applications. – 1994. – 72. – P. 48-86.
16. Дюкарев Ю.М. Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стилтьеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. 1 // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999. – 6;1/2. – С. 30-54.
17. Bolotnikov V., Sakhnovich L. On an operator approach to interpolation problems for Stieltjes fanctions // Integr. equ. oper. theory. – 1999. – 35. – P. 423-470.
18. Дюкарев Ю.М. О неопределенности интерполяционных задач для неванлинновских функций // Известия высших учебных заведений. Серия «Математика». – 2004. - 8(507). – С.26-38.
19. Дюкарев Ю.М. О неопределенности интерполяционных задач в классе Стилтьеса // Математически сборник. – 2005. – 196;3. – С. 61-88.
20. Дюкарев Ю.М. Обобщенный критерий Стилтьеса полной неопределенности интерполяционных задач // Матем. заметки. – 2008. – 84;1. – С. 23-39.
21. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.: Наука, 1973. – 552 с.
22. Орлов С.А. Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1976. – 40;3. – С. 593-644.
23. Шмульян Ю.Л. Оператоные шары // Теория функций, функ. анализ и их прилож. – 1968. – 6. – С.455-497.
24. Dubovoj V.K., Fritzsche B., Kirstein B. Matricial version of the classical Schur problem / Stuttgart-Leipzig: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1992. – 355 p.

ORTHONORMAL MATRIX FUNCTIONS AND INTERPOLATIONS PROBLEM IN THE NEVANLINNA CLASS

Yu. M. Dyukarev

Belgorod State Agricultural Academy by V.Ya.Gorin,
Vavilova St., 1, Maiskiy, Belgorod Reg., 308503, Russia, e-mail: yu.dyukarev@karazin.ua

Abstract. The sequence of orthonormal matrix functions is connected to the ordered sequence of interpolation problems for Nevanlinna matrix functions. A criterion was proven for the complete indeterminacy of limiting interpolation problem in terms of the convergence of the series, which was built in orthonormal matrix function.

Key words: ordered interpolation problems, limit interpolation problems, criterion for the complete indeterminacy, orthonormal matrix functions.