МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

О ЗАДАЧЕ ТИПА ДИРИХЛЕ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ ДВУОСЕСИММЕТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

А.А. Абашкин

Самарский Государственный Архитектурно-строительный Университет
ул. Молодогвардейская, 194, Самара, 443001, Россия, e-mail: samcocaa@rambler.ru

Аннотация. Для обобщенного двуосесимметричного уравнения Гельмгольца исследована краевая задача, граничные условия которой зависят от значения параметров уравнения. Доказана ее однозначная разрешимость. Методом разделения переменных, используя разложение в ряд Фурье-Бесселя и преобразование Ханкеля, найден явный вид решения.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, ряд Фурье-Бесселя, преобразование Ханкеля, функции Бесселя.

1. Постановка задачи

Поставим следующую задачу для уравнения

$$H^{\lambda}_{\mu,p}u = u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\mu}{x}u_x + \frac{2p}{y}u_y - \lambda^2 u = 0\,, \quad p > 0\,, \quad \lambda > 0\,. \tag{1}$$

Найти функцию $u(x,y) \in C([0,a] \times [0,\infty)) \cap C^2((0,a) \times (b,\infty))$ при $\mu, p < \frac{1}{2}$ и $u(x,y) \in C((0,a] \times (0,\infty)) \cap C^2((0,a) \times (b,\infty))$ при других значениях параметров p и μ, удовлетворяющую условиям:

$$H^{\lambda}_{\mu,p}u(x,y) \equiv 0, \quad u(a,y) = q_2(y)\,, \quad \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad x \in (0,1)\,; \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in [0,a]\,, \quad p < \frac{1}{2}\,; \tag{3}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{2p-1}u(x,y) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in [0,a]\,, \quad p > \frac{1}{2}\,; \tag{4}$$

$$\lim_{y\to 0+} \frac{u(x,y)}{\ln y} = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in [0,a]\,, \quad p = \frac{1}{2}\,; \tag{5}$$

$$u(0,y) = q_1(y) \quad \text{при} \quad y \in (0,\infty)\,, \quad \mu < \frac{1}{2}\,; \tag{6}$$

$$\lim_{x\to 0+} x^{2\mu-1}u(x,y) = q_1(y) \quad \text{при} \quad y \in (0,\infty)\,, \quad \mu > \frac{1}{2}\,, \tag{7}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{u(x,y)}{\ln x}=q_1(y) \quad \text{при} \quad y\in(0,\infty)\,, \quad \mu=\frac{1}{2}\,, \tag{8}$$

где $q_i(y)$ и $\varphi(x)$ – известные функции достаточной степени гладкости, такие, что $q_1(0)=\varphi(0)$ при $p<1/2$ и $\mu<1/2$, $q_2(0)=\varphi(a)$ при $p<1/2$, а также $\lim\limits_{y\to\infty} q_i(y)=0$, $i=1,2$.

Отметим, что краевая задача в четверти плоскости для уравнения (1) была исследована в публикации [1], нелокальная краевая задача в полуполосе для частного случая уравнения (1) при $\mu=0$ – в статьях [2,3], однозначная разрешимость задачи подобной задаче (2), (3), (6), но для уравнения $y^m u_{xx}+u_{yy}+\dfrac{\beta_0}{y}u_y-\lambda^2 y^m u=0$, $\quad m>0$ была доказана в работе [4]. В монографии [5] рассмотрены краевые задачи для уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\mu}{x}u_x+\frac{2p}{y}u_y+\lambda^2 u=0\,.$$

2. Единственность решения

Теорема 1. *Если решение задачи с условиями (2)-(7) при $p<1/2$, $\mu\neq 1/2$ существует, то оно единственно.*

□ Для начала рассмотрим случай $\mu<1/2$.

Допустим, что решение решение задачи (2), (3), (6) при $\varphi(x)\equiv 0$, $q_i(y)\equiv 0$ принимает наибольшее значение, не равное нулю во внутренней точке (x_0,y_0) полуполосы $[0,a]\times[0,\infty)$. Тогда $u_x(x_0,y_0)=0$ и $u_y(x_0,y_0)=0$. Точно также имеет место $\Delta u(x,y)<0$. Поскольку на границе области решение равно нулю, то $u(x_0,y_0)>0$. Откуда следует, что $H^\lambda_{\mu,p}u(x_0,y_0)=\Delta u(x_0,y_0)+\lambda u(x_0,y_0)<0$, что указывает на имеющееся противоречие.

