МАТЕМАТИКА

MSC 37J05

О КЛАССЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ МАТРИЦ

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Алгебраическое свойство, которое является характеристическим для класса матриц четной размерности, называемые в работе *гамильтоновыми*, обобщается таким образом, что это обобщение становится характеристическим свойством для более широкого класса матриц четной размерности, которые получаются из гамильтоновых матриц посредством произвольных ортогональных преобразований. Это свойство гарантирует наличие *симметричного спектрального разложения* у матриц этого класса.

Ключевые слова: линейные гамильтоновы системы, гамильтоновы матрицы, ортогональное преобразование, симплектическая матрица.

Введение. В предыдущих публикациях [1-5] мы ввели понятие гамильтоновой матрицы. Каждая такая матрица над $\mathbb{R}$ имеет четную размерность и является генератором сдвига по времени линейной автономной гамильтоновой системы. Класс гамильтоновых матриц $\mathcal{G}$ фиксированной размерности $2n$, $n \in \mathbb{N}$ описывается формулой

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^{\mathrm{T}} & -\mathcal{C} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где матрицы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ имеют размерность n и $\mathcal{A}^{\mathrm{T}} = \mathcal{A}$, $\mathcal{C}^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}$. Гамильтоновы матрицы при любой фиксированной размерности характеризуются алгебраическим соотношением

$$\mathcal{J}\mathcal{G}\mathcal{J} = \mathcal{G}^{\mathrm{T}},$$

где

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ -\mathcal{E} & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

– симплектическая матрица, у которой блоки $\mathcal{E}$ размерности n являются единичными матрицами. А именно, справедливо утверждение

Теорема 1. *Для того, чтобы матрица $\mathcal{G}$ имела вид (1) необходимо и достаточно чтобы она удовлетворяла соотношению*

$$\mathcal{J}\mathcal{G}\mathcal{J}^T = -\mathcal{G}^T, \qquad (3)$$

где $2n \times 2n$-матрица $\mathcal{J}$ имеет блочный вид (2)

$\square$ Представим $2n \times 2n$-матрицу $\mathcal{G}$ в следующем виде

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{G}_{ij}$, $i, j = 1, 2$ – произвольные $n \times n$-матрицы. Тогда

$$\mathcal{J}\mathcal{G}\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ -\mathcal{E} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ -\mathcal{E} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{G}_{22} & \mathcal{G}_{21} \\ \mathcal{G}_{12} & -\mathcal{G}_{11} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\mathcal{G}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{11}^{\mathrm{T}} & \mathcal{G}_{21}^{\mathrm{T}} \\ \mathcal{G}_{12}^{\mathrm{T}} & \mathcal{G}_{22}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

то, сравнивая одноименные матричные элементы согласно равенству (3), получим равенства

$$\mathcal{G}_{11}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{G}_{22}\,, \qquad \mathcal{G}_{12}^{\mathrm{T}} = \mathcal{G}_{12}\,, \qquad \mathcal{G}_{21}^{\mathrm{T}} = \mathcal{G}_{21}\,,$$

которые являются необходимым и достаточным условием для того, чтобы выполнялось (3). После этого положим $\mathcal{G}_{22} = \mathcal{B}$, $\mathcal{G}_{21} = \mathcal{A}$, $\mathcal{G}_{12} = -\mathcal{C}$. $\blacksquare$

Совершенно ясно, однако, что самое замечательное свойство гамильтоновых матриц, состоящее в том, что у каждой из них множество собственных значений симметрично относительно нуля, сохраняется, очевидным образом, для некоторого более широкого класса матриц $\mathcal{F}$ четной размерности. А именно, таким свойством обладают все матрицы, каждая из которых получается из какой-либо гамильтоновой матрицы $\mathcal{G}$ посредством преобразования $\mathcal{U}\mathcal{G}\mathcal{U}^{\mathrm{T}} = \mathcal{F}$ на основе некоторой ортогональной матрицы $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}\mathcal{U}^{\mathrm{T}} = \mathcal{U}^{\mathrm{T}}\mathcal{U} = \mathbf{1}$. В связи с этим, введем для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ класс $\mathfrak{G}_n$ всех матриц размерности $2n$, получаемых таким образом. В этой работе мы расширим понятие гамильтоновой матрицы и будем использовать этот термин по отношению к матрицам класса $\mathfrak{G}_n$. Генераторы же $\mathcal{G}$ линейных автономных гамильтоновых систем мы будем называть гамильтоновыми матрицами в *канонической форме*. Как уже было сказано выше, матрицы класса $\mathfrak{G}_n$ обладают, также как и канонические гамильтоновы матрицы $\mathcal{G}$, симметричным спектром. Это связано с тем, что для любой матрицы $\mathcal{F} \in \mathfrak{G}_n$ корни уравнения $\det(x \cdot \mathbf{1} - \mathcal{F}) = 0$ совпадают с корнями уравнения $\det(x \cdot \mathbf{1} - \mathcal{G}) = 0$, если $\mathcal{U}\mathcal{G}\mathcal{U}^{\mathrm{T}} = \mathcal{F}$.

