УДК 517.983

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ [1)]

А.В. Глушак, О.А. Покручин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru, pokru4in.oleg@yandex.ru

Аннотация. Устанавливаются свойства решений задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и доказано необходимое условие ее разрешимости.

Ключевые слова: абстрактная задача Коши, уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, операторная функция Бесселя, необходимое условие разрешимости.

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. При $k > 0$ рассмотрим абстрактную задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0\,, \quad u'(0) = 0\,. \tag{2}$$

Случай $k = 0$ подробно рассмотрен в [1]. В этой статье установленно, что задача (1), (2) при $k = 0$ равномерно корректна только тогда, когда оператор A является генератором операторной косинус-функции $C(t)$ или косинус-оператор-функции (КОФ). По поводу терминологии см. [2] и обзорные работы [3], [4]. В этих же работах приводятся необходимые и достаточные условия того, что оператор A является генератором КОФ, которые формулируются в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ оператора A и ее производных.

Задача (1), (2) исследовалась ранее в работе [5], в которой необходимое и достаточное условия разрешимости сформулированы в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda)$ и ее весовых производных. В настоящей работе получено необходимое условие на резольвенту оператора A, которое, в отличие от [5], формулируется в терминах дробной степени резольвенты и ее, как и в случае КОФ, невесовых производных.

Обозначим через $C^n(I, E_0)$ пространство n раз сильно непрерывно дифференцируемых при $t \in I$ функций со значениями в $E_0 \subset E$.

Определение 1. *Решением уравнения (1) называется функция $u(t)$, которая при $t \geq 0$ дважды сильно непрерывно дифференцируема, при $t > 0$ принимает значения, принадлежащие $D(A)$, то есть, $u(t) \in C^2(R_+, E) \cap C(R_+, D(A))$, и удовлетворяет уравнению (1).*

[1]Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 10-01-00276.

Определение 2. *Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если существуют заданная на E коммутирующая с A операторная функция $Y_k(t)$ и числа $M \geq 1$, $\omega \geq 0$, такие, что для любого $u_0 \in D(A)$ функция $Y_k(t)u_0$ является ее единственным решением и при этом*

$$\|Y_k(t)\| \leq M \exp(\omega t)\,, \tag{3}$$

$$\|Y_k'(t)u_0\| \leq M \exp(\omega t)\, \|Au_0\|\ . \tag{4}$$

Функцию $Y_k(t)$ назовем операторной функцией Бесселя (ОФБ) задачи (1), (2), а множество операторов, для которых задача (1), (2) равномерно корректна, обозначим через G_k.

Приведем доказательства некоторых свойств решений задачи (1), (2), которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 1. *Пусть задача (1), (2) равномерно корректна, $A \in G_k$, и $u_0 \in D(A)$. Тогда эта задача равномерно корректна и для $m > k$, то есть $A \in G_m$, при этом соответствующая ОФБ $Y_m(t)$ имеет вид*

$$Y_m(t)u_0 = \frac{2}{B(k/2+1/2, m/2-k/2)} \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^k Y_k(ts)u_0\, ds\,, \tag{5}$$

где $B(a,b)$ – бета-функция Эйлера.

□ Тот факт, что функция $Y_m(t)u_0$ удовлетворяет уравнению

$$u''(t) + \frac{m}{t}u'(t) = Au(t) \tag{6}$$

и начальным условиям (2) мы докажем позже (см. формулу (26)).

Оценки

$$\|Y_m(t)\| \leq M_1 \exp(\omega t)\,,$$

$$\|Y_m'(t)u_0\| \leq M_1 \exp(\omega t)\, \|Au_0\|\,, \quad u_0 \in D(A)$$

для $Y_m(t)$, очевидно, вытекают из (3) и (4).

