КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

MSC 41A05

РАСЧЁТ КОНЕЧНОМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧЕ КВАДРАТИЧНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

С.М. Ситник, А.С. Тимашов

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются аппроксимации сигналов при помощи целочисленных сдвигов квадратичных экспонент — функций Гаусса. Предложен метод нахождения узловой функции для таким образом поставленной задачи интерполяции, основанный на решениях усечённых систем линейных уравнений. Проведено краткое сравнение данного метода с известными ранее и намечены приложения полученных результатов в теории передачи сигналов.

Ключевые слова: квадратичные экспоненты, функции Гаусса, интерполяция, сигналы.

Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Для численного анализа и приложений основную роль играют приближения такого типа конечными суммами, которые возникают при усечении соответствующих рядов. В сообщение излагаются результаты исследования таких конечных приближений. Историю вопроса, основные результаты и многочисленные приложения см. в [1-7].

Более точно, будет исследована следующая основная

Задача. Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси и некоторый параметр $s > 0$, который в приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Будем искать интерполирующую функцию $g(x)$, также определённую на всей оси, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f_k \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2s^2}\right),$$

и совпадает с исходной функцией во всех целых точках

$$g(m) = f(m), \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Известны два подхода к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета-функций Якоби [2]. Как показано в [1,3-4], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [1,4], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определённую вычислительную ценность, но она достигается ценой существенного усложнения алгоритма, при этом вычисления возможны в достаточно узких диапазонах параметров и с небольшим числом разрядов в результатах. Поэтому в настоящей работе предлагается наиболее простой прямой метод решения поставленной задачи, основанный на сведении её к решению конечных систем линейных уравнений.

Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе сформулированы результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДПФ.

Решение задачи интерполяции сводится к нахождению базисной узловой функции $G(x, s)$, удовлетворяющей условиям:

$$G(0, s) = 1, G(m, s) = 0\,, \quad m \neq 0\,, \quad m \in \mathbb{Z}\,.$$

После нахождения базисной узловой функции в виде

$$G(x, s) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} g_k \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2s^2}\right)$$

интерполяционная задача решается стандартным образом. Основная проблема сводится к нахождению коэффициентов базисной узловой функции g_k.

Коэффициенты g_k базисной узловой функции удовлетворяют бесконечной системе линейных уравнений. Предлагается для расчета коэффициентов использовать конечномерные приближения данной системы. Основные результаты содержатся в двух теоремах.

Теорема 1. *Рассматриваемые конечномерные приближения для нахождения коэффициентов базисной узловой функции образуют однозначно разрешимые системы линейных уравнений при любых размерностях, их определители не равны нулю.*

Теорема 2. *При увеличении размерности конечномерных систем их решения стремятся к решению исходной бесконечной системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов базисной узловой функции.*

Нами также проведено компьютерное исследование решений полученных конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи математического пакета MATHEMATICA при широком наборе управляющих параметров, результаты представлены в графическом и табличном виде [5,7]. Рассмотрено разложение указанным методом по целочисленным сдвигам функции Гаусса основного набора стандартных электрических сигналов: переключательных режимов, кусочно-постоянных, прямоугольных, треугольных, сложной формы, включая различные нерегулярные меандры. Выведен большой объём графиков для аппроксимаций этих сигналов, проанализированы ошибки приближений, вычислены количественные характеристики ошибок, среднеквадратичные и равномерные.

Кроме того, при обосновании и применениях данного подхода большую роль играют неравенства для специальных функций [13-15]. Представляется также перспективным использование данного метода при изучении дифференциальных уравнений Больцмана, а также в теории операторов преобразования [8-12].

Литература

1. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Science, Springer. – 2011. – 2(173). – P.131-140.
2. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations / Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys and Monographs, 2007. – 349 p.
3. Минин Л.А., Ситник С.М. Неравенства для третьей тета-функции Якоби // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ). Тезисы докладов международной конференции / Минск, 2009. – С.111.
4. Журавлев М.В., Минин Л.А. Ситник С.М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – 2009. – 13(68); 17/2. – P.89-99.
5. Ситник С.М., Тимашов А.С. Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2013. – 2 (56). – С.90-94.
6. Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Ya., Sitnik S.M. On Evaluation of Riesz Constants for Systems of Shifted Gaussians // arXiv:1308.2649. – 2013. – 33 p.
7. Тимашов А.С. Математическое моделирование и численный анализ в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2013. – 9 (4). – С. 112-115.
8. Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи // Доклады Академии Наук СССР. – 1991. – 320(6). – С.1326-1330.
9. Ситник С.М. Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина-Пуассона // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – 2010. – 5(76); 18. – С.135-153.
10. Ситник С.М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости // Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО АН СССР. – 1990. – 44 с.
11. Ситник С.М. Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений // Вестник Самарского Государственного Университета (СамГУ) — Естественнонаучная серия. – 2008. – 8/1 (67). – С.237-248.
12. Ситник С.М. О представлении в интегральном виде решений одного дифференциального уравнения с особенностями в коэффициентах // Владикавказский математический журнал. – 2010. – 12 (4). – С.73-78.
13. Sitnik S.M. Inequalities for Bessel functions // Dokl. Math. – 1995. – 51(1). – P.25-28.
14. Karp D., Savenkova A., Sitnik S.M. Series expansions for the third incomplete elliptic integral via partial fraction decompositions // Journal of Computational and Applied Mathematics. Elsevier, Amsterdam. – 2007. – 207(2). – P.331-337.
15. Sitnik S.M. Generalized Young and Cauchy–Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey // arXiv:1012.3864. – 2010. – 51 p.

NUMERICAL SOLUTION OF FINITE-DIMENSION PROBLEM OF QUADRATIC EXPONENTIAL INTERPOLATION

S.M. Sitnik, A.S. Timashov

Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Patriotov Av. 53, Voronezh, 394065, Russia,
e-mail: mathsms@yandex.ru

Abstract. Approximations of functions using integer shifts of Gaussians — quadratic exponentials are studied. It is proposed the method to find coefficients of node functions by solving linear systems of equations. Results with known ones are compared. They may be applicable to signal transfer theory.

Key words: quadratic exponentials, Gauss functions, interpolation, signals.