MSC 58J10, 58J20, 47F05, 58J40

К ТЕОРИИ СПЕКТРА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ ПО ПЕРЕМЕННОЙ t

В.В. Корниенко, Д.В. Корниенко, О.В. Алексеева

Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина,
ул. Коммунаров, 28, Елец, 399770, Россия, e-mail: o.v.alexeeva@gmail.com, wk1953@mail.ru

Аннотация. Для замкнутых дифференциальных операторов $L : \mathcal{H}_{t,x} \to \mathcal{H}_{t,x}$, порождаемых задачей Дирихле для эллиптических систем второго порядка, изучена структура их спектров. Доказано, что $C\sigma L = R\sigma L = \varnothing$ и точечный спектр $P\sigma L$ располагается в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} z \leqslant 0$) комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В случае эллиптической системы без младших членов собственные вектор-функции оператора L образуют ортогональный базис. В случае эллиптической системы с младшими членами вектор-функции оператора L образуют базис Рисса, не являющимся ортогональным в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{t,x}$.

Ключевые слова: эллиптические системы, граничные задачи, замкнутые операторы, спектр, ортогональный базис, базис Рисса.

Работа посвящена сравнительному изучению и описанию свойств спектра дифференциальных операторов, порождённых задачей Дирихле для эллиптической системы (1) без «младших членов»

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \lambda u^1 + f^1, \\ \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} = \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \tag{1}$$

и для эллиптической системы (2) с «младшими членами», по переменной t

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u^1}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \lambda u^1 + f^1, \\ \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u^2}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} = \lambda u^2 + f^2, \end{cases} \tag{2}$$

рассматриваемых в замыкании $V_{t,x}$ ограниченной области $\Omega_{t,x} = (0;\pi)^2$ евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{t,x}$.

Присоединив к системам уравнений (1) и (2) условие Дирихле

$$u\big|_{\partial\Omega_{t,x}} = 0\,, \tag{3}$$

получим две граничные задачи: задачу (1), (3) и задачу (2), (3).

Для системы Коши-Римана и более общих, так называемых симметричных и несимметричных систем, имеется ряд глубоких результатов, относящихся к описанию правильных граничных условий [1].

Описанию регулярных граничных задач для более общих систем уравнений первого порядка по выделенной переменной t при числе переменных более двух посвящена работа [2]. Исследованию свойств задачи Дирихле для 2×2 — эллиптических систем посвящена работа [3]; сильно и усиленно эллиптические системы изучались в работах [4], [5] соответственно. Однако, спектральные свойства этих граничных задач и граничных задач иного типа при числе переменных больше двух почти не изучены. Элементы спектральной теории замкнутых операторов подробно изложены в книгах [6], [7]. Спектральные свойства задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений изучались в работах [8], [9], [10], [11].

Также, как и в работах [9], [10], системы дифференциальных уравнений (2) и (3) для удобства будем называть эллиптическими системами первого типа. Эллиптической системой второго типа с младшими членами в данном случае будет система вида

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u^1}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} & = & \lambda u^1 + f^1, \\ \dfrac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u^2}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} & = & \lambda u^2 + f^2. \end{array} \right. \tag{4}$$

Отметим, что система (4) равносильна системе (2) (для $\lambda = 0$) в следующем смысле: после умножения первого уравнения системы (2) на (-1) и формальной замены $(-f^1)$ на f^1 (в силу произвольности правой части), получаем систему (4). Эти рассуждения наводят на мысль о совпадении свойств разрешимости граничных задач для данных систем безотносительно к условиям, определяющим граничную задачу. Однако, исследования в случае эллиптических систем первого порядка показывают, что спектральные свойства рассматриваемых дифференциальных операторов различны; они в некотором смысле аналогичны тем отличиям, которые проявились при сопоставлении слабой иррегулярности сильной в работе [12], а также при изучении эллиптических систем в [8]. Обозначим символами $e_i = (\delta_i^1 \; \delta_i^2)^{\mathrm{T}}$, $i = 1, 2$; ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}_2^2$ вектор-столбцов, а через $\mathcal{U}_2^2$— унитарное пространство элементов $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$; $u^k \in \mathbb{C}$; $k = 1, 2$; со скалярным произведением $(u, v; \mathcal{U}_2^2) = u^1 \overline{v^1} + u^2 \overline{v^2}$. Пусть $\mathcal{H}_{t,x}^2 = \mathcal{L}_2^2 (V_{t,x})$ – гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций $u : V_{t,x} \to \mathbb{C}^2$, норма в котором задаётся формулой

$$\left\| u; \mathcal{H}_{t,x}^2 \right\|^2 = \iint\limits_{V_{t,x}} \left\| u(\tau, \xi); \mathcal{U}_2^2 \right\|^2 \, d\tau \, d\xi.$$

Пусть также $\mathfrak{D}$ – линейное многообразие гладких комплекснозначных вектор-функций$u = u(t, x)$, принадлежащих классу $\mathbb{C}\left(\overline{\Omega}_{t,x}\right) \cap \mathbb{C}^{(2)}(\Omega)$ и удовлетворяющих условиям (3). Опишем вначале спектральные свойства эллиптической системы первого типа без младших членов.