Доказательство единственности решения задачи (6), (2) будем вести от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два решения задачи (6), (2). Рассмотрим функцию двух переменных $w(t,s) = f\left(Y_k(s)\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right)$, где $f \in E^*$ (E^* – сопряженное пространство), $t, s \geqslant 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{k}{s}\frac{\partial w}{\partial s}\,, \quad t, s > 0 \tag{7}$$

и условиям

$$w(0,s) = \frac{\partial w(0,s)}{\partial t} = 0\,. \tag{8}$$

Задача (7), (8) заменой $t_1 = (t+s)^2/4$, $s_1 = (t-s)^2/4$ сводится (см. [6], §5, п. 3) к задаче, единственность которой в классе дважды непрерывно дифференцируемых при $t, s \geq 0$ функций установлена в [6] (§5, п. 2). Кроме того, требуемое нам утверждение о единственности содержится также в теореме 6.1 работы [7], в которой рассматривается даже более общее уравнение нежели уравнение (7).

Из полученной в [6] явной формулы для решения указанной задачи следует $w(t,s) \equiv 0$. В силу произвольности $f \in E^*$ при $s = 0$ получаем $u_1(t) \equiv u_2(t)$, и единственность решения установлена.

Таким образом, операторная функция $Y_m(t)$ удовлетворяет неравенствам вида (3), (4), а функция $Y_m(t)u_0$ является единственным решением задачи (6), (2), следовательно, задача (6), (2) равномерно корректна. ■

Пусть $K_\nu(z)$ – функция Макдональда или модифицированная функция Бесселя третьего рода порядка ν, в дальнейшем всегда $\nu = (k-1)/2$.

Теорема 2. *Если задача (1), (2) равномерно корректна и* $Re\lambda > \omega$, *то* $\lambda^2 \in \rho(A)$ *и для любого* $x \in E$ *справедливо представление*

$$\lambda^{(1-k)/2} R(\lambda^2)x = \frac{2^{(1-k)/2}}{\Gamma((k+1)/2)} \int_0^\infty K_\nu(\lambda t) t^{(k+1)/2} Y_k(t)x\, dt\,. \tag{9}$$

□ Заметим, что интеграл в правой части (9) можно рассматривать как K-преобразование (или преобразование Мейера) функции $t^{k/2}Y_k(t)x$, а сходимость этого интеграла вытекает из оценки (3) и асимптотического поведения функции $K_\nu(z)$ при $z \to 0$ и $z \to \infty$ (см. [8], с. 217).

Правую часть равенства (9) умноженную на $\lambda^{(k-1)/2}$ обозначим через $Q(\lambda)$ и проверим, что $(\lambda^2 I - A)Q(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda^2 I - A) = I$. Пусть $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ и $x \in D(A)$. Тогда

$$(\lambda^2 I - A)Q(\lambda)x = \frac{\lambda^{2+\nu}}{\Gamma(\nu+1)2^\nu} \int_0^\infty K_\nu(\lambda t) t^{\nu+1} Y_k(t)x\, dt -$$

$$- \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu+1)2^\nu} \int_0^\infty K_\nu(\lambda t) t^{\nu+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{k}{t}\frac{d}{dt} \right) Y_k(t)x\, dt\,. \tag{10}$$

Учитывая экспоненциальный рост ОФБ $Y_k(t)$, интегрированием по частям установим равенство

$$\int_0^\infty K_\nu(\lambda t) t^{\nu+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{k}{t}\frac{d}{dt} \right) Y_k(t)x\, dt =$$

$$= - \int_0^\infty \left(-\nu t^\nu K_\nu(\lambda t) + t^{\nu+1} \frac{d}{dt} K_\nu(\lambda t) \right) Y_k'(t)x\, dt =$$

$$= - \int_0^\infty t^{\nu+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{d}{dt} - \left(\frac{\nu}{t}\right)^2 \right) K_\nu(\lambda t) Y_k(t)x\, dt +$$

$$+ x \lim_{s\to 0} \left(-\nu t^\nu K\nu(\lambda t) + \lambda t^{\nu+1} K_\nu'(\lambda t) \right) =$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty K_\nu(\lambda t) t^{\nu+1} Y_k(t)x\, dt + \lambda^{-\nu} x \lim_{s\to 0} \left(-\nu s^\nu K_\nu(s) + s^{\nu+1} K_\nu'(s) \right)\,. \tag{11}$$

Из (10) и (11) вытекает равенство

$$(\lambda^2 I - A)Q(\lambda)x = \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \lim_{s\to 0} \left(\nu s^\nu K_\nu(s) - s^{\nu+1}K'_\nu(s)\right) . \tag{12}$$

Используя определение функции $K_\nu(t)$, предел в правой части равенства (12) вычисляется, и мы приходим к равенству

$$(\lambda^2 I - A)Q(\lambda)x = x\,, \quad x \in D(A)\,.$$

Поскольку в определении равномерной корректности задачи (1), (2) входит требование коммутирования операторов A и $Y_k(t)$, то равенство $Q(\lambda)(\lambda^2 I - A)x = x$, $x \in D(A)$ доказывается аналогично.