Введем теперь в рассмотрение класс $\bar{\mathfrak{G}}_n$ матриц $\mathcal{F}$ размерности $2n$ таких, что для каждой из них и любой $2n \times 2n$-матрицы $\mathcal{I}$ такой, что $\mathcal{I}^2 = -\mathbf{1}$, $\mathcal{I}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{I}$ имеет место алгебраическое тождество $\mathcal{I}\mathcal{F}\mathcal{I}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{F}^{\mathrm{T}}$, аналогичное (3). Тогда для каждой матрицы этого класса выполняется последовательность тождеств

$$\det(x \cdot \mathbf{1} - \mathcal{F}) = \det \mathcal{I}^2(x \cdot \mathbf{1} - \mathcal{F}) = \det \mathcal{I}(x \cdot \mathbf{1} - \mathcal{F})\mathcal{I} = \det(x \cdot (-\mathbf{1}) - \mathcal{I}\mathcal{F}\mathcal{I}) =$$

$$= \det(x \cdot \mathbf{1} + \mathcal{F}^{\mathrm{T}}) = \det(x \cdot \mathbf{1} + \mathcal{F})\,,$$

которое показывает, что матрицы класса $\bar{\mathfrak{G}}_n$ также обладают симметричным множеством собственных значений. Тогда, естественным образом, возникает вопрос о связи классов $\bar{\mathfrak{G}}_n$ и $\mathfrak{G}_n$. Целью настоящей публикации является доказательство их совпадения. Основой этого доказательства является следующая

Теорема 2. *Множество вещественных $2n\times 2n$-матриц $\mathfrak{I}$, удовлетворяющих условиям $\mathfrak{I}^{\mathrm{T}} = -\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}^2 = -\mathbf{1}$, состоит из матриц, ортогонально эквивалентных матрице $\mathcal{J}$, то есть*

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{U}\mathcal{J}\mathfrak{U}^{\mathrm{T}}\,, \qquad \mathfrak{U}\mathfrak{U}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{U}^{\mathrm{T}}\mathfrak{U} = \mathbf{1}\,.$$

□ Доказательство состоит из нескольких пунктов.

I. Обозначим посредством $\mathfrak{S}$ класс матриц $\mathfrak{I}$, указанных в условии теоремы. Рассмотрим произвольную матрицу $\mathfrak{I}$. Так как она обладает свойством $\mathfrak{I}^{\mathrm{T}} = -\mathfrak{I}$, то, воспользовавшись четностью степени полинома $R_I(\lambda) \equiv \det(\lambda\cdot\mathbf{1} - \mathfrak{I})$, запишем

$$R_I(\lambda) = \det(\lambda\cdot\mathbf{1} - \mathfrak{I})^{\mathrm{T}} = \det(\lambda\cdot\mathbf{1} - \mathfrak{I}^{\mathrm{T}}) = \det(\lambda\cdot\mathbf{1} + \mathfrak{I}) =$$

$$= \det(-1)((-\lambda)\cdot\mathbf{1} - \mathfrak{I}^{\mathrm{T}}) = R_I(-\lambda)\,.$$

Таким образом, полином $R_I(\lambda)$ является четной функцией.