Применяя аналогичные рассуждения, можем утверждать, что решение не может принимать наименьшее значение во внутренней точке области. Таким образом, мы получили, что наибольшее и наименьшее значения функция $u(x,y)$ принимает на границе или при $y\to\infty$. Поскольку на границе и в бесконечности решение тождественно равно нулю, то и в области D решение равно нулю. Что и доказывает единственность решения задачи (2), (3), (6).

Ввиду второго из принципов соответствия для оператора $H^\lambda_{\mu,p}$ [5, с.164],

$$H^\lambda_{\mu,p}(y^{1-2p}u(x,y))=H^\lambda_{\mu,1-p}(u(x,y))\,, \quad H^\lambda_{\mu,p}(x^{1-2\mu}u(x,y))=H^\lambda_{1-\mu,p}(u(x,y))\,, \tag{9}$$

существует биекция между решениями краевой задачи с условиями (2), (3), (6) и краевой задачи с условиями:

$$H^\lambda_{1-\mu,p}u(x,y)\equiv 0\,, \quad u(a,y)=a^{2\mu-1}q_2(y)\,, \quad \lim_{y\to\infty}u(x,y)=0\,, \quad \text{при} \quad x\in(0,1)\,; \tag{10}$$

$$\lim_{y\to 0+}u(x,y)=x^{2\mu-1}\varphi(x)\,, \quad \text{при} \quad x\in[0,a]\,; \tag{11}$$

$$\lim_{x\to 0+}x^{2\mu-1}u(x,y)=q_1(y)\,, \quad \text{при} \quad y\in(0,\infty)\,. \tag{12}$$

Условия (10)-(12) после соответствующих переименований обретают вид (2), (3), (7). Вследствие этого доказанная выше единственность решения задачи (2), (3), (6) влечет единственность решения задачи (2), (4), (6). ■

Теорема 2. *Решение задачи с условиями (2)-(7) и дополнительным условием на искомую функцию*

$$\lim_{y\to\infty} y^{2p-1}u(x,y)=0 \tag{13}$$

единственно при $p>\frac{1}{2}$.

□ Первый из принципов соответствия (9) приводит во взаимно-однозначное соответствие решения краевой задачи с условиями (2), (3), (6) и решения краевой задачи со следующими условиями: Первый из принципов соответствия (9) приводит во взаимно-однозначное соответствие решения краевой задачи с условиями (2), (3), (6) и решения краевой задачи со следующими условиями:

$$H^{\lambda}_{\mu,1-p}u(x,y)\equiv 0\,,\quad u(a,y)=y^{2p-1}q_2(y)\,,\quad \lim_{y\to\infty}u(x,y)=0 \quad \text{при} \quad x\in(0,1)\,; \tag{14}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-2p}u(x,y)=\varphi(x) \quad \text{при} \quad x\in[0,a]\,; \tag{15}$$

$$\lim_{x\to 0+} u(x,y)=y^{2p-1}q_1(y) \quad \text{при} \quad y\in(0,\infty)\,. \tag{16}$$

После соответствующих переименований, при выполнении условия (13), задача (14) - (16) превращается в задачу с условиями (2), (4), (6) и дополнительным условием (13). ■

3. Существование решения

Теорема 3. *Если функции* $x^{\mu_1}\varphi(x)$ *п* $y^{p_1}q_i(y)$, $i=1,2$, *где* $\mu_1=\mu-1/2$, $p_1=p-1/2$, *непрерывны, первая из них имеет ограниченную вариацию на любом интервале* (b,c), $0<b<c<a$, *а вторые – на любом интервале* $(0,R)$, *и выполняются условия:*

$$\int\limits_0^a |x^{\mu}\varphi(x)|dx<\infty\,,\qquad \int\limits_0^{+\infty}|y^{p}q_i(y)|dy<\infty\,,\quad i=1,2\,,$$

то решение задачи (2)-(7) существует.