Из оценки (3) вытекает ограниченность оператора $Q(\lambda)$ при $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Таким образом, при $x \in D(A)$ имеем $Q(\lambda)x = (\lambda^2 I - A)^{-1}x$.

Если $x \in E$, то в силу плотности $D(A)$ в E возьмем последовательность $x_n \in D(A)$, такую, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда, по доказанному, при $n \to \infty$ будем иметь

$$(\lambda^2 I - A)Q(\lambda)(x_n - x) \to x - (\lambda^2 I - A)Q(\lambda)\,,$$

и требуемое равенство $Q(\lambda)x = (\lambda^2 I - A)^{-1}x$ для любого $x \in E$ вытекает из замкнутости оператора A. ■

Теорема 3. *Пусть задача (1), (2) равномерно корректна и пусть $Y_k(t)$ – ОФБ для этой задачи. Тогда оператор A является генератором C_0-полугруппы $T(t)$ и для этой полугруппы справедливо представление*

$$T(t)x = \frac{1}{2^k\Gamma((k+1)/2)t^{(k+1)/2}} \int_0^\infty s^k \exp(-s^2/(4t))Y_k(s)x\,ds\,, \quad x \in E\,. \tag{13}$$

□ Проверим, что резольвента $R(\mu)$ оператора A удовлетворяет условиям теоремы Хилле-Иосида (см. [9], с. 68). Из равенства (9) следует, что при $\mu > \omega^2$

$$R^n(\mu)x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\mu^{n-1}}R(\mu, A)x =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}2^{-\nu}}{(n-1)!\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty \frac{d^{n-1}}{d\mu^{n-1}}(\mu^{k/4-1/4}K_\nu(\sqrt{\mu}t))t^{\nu+1}Y_k(t)x\,dt =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}2^{-\nu-n+1}}{(n-1)!\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n-1} (z^\nu K_\nu(z))t^{2n-1}Y_k(t)x\,dt\,,$$

где $z = t\sqrt{\mu}$.

Учитывая известную формулу

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)(z^\nu K_\nu(z)) = (-1)^{n-1}z^{\nu-n+1}K_{\nu-n+1}(z)\,,$$

выведем оценку для $R^n(\mu)x$. Имеем

$$\|R^n(\mu,A)x\| = \frac{1}{2^{n+\nu-1}(n-1)!\Gamma(\nu+1)\mu^{n/2-k/4}}\left\|\int_0^\infty t^{\nu+n}K_{\nu-n+1}(t\sqrt{\mu})Y_k(t)x\,dt\right\| \le$$

$$\le \frac{M\,\|x\|}{2^{n+\nu-1}(n-1)!\Gamma(\nu+1)\mu^{n/2-k/4}}\int_0^\infty t^{\nu+n-1/2}\exp\left((\omega-\sqrt{\mu})t\right)\,dt\,. \tag{14}$$

Вычислив полученный в (14) интеграл, придем к оценке

$$\|R^n(\mu)x\| \le \frac{M_1(k)\Gamma(n+k/2)\,\|x\|}{2^{n+\nu-1}(n-1)!\Gamma(\nu+1)(\sqrt{\mu}-\omega)^{n+k/2}\mu^{n/2-k/4}}\,. \tag{15}$$

С учетом предельного соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{k/2}B(n,k/2)\right) = \Gamma(k/2)\,,$$

из (15) выводим

$$\|R^n(\mu,A)\| \le \frac{M_2(k)}{(4/3)^n B(n,k/2)(\mu-\omega_1)^n} \le \frac{M(k)}{(\mu-\omega_1)^n}\,,\quad \mu>\omega_1=\frac{9\omega^2}{8}\,,\quad M(k)>0\,.$$

Следовательно, в силу теоремы Хилле-Иосиды, оператор A является генератором C_0-полугруппы $T(t)$.