Далее, так как $\mathfrak{I}^2 = -\mathbf{1}$, то все ее собственные числа μ_k обладают свойством $\mu_k^2 = -1$. Кроме того, антисимметричность матрицы $\mathfrak{I}$ влечет приводимость ее к диагональному виду посредством некоторого преобразования $\mathfrak{U}\mathfrak{I}\mathfrak{U}^{-1}$ на основе унитарной (вообще говоря, комплекснозначной) матрицы $\mathfrak{U}$. Следовательно, матрица $\mathfrak{I}$ имеет полный набор собственных чисел μ_k, $k = 1 \div 2n$ и все эти числа равны либо $(+i)$, либо $(-i)$. Так как след матрицы $\mathfrak{I}$ равен нулю, то число собственных числе, равных $(+i)$, совпадает с числом собственных чисел, равных $(-i)$. Все диагональные матрицы описанного типа ортогонально эквивалентны и, следовательно, – унитарно эквивалентны, так как все эти матрицы отличаются только нумерацией собственных чисел (одномерных собственных подпространств), а изменение нумерации у векторов базиса осуществляется преобразованием на основе ортогональной матрицы.

В этих рассуждениях матрица $\mathfrak{I}$ произвольна. Поэтому из них следует, что все матрицы $\mathfrak{I}$, обладающие свойствами, указанными в условии теоремы, унитарно эквивалентны. Следовательно, так как симплектическая матрица $\mathcal{J}$ принадлежит классу $\mathfrak{S}$, то всякая матрица $\mathfrak{I}$ из $\mathfrak{S}$ унитарно эквивалентна ей, то есть для каждой матрицы $\mathfrak{I}$ имеется унитарная матрица $\mathfrak{U}$ такая, что $\mathfrak{I} = \mathfrak{U}\mathcal{J}\mathfrak{U}^{-1}$.

II. Для доказательства утверждения теоремы нужно доказать, что матрица $\mathfrak{U}$ может быть выбрана чисто вещественной. В этом случае такая унитарная матрица является ортогональной по определению. Так как матрица $i\mathfrak{I}$ является самосопряженной $(i\mathfrak{I})^*_{jk} = -i\mathfrak{I}_{kj} = -i(-\mathfrak{I}_{jk}) = i\mathfrak{I}_{jk}$,[1)] то для нее справедливо *спектральное разложение* по ортопроекторам

$$i\mathfrak{I}_{jk} = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_l \Theta^{(l)}_{jk}$$

с вещественными собственными числами $\alpha_k = -i\mu_k$, $\alpha_k^2 = 1$, $k = 1\div 2m$, где матрицы $\Theta^{(l)}$ являются одномерными ортопроекторами, то есть $\Theta^{(l)}\Theta^{(m)} = \delta_{lm}\Theta^{(m)}$ и $\Theta^{(l)*}_{jk} = \Theta^{(l)}_k j$, $l, m = 1 \div 2n$.

[1]Здесь * обозначает комплексное сопряжение.

Отделим в матричных элементах каждого из ортопроекторов реальную и мнимую части: $\Theta^{(l)} = \Lambda^{(l)} + i\Upsilon^{(l)}$, где $\Lambda^{(l)}$ и $\Upsilon^{(l)}$, $l = 1 \div 2n$ – вещественные матрицы. Тогда для каждого из проекторов имеет место

$$\Theta^{(l)2} = \Lambda^{(l)2} - \Upsilon^{(l)2} + i\Big(\Lambda^{(l)}\Upsilon^{(l)} + \Upsilon^{(l)}\Lambda^{(l)}\Big)$$

и, одновременно,

$$\Theta^{(l)2} = \Theta^{(l)} = \Lambda^{(l)} + i\Upsilon^{(l)}\,.$$

Сравнивая эти два равенства, имеем

$$\big(\Lambda^{(l)}\big)^2 - \big(\Upsilon^{(l)}\big)^2 = \Lambda^{(l)}\,, \qquad \Lambda^{(l)}\Upsilon^{(l)} + \Upsilon^{(l)}\Lambda^{(l)} = \Upsilon^{(l)} \tag{4}$$

для всех $l = 1 \div 2n$. Кроме того, вследствие самосопряженности ортопроекторов, имеем

$$\big(\Theta^{(l)}_{jk}\big)^* = \Lambda^{(l)}_{jk} - i\Upsilon^{(l)}_{jk} = \Theta^{(l)}_{kj} = \Lambda^{(l)}_{kj} + i\Upsilon^{(l)}_{kj}\,.$$