Эллиптическая система без младших членов. Обозначая символом $\widetilde{L}$ оператор, областью определения которого является $\mathfrak{D}$, а множество значений определяется правой частью (1), получаем эллиптический дифференциальный оператор. Этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}_{t,x}^2$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что замкнутый оператор

$L : \mathcal{H}^2_{t,x} \to \mathcal{H}^2_{t,x}$ порождён задачей (1), (3). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций. Говоря о спектре замкнутого оператора, мы следуем терминологии, принятой в монографиях [6, с. 25], [13, с. 620]. Резольвентное множество, спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора L обозначим символами ρL, σL, $P\sigma L$, $C\sigma L$ и $R\sigma L$, соответственно. Имеет место [11] следующая теорема.

Теорема 1. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей* (1), (3), *состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = -k^2 + i(-1)^m s^2; \quad m = 1, 2; \quad k \in \mathbb{N}; \quad s \in \mathbb{N}\,. \tag{5}$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (5), *представима в виде*

$$u_{m,k,s}(t,x) = \left(ie_1 + (-1)^{m+1} e_2\right) \sin(kt) \sin(sx)\,.$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t,x) :\ m = 1, 2;\ k \in \mathbb{N};\ s \in \mathbb{N}\}$ собственных вектор-функции оператора L образует ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$.

Эллиптическая система с младшими членами. Также, как и в случае эллиптической системы без младших членов обозначим символом $\widetilde{L}$ оператор, областью определения которого является $\mathfrak{D}$, а множество значений определяется правой частью (2), получаем эллиптический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что замкнутый оператор $L : \mathcal{H}^2_{t,x} \to \mathcal{H}^2_{t,x}$ порождён задачей (2), (3). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций.

Теорема 2. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей* (2), (3) *состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = -k^2 + i(-1)^m s^2 - \frac{1}{4}\,. \tag{6}$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (6), *представима в виде*

$$u_{m,k,s}(t,x) = \left(e_1 - i(-1)^m e_2\right) e^{-\frac{t}{2}} \sin(kt) \sin(sx)\ .$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t,x) : m = 1, 2;\ k \in \mathbb{N};\ s \in \mathbb{N}\}$ собственных вектор-функций оператора L образует базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$.

□ Достаточно заметить, что последовательность $\{u_{m,k,s}(t) :\ m = 1, 2;\ k \in \mathbb{N}\}$ вектор-функций

$$u_{m,k,s}(t) = \left(e_1 - i(-1)^m e_2\right) \sin(kt)$$

является полной и ортогональной в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_t^2 = \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}_t$, $\mathcal{H}_t = \mathcal{L}_2[0,\pi]$, и воспользоваться, доказанным в [9], представлением $\mathcal{H}_{t,x}^2$ в виде тензорного произведения гильбертовых пространств $\mathcal{H}_t^2$ и $\mathcal{H}_x$, то есть формулой $\mathcal{H}_{t,x}^2 = \mathcal{H}_t^2 \otimes \mathcal{H}_x$, где $\mathcal{H}_x = \mathcal{L}_2[0,\pi]$. ■

Литература

1. Дезин А.А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. – 1959. – XIV, вып. 3 (87). – С.21-73.
2. Романко В.К. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Доклады АН СССР. – 1986. – 286, №1. – С.47-50.
3. Бицадзе А.В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. – 1948. – 3, № 6. – С.211-212.
4. Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сборник. – 1951. – 29, (71), вып. 4. – С.615-676.
5. Солдатов А.П. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2003. – 39, №5. – С.674-686.
6. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач / М.: Наука, 1980. – 207 с.
7. Качмаж С. Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов / М.: Гос.из-во физ.-мат. литературы, 1958. – 508 с.
8. Корниенко Д.В. О спектральных задачах для линейных систем дифференциально-операторных уравнений // Вестник Елецкого госуниверситета им. И.А. Бунина. Серия «Математика, физика» / Елец: ЕГУ им. И.А.Бунина. – 2004. – Вып.5. – С.71-78.
9. Корниенко Д.В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42, №1. – С.91-100.
10. Корниенко Д.В. О спектре задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42, №8. – С.1063-1071.
11. Алексеева О.В О спектре задачи Дирихле для двух эллиптических систем // Научные ведомости БелГУ. Математика Физика. – 2010. – №17(88). – Вып.20. – С.5-9.
12. Дезин А.А. О слабой и сильной иррегулярности // Дифференц. уравнения. – 1981. – 17, №10. – С.1851-1858.
13. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, Т.1. Общая теория / М.: И.Л. – 1962. – 896 с.

SPECTRUM THEORY OF DIRICHLET's PROBLEM FOR ELLIPTIC SYSTEMS OF SECOND ORDER WITH JUNIOR TERMS OF VARIABLE t

V.V. Kornienko, D.V. Kornienko, O.V. Alexeeva

Eletz State University I.A. Bunin,
Kommunarov St., 28, Eletz, 399770, Russia, e-mail: o.v.alexeeva@gmail.com, wk1953@mail.ru

Abstract. For closed differential operators $L : \mathcal{H}_{t,x} \to \mathcal{H}_{t,x}$, generated by Dirichlet's problem of second order elliptic systems, the spectrum structure is studied. It is proved that $C\sigma L = R\sigma L = \varnothing$ and the point spectrum $P\sigma L$ is lied in left-side ($\mathrm{Re}\, z \leqslant 0$) of complex plane $\mathbb{C}$. In the case of elliptic system without junior terms, eigen-vector-functions of the operator L form the orthogonal basis. In the case of elliptic system with junior terms eigen-vector-functions of the operator L form the Riss basis being not orthogonal in the Hilbert space $\mathcal{H}_{t,x}$.

Key words: elliptic systems, boundary problems, closed operators, spectrum, orthogonal basis, Riesz' basis.