Непосредственной проверкой, используя тот факт, что функция $Y_k(t)x$ удовлетворяет уравнению (1), можно убедиться в том, что правая часть равенства (13) является решением следующей задачи Коши

$$v'(t) = Av(t)\,,\qquad v(0)=x\,,\quad x\in D(A)\,. \tag{16}$$

Действительно,

$$AT(t)x = \frac{1}{2^k\Gamma(k/2+1/2)t^{(k+1)/2}}\int_0^\infty s^k\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)AY_k(s)x\,ds =$$

$$= \frac{1}{2^k\Gamma(k/2+1/2)t^{(k+1)/2}}\int_0^\infty s^k\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\left(Y_k''(s)x+\frac{k}{s}Y_k'(s)x\right)ds =$$

$$= \frac{-1}{2^k\Gamma(k/2+1/2)t^{(k+1)/2}}\int_0^\infty \left(s^k\exp(-s^2/4t)\right)'\,Y_k'(s)x\,ds +$$

$$+\frac{k}{2^k\Gamma(k/2+1/2)t^{(k+1)/2}}\int_0^\infty s^{k-1}\exp(-s^2/4t)Y_k'(s)x\,ds =$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}\Gamma(k/2+1/2)t^{(k+3)/2}}\int_0^\infty s^{k+1}\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)Y_k'(s)x\,ds =$$

$$= -\frac{k+1}{2^{k+1}\Gamma(k/2+1/2)t^{(k+3)/2}}\int_0^\infty s^k\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)Y_k(s)x\,ds+$$

$$+\frac{1}{2^{k+2}\Gamma(k/2+1/2)t^{(k+5)/2}}\int_0^\infty s^{k+2}\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)Y_k(s)x\,ds = T'(t)x\,.$$

Проверим теперь, что $T(t)x$ удовлетворяет условию $T(0)x = x$. После замены переменных в правой части равенства (13) получим

$$T(0)x = \frac{1}{\Gamma((k/2+1/2)}\int_0^\infty \tau^{k/2-1/2}\exp(-\tau)Y_k(0)x\,ds =$$

$$= \frac{x}{\Gamma(k/2+1/2)}\int_0^\infty \tau^{k/2-1/2}\exp(-\tau)d\tau = x\,.$$

Отсюда, в силу теоремы единственности для решения задачи (16), и следует представление (13). ■

Теорема 3 позволяет при нахождении критерия равномерной корректности задачи (1), (2) ограничиться классом операторов, которые являются генераторами C_0-полугрупп $T(t)$. Обозначим этот класс операторов через G.

В работе [10] показано, что если $A \in G$, то при $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ для $\alpha > 0$ существует дробная степень резольвенты $R(\lambda)$, которая имеет вид

$$R^\alpha(\lambda)x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\exp(-\lambda t)T(t)x\,dt\,, \quad x \in E\,. \tag{17}$$

Установим далее необходимое условие равномерной корректности задачи (1), (2).

Теорема 4. *Если задача (1), (2) равномерно корректна и* $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, *то* λ^2 *принадлежит резольвентному множеству* $\rho(A)$ *оператора* A, *для дробной степени резольвенты справедливо представление*

$$R^{1+k/2}(\lambda^2) = \frac{\sqrt{\pi}\;2^{-k}}{\Gamma(k/2+1)\Gamma(k/2+1/2)\lambda}\int_0^\infty s^k\exp(-\lambda s)Y_k(s)\,ds \tag{18}$$

и при этом выполняются оценки

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\lambda R^{1+k/2}\left(\lambda^2\right)\right)\right\| \le \frac{\sqrt{\pi}\;2^{-k}\;M\;\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(k/2+1)\;\Gamma(k/2+1/2)\;(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^{k+n+1}}, \quad n = 0,\;1,\;2,\ldots\,. \tag{19}$$

□ Если задача (1), (2) равномерно корректна и $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, то в теореме 2 установлено, что λ^2 принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A.