Поэтому, для всех $l = 1 \div 2n$, имеет место

$$\Lambda^{(l)}_{jk} = \Lambda^{(l)}_{kj}\,, \qquad \Upsilon^{(l)}_{jk} = -\Upsilon^{(l)}_{kj}\,. \tag{5}$$

III. Так как ортопроекторы $\Lambda^{(l)}$, $l = 1 \div 2n$ спектрального разложения матрицы $i\mathfrak{J}$ одномерны, то для любого $\Theta^{(m)}$ из них имеет место $\Theta^{(m)}\mathfrak{J} = i\alpha_m\mathfrak{J}$. Отделяя в этом соотношении реальной и мнимой частей и пользуясь вещественностью собственного числа α_m, получаем

$$\Lambda^{(m)}\mathfrak{J} = -\alpha_m\Upsilon^{(m)}\,, \qquad \Upsilon^{(m)}\mathfrak{J} = \alpha_m\Lambda^{(m)}\,. \tag{6}$$

Транспонируем обе части первого из этих равенств

$$\mathfrak{J}^{\mathrm{T}}\big(\Lambda^{(m)}\big)^{\mathrm{T}} = -\alpha_m\big(\Upsilon^{(m)}\big)^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

и воспользуется $\mathfrak{J}^{\mathrm{T}} = -\mathfrak{J}$ и равенствами (5): $\Lambda^{(m)\mathrm{T}} = \Lambda^{(m)}$, $\big(\Upsilon^{(m)}\big)^{\mathrm{T}} = -\Upsilon^{(m)}$. Подстановка этих соотношений в (7) и сравнение с первым из равенств (6) показывают, что имеет место перестановочность $\Lambda^{(m)}\mathfrak{J} = \mathfrak{J}\Lambda^{(m)}$. Тогда $\big(\Upsilon^{(m)}\big)^2 = \big(\Lambda^{(m)}\mathfrak{J}\big)^2 = \big(\Lambda^{(m)}\big)^2\mathfrak{J}^2 = -\big(\Lambda^{(m)}\big)^2$. Поэтому из (4) находим

$$\Lambda^{(m)} = \big(\Lambda^{(m)}\big)^2 - \big(\Upsilon^{(m)}\big)^2 = 2\big(\Lambda^{(m)}\big)^2\,.$$

Отсюда следует, что матрица $2\Lambda^{(m)}$ идемпотентна $\big(2\Lambda^{(m)}\big)^2 = 2\big(2\Lambda^{(m)}\big)$. Если при этом учесть, что она симметрична, то получаем, что $2\Lambda^{(m)}$ является ортопроектором при каждом $m = 1 \div 2n$.

IV. Рассмотрим снова спектральное разложение фиксированной матрицы $\mathfrak{J}$, записанное в следующей форме:

$$\mathfrak{J} = \sum_{k=1}^{2n} i\alpha_k\Big(\Lambda^{(k)} - i\alpha_k\mathfrak{J}\Lambda^{(k)}\Big) = \sum_{k=1}^{2m} i\alpha_k\Lambda^{(k)} + \mathfrak{J}\sum_{k=1}^{2n}\Lambda^{(k)}\,. \tag{8}$$

Так как $\Theta^{(k)}$, $k = 1 \div 2n$ – полный набор одномерных взаимно ортогональных проекторов, $\Theta^{(j)}\Theta^{(k)} = \delta_{jk}$, то, подставляя при $j \neq k$ разложения каждого из этих ортопроекторов на реальную и мнимую части, имеем

$$0 = \Lambda^{(j)}\Big(\mathbf{1} - i\alpha_j\mathfrak{I}\Big)\Big(\mathbf{1} - i\alpha_k\mathfrak{I}\Big)\Lambda^{(k)} = \Lambda^{(j)}\Big((1 + \alpha_j\alpha_k)\cdot\mathbf{1} - i(\alpha_j + \alpha_k)\mathfrak{I}\Big)\Lambda^{(k)} .$$