Воспользовавшись равенствами (17) и (13), запишем представление

$$R^{1+k/2}(\lambda^2) = \frac{1}{\Gamma(k/2+1)}\int_0^\infty t^{k/2}\exp\left(-\lambda^2 t\right)T(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2^k\Gamma(k/2+1)\Gamma(k/2+1/2)}\int_0^\infty t^{-1/2}\exp(-\lambda^2 t)\left(\int_0^\infty s^k\exp(-s^2/4t)Y_k(s)ds\right)dt =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\;2^{-k}}{\Gamma(k/2+1)\Gamma(k/2+1/2)\lambda}\int_0^\infty s^k\exp(-\lambda s)Y_k(s)\,ds\,. \tag{20}$$

Учитывая оценку (3), из (20) получим

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\lambda R^{1+k/2}\left(\lambda^2\right)\right) \right\| \leq \frac{\sqrt{\pi}\; 2^{-k}}{\Gamma(k/2+1)\Gamma(k/2+1/2)} \int_0^{\infty} s^{k+n} \exp(-\mathrm{Re}\lambda\; s)\, \|Y_k(s)\| \; ds \leq$$

$$\leq \frac{M\sqrt{\pi}\; 2^{-k}}{\Gamma(k/2+1)\Gamma(k/2+1/2)} \int_0^{\infty} s^{k+n} \exp(-\mathrm{Re}\lambda\; s + \omega s) ds =$$

$$= \frac{M\sqrt{\pi}\; 2^{-k}\; \Gamma(k+n+1)}{\Gamma(k/2+1)\Gamma(k/2+1/2)(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^{k+n+1}}\,,$$

что и устанавливает справедливость неравенств (19). ■

В заключение рассмотрим задачу отыскания решения неоднородного уравнения

$$u''(t) + \frac{m}{t}u'(t) + \frac{c}{t^2}u(t) = Au(t) + \frac{c}{t^2}u_0\,, \quad t > 0\,, \tag{21}$$

удовлетворяющего условиям (2), где $A \in G_k$, $m > k$, $c \leq \frac{(m-1)^2}{4}$. Отметим, что при $c = 0$ уравнение (21) превращается в уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Будем искать решение $u(t)$ задачи (21), (2) в виде

$$u(t) = \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^k Q(s) Y_k(ts) u_0 ds$$

аналогичном (5), с подлежащей определению функцией $Q(s)$.

Вычислив $u'(t), u''(t)$ и $Au(t)$, после элементарных преобразований будем иметь

$$u''(t) + \frac{m}{t}u'(t) + \frac{c}{t^2}u(t) - Au(t) = \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^{k+2} Q(s) Y_k''(ts) u_0\; ds +$$

$$+\frac{m}{mt-kt}\left(k\int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-)/2} s^{k-1} Q(s) Y_k'(ts) u_0\; ds + \right.$$

$$\left. +t\int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2} s^k Q(s) Y_k''(ts) u_0\; ds + \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2} s^k Q'(s) Y_k'(ts) u_0\; ds\right) -$$

$$-\int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^k Q(s) Y_k''(ts) u_0\; ds - \frac{k}{t}\int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^{k-1} Q(s) Y_k'(ts) u_0\; ds =$$

$$= \frac{k}{m-k}\int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2} s^k Q(s) A Y_k(ts) u_0 ds - \frac{k}{t}\int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^{k+1} Q(s) Y_k'(ts) u_0 ds +$$

$$+\frac{m}{m-k}\int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2} s^k Q'(s) Y_k'(ts) u_0\; ds = \frac{1}{t}\int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2} s^k Q'(s) Y_k'(ts) u_0\; ds =$$

$$= -\frac{u_0}{t^2}\lim_{s\to 0} s^k Q'(s) - \frac{1}{t^2}\int_0^1 \frac{d}{ds}\left((1-s^2)^{(m-k)/2} s^k Q'(s)\right) Y_k(ts) u_0\; ds\,. \tag{22}$$