Отсюда следует при $\alpha_j = \alpha_k$, что $\Lambda^{(j)}\Lambda^{(k)} = \mathbf{0}$. Точно также, используя самосопряженность ортопроекторов $\Theta^{(k)}$, $k = 1 \div 2n$, из соотношения $\Theta^{(j)}\big(\Theta^{(k)}\big)^+ = 0$ при $j \neq k$ (где $+$ – знак эрмитовского сопряжения), имеем отделяя в каждом из ортопроекторов реальную и мнимую части,

$$0 = \Lambda^{(j)}\Big(\mathbf{1} - i\alpha_j\mathfrak{I}\Big)\Big(\mathbf{1} + i\alpha_k\mathfrak{I}\Big)\Lambda^{(k)} = \Lambda^{(j)}\Big((1 - \alpha_j\alpha_k)\cdot\mathbf{1} - i(\alpha_j - \alpha_k)\mathfrak{I}\Big)\Lambda^{(k)} .$$

Отсюда следует при $\alpha_j = -\alpha_k$, что $\Lambda^{(j)}\Lambda^{(k)} = \mathbf{0}$. Итак, в любом случае $\Lambda^{(j)}\Lambda^{(k)} = \mathbf{0}$ при $j \neq k$. Поэтому имеется $2n$ взаимноортогональных ортопроекторов $(2\Lambda^{(k)})$, $k = 1 \div 2n$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{2n}\Lambda^{(k)} = \frac{1}{2}\mathbf{1} .$$

Подставляя значение этой суммы в (8), находим разложение матрицы $\mathfrak{I}$ по вещественным ортопроекторам:

$$\mathfrak{I} = i\sum_{k=1}^{2n}\alpha_k(2\Lambda^{(k)}) . \tag{9}$$

В частности, такое разложение имеет место, с соответствующим набором ортопроекторов, для матрицы $\mathcal{J}$.

VI. Соотношение (9) показывает, что между всеми возможными матрицами $\mathfrak{I}$, удовлетворяющими условиям теоремы, и полными упорядоченными наборами длины $2n$ одномерных вещественных взаимно ортогональных ортопроекторов имеется взаимнооднозначное соответствие (число чисел α_k, равных 1 и равных -1 совпадает). Однако, каждый такой упорядоченный набор переводится в любой другой упорядоченный набор посредством ортогонального преобразования. Следовательно, зафиксировав набор вещественных ортопроекторов $2\Lambda^{(k)}$, $k = 1 \div 2n$, соответствующий, согласно (10), матрице $\mathfrak{I}$ и набор вещественных ортопроекторов $2\Lambda_0^{(k)}$, $k = 1 \div 2n$, соответствующий матрице $\mathcal{J}$,

$$\mathcal{J} = i\sum_{k=1}^{2n}\alpha_k(2\Lambda_0^{(k)}) , \tag{10}$$

найдем ортогональную матрицу $\mathfrak{U}$ такую, что $\mathfrak{U}\Lambda_0^{(k)}\mathfrak{U}^{\mathrm{T}} = \Lambda^{(k)}$, $k = 1 \div 2n$. Подставляя эти соотношения в (10) и сравнивая с (9), получаем $\mathfrak{I} = \mathfrak{U}\mathcal{J}\mathfrak{U}^{\mathrm{T}}$. ■

Следствием доказанной теоремы является утверждение о совпадении классов матриц $\mathfrak{G}_n$ и $\bar{\mathfrak{G}}_n$.

Теорема 3. *Для того, чтобы $2n\times 2n$-матрица $\mathfrak{F}$ приводилась посредством преобразования $\mathfrak{U}\mathfrak{F}\mathfrak{U}^{\mathrm{T}}$ к матрице $\mathfrak{G}$ на основе ортогональной матрицы $\mathfrak{U}$, необходимо и достаточно* *чтобы существовала матрица* $\mathcal{I}$ *такая, что* $\mathcal{I}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{I}$, $\mathcal{I}^2 = -\mathbf{1}$, *для которой имеет место* $\mathcal{I}\mathcal{F}\mathcal{I}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{F}^{\mathrm{T}}$.

□ Пусть существует $2n \times 2n$-матрица $\mathcal{I}$, обладающая свойствами $\mathcal{I}^T = -\mathcal{I}$, $\mathcal{I}^2 = -\mathbf{1}$, и такая, что $\mathcal{I}\mathcal{F}\mathcal{I}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{F}^{\mathrm{T}}$. По теореме 2, найдется ортогональная матрица $\mathcal{W}$, посредством которой матрица $\mathcal{I}$ приводится к симплектической матрице $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J} = \mathcal{W}^{\mathrm{T}}\mathcal{I}\mathcal{W},$$

где $\mathcal{W}\mathcal{W}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}$. Следовательно, равенство $\mathcal{I}\mathcal{F}\mathcal{I}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{F}^{\mathrm{T}}$ можно записать в виде

$$(\mathcal{W}^{\mathrm{T}}\mathcal{I}\mathcal{W})(\mathcal{W}^{\mathrm{T}}\mathcal{F}\mathcal{W})(\mathcal{W}^{\mathrm{T}}\mathcal{I}^{\mathrm{T}}\mathcal{W}) = -\mathcal{W}^{\mathrm{T}}\mathcal{F}^{\mathrm{T}}\mathcal{W},$$

что эквивалентно

$$\mathcal{J}(\mathcal{W}^{\mathrm{T}}\mathcal{F}\mathcal{W})\mathcal{J}^{\mathrm{T}} = -(\mathcal{W}^{\mathrm{T}}\mathcal{F}\mathcal{W})^{\mathrm{T}}.$$

Согласно теореме 1 матрица $\mathcal{W}^T\mathcal{F}\mathcal{W}$ является канонической гамильтоновой матрицей $\mathcal{G}$. Следовательно, положив $\mathcal{U} = \mathcal{W}^{\mathrm{T}}$, мы докажем тем самым достаточность условия в утверждении теоремы.

Обратно, пусть имеется матрица $\mathcal{F}$ класса $\mathfrak{G}_n$. Тогда $\mathcal{U}^T\mathcal{F}\mathcal{U} = \mathcal{G}$, и, на основании теоремы 1, получаем

$$\mathcal{J}(\mathcal{U}^T\mathcal{F}\mathcal{U})\mathcal{J}^T = -(\mathcal{U}^T\mathcal{F}\mathcal{U})^{\mathrm{T}},$$

Домножим слева на $\mathcal{U}$ а с права на $\mathcal{U}^{\mathrm{T}}$. Учитывая, что $\mathcal{U}\mathcal{U}^{\mathrm{T}} = \mathcal{U}^{\mathrm{T}}\mathcal{U} = \mathbf{1}$, получаем

$$(\mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^T)\mathcal{F}(\mathcal{U}\mathcal{J}^T\mathcal{U}^T) = -\mathcal{F}^{\mathrm{T}}.$$

Положим $\mathcal{I} = \mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^{\mathrm{T}}$ так, что имеют место соотношения

$$\mathcal{I}^2 = \mathcal{U}\mathcal{J}(\mathcal{U}^{\mathrm{T}}\mathcal{U})\mathcal{J}\mathcal{U}^{\mathrm{T}} = \mathcal{U}\mathcal{J}^2\mathcal{U}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{1},$$

$$\mathcal{I}^{\mathrm{T}} = (\mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathcal{U}\mathcal{J}^{\mathrm{T}}\mathcal{U}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{I}.$$

Поэтому, окончательно, находим, что $\mathcal{I}\mathcal{F}\mathcal{I}^T = -\mathcal{F}^T$. ■

Следствие. $\mathfrak{G}_n = \bar{\mathfrak{G}}_n$.

Литература

1. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Свойство локальной обратимости гамильтоновых динамических систем // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел» Белгород, 17-21 октября 2011 / С.37-38.
2. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Симметричность спектра линейных гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2011. – 17(112);24. – С.179-180.
3. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Полностью вырожденные линейные гамильтоновы системы // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2012. – 23(142);29. – С.215-218.
4. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Характеризация линейных гамильтоновых систем // Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» 26-31 мая 2013, Белгород / Белгород: Политерра, 2013. – С.180-181.

5. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О спектральном разложении генераторов гамильтоновых систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2013. – 5(148);30. – С.135-141.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / М.: Наука, 1966. – 576 с.

ABOUT CLASS OF HAMILTONIAN MATRICES

Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. Algebraic property that is characteristic for the class of special matrices with arbitrary even dimension which are named the hamiltonian ones, is generalized by such a way that such a generalization is characteristic for more wide class of matrices with even dimension. This class is obtained by means of application of arbitrary orthogonal transformations to each hamiltonian matrix. This algebraic property guarantees the availability of *symmetric spectral decomposition* for matrices of the class pointed out.

Key words: linear hamiltonian systems, hamiltonian matrices, orthogonal transformations, symplectic matrix.