Подберем функцию $Q(s)$ так, чтобы

$$\frac{d}{ds}\left((1-s^2)^{(m-k)/2}s^kQ'(s)\right)=c\left(1-s^2\right)^{(m-k-2)/2}s^kQ(s)\,. \tag{23}$$

Легко убедиться, что уравнению (21) удовлетворяет функция

$$Q(s)=\beta\ {}_2F_1\left(p,\ q;(m-k)/2;1-s^2\right)\ ,$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса, $p,\ q$ – действительные корни уравнения $x^2+\dfrac{1-m}{2}x+\dfrac{c}{4}=0$, так как $c\le\dfrac{(m-1)^2}{4}$, β – постоянная.

Выберем постоянную β так, чтобы функция $u(t)$ удовлетворяла начальным условиям (2). Используя интеграл 2.21.1.6 в [11] получим

$$\beta=\frac{2\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(k/1+1/2)\Gamma(m/2-k/2)}. \tag{24}$$

Вычислим теперь предел, входящий в равенство (22). С учетом формул 7.2.1.10, 7.2.1.7, 7.2.1.2 из [11] и (24), будем иметь

$$\lim_{s\to0}s^kQ'(s)=-2\beta\lim_{s\to0}s^{k+1}{}_2F_1'\left(p,q;(m-k)/2;1-s^2\right)=$$

$$=-4\beta\frac{pq}{m-k}\ \lim_{s\to0}s^{k+1}{}_2F_1'\left(p+1,q+1;(m-k)/2+1;1-s^2\right)=$$

$$=-\frac{\beta c}{m-k}\lim_{s\to0}{}_2F_1\left(m/2-k/2-p,m/2-k/2-q;(m-k)/2+1;1-s^2\right)=-c\,.$$

Итак, из (22) – (24) окончательно получим

$$u(t)=\frac{2\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma((k+1)/2)\Gamma((m-k)/2)}\int_0^1(1-s^2)^{(m-k-2)/2}s^k{}_2F_1(p,q;(m-k)/2;1-s^2)Y_k(ts)u_0\,ds\,. \tag{25}$$

Отметим ряд частных случаев формулы (25). Если $p=(m-k)/2,\quad q=(k-1)/2$, то (25) примет вид

$$u(t)=2p\int_0^1(1-s^2)^{p-1}sY_k(ts)u_0\ ds\,.$$

При $c=0$ функция $Q(s)\equiv1$ и (25) превращается в

$$u(t)=\frac{2}{B(k/2+1/2,m/2-k/2)}\int_0^1(1-s^2)^{(m-k-2)/2}s^kY_k(ts)u_0\ ds\,. \tag{26}$$

Литература

1. Fattorini H.O. Ordinary differential equations in linear topological space, II // J. Different. Equat. – 1969. – 6. – P.50-70.

2. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Киев: Выща школа, 1989.
3. Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Серия Математический анализ. ВИНИТИ. – 1990. – 28. – С.87-202.
4. Васильев В.В., Пискарев С.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве II. Теория косинус оператор-функций // http://www.srcc.msu.su
5. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // ДАН. – 1997. – 352;5. – С.587-589.
6. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. – 1951. – 1;2(42). – С.102-143.
7. Bragg L.R. Fundamental solutions and properties of solutions of the initial value radial Euler-Poisson-Darboux // J. Math. Mech. – 1969. – 18. – P.607-616.
8. Земанян А.Г. Интегральные преобразования обобщенных функций / М.: Наука, 1974.
9. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, 1967.
10. Fattorini H.O. A note on fractional derivatives of semigroups and cosine functions // Pacific J. Math. – 1983. – 109;2. – P.335-347.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы / М.: Наука, 1986.

NECESSARY CONDITION OF SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ABSTRACT EULER-POISSON-DARBOUX EQUATION

A.V. Glushak, O.A. Pokruchin

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru,
pokru4in.oleg@yandex.ru

Abstract. Some properties of Cauchy's problem solutions of the Euler-Poisson-Darboux equation and also necessary condition of its solvability are proved.

Key words: abstract Cauchy problem, Euler-Poisson-Darboux's equation, operational Bessel function, solvability necessary condition.