□ В силу принципа соответствия (9), достаточно рассмотреть случай $p\ge 1/2$, $\mu\ge 1/2$. Будем искать решение задачи с условиями (2), (4), (7) в виде

$$u(x,y)=V_1(x,y)+V_2(x,y)\,,$$

где $V_1(x,y)$ и $V_2(x,y)$ удовлетворяют условиям:

$$H^{\lambda}_{\mu,p}V_1(x,y)\equiv 0\,,\quad V_1(a,y)=q_2(y)\,,\quad \lim_{y\to\infty}V_1(x,y)=0 \quad \text{при} x\in(0,1)\,; \tag{17}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{2p-1}V_1(x,y)=0 \quad \text{при} \quad x\in[0,a],\quad p>\frac{1}{2}\,; \tag{18}$$

$$\lim_{y\to 0+}\frac{V_1(x,y)}{\ln y}=0 \quad \text{при} \quad x\in[0,a], \quad p=\frac{1}{2}\,; \tag{19}$$

$$\lim_{x\to 0+}x^{2\mu-1}V_1(x,y)=q_1(y) \quad \text{при} \quad y\in(0,\infty)\,, \quad \mu>\frac{1}{2}\,; \tag{20}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{V_1(x,y)}{\ln x}=q_1(y) \quad \text{при} \quad y\in(0,\infty), \quad \mu=\frac{1}{2}\,; \tag{21}$$

$$H^{\lambda}_{\mu,p}V_2(x,y)\equiv 0\,, \quad V_2(a,y)=0\,, \quad \lim_{y\to\infty}V_2(x,y)=0 \quad \text{при} \quad x\in(0,1)\,; \tag{22}$$

$$\lim_{y\to 0+}y^{2p-1}V_2(x,y)=\varphi(x) \quad \text{при} \quad x\in(0,a]\,, \quad p>\frac{1}{2}\,; \tag{23}$$

$$\lim_{y\to 0+}\frac{V_2(x,y)}{\ln y}=\varphi(x) \quad \text{при} \quad x\in(0,a]\,, \quad p=\frac{1}{2}\,; \tag{24}$$

$$\lim_{x\to 0+}x^{2\mu-1}V_2(x,y)=0 \quad \text{при} \quad y\in(0,\infty)\,, \quad \mu>\frac{1}{2}\,; \tag{25}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{V_1(x,y)}{\ln x}=0 \quad \text{при} \quad y\in(0,\infty)\,, \quad \mu=\frac{1}{2}\,. \tag{26}$$

Вычисление функции $V_1(x,y)$. Функцию $V_1(x,y)$ будем искать в виде

$$V_1(x,y)=\int\limits_0^\infty x^{-\mu_1}[b_1(\gamma)K_{\mu_1}(\xi(\gamma)x)+b_2(\gamma)I_{\mu_1}(\xi(\gamma)x)]y^{-p_1}J_{p_1}(\gamma y)d\gamma\,, \tag{27}$$

где $\xi(\gamma)=\sqrt{\gamma^2+\lambda^2}$, $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода [6, с.132],

$$J_\nu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\,, \quad \nu\neq 0,-1,-2...\,, \tag{28}$$

$I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя [6, с.139],

$$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\,,$$

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\nu\pi}, \quad \nu\notin Z, \quad K_n(z)=\lim_{\nu\to n}K_\nu(z), \quad n\in Z\,,$$

$b_1(\gamma)$, $b_2(\gamma)$ – неизвестные функции, подлежащие определению.

Формула (27) получается, если искать решение уравнения (1) с разделенными переменными, удовлетворяющее условиям (18), (19) и третьему равенству условия (17) с последующим интегрированием этого решения по константе разделения. Поэтому функция $V_1(x,y)$ будет соответствовать условию (18), (19) и первому и третьему равенствам условия (17) при равномерной сходимости соответствующих интегралов.

Подставим формулу (27) в условия (20), предполагая интеграл равномерно сходящимся, с учетом асимптотики модифицированной функции Бесселя [6,с.173]:

$$K_\nu(z) \simeq \frac{\Gamma(|\nu|)}{2^{1-|\nu|}z^{|\nu|}}\,, \quad z \to 0\,, \tag{29}$$

при $\mu_1 > 1/2$ получим

$$\lim_{x\to 0+} x^{2\mu-1}V_1(x,y) = y^{-p_1}\int\limits_0^{+\infty} b_1(\gamma)\frac{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)}{\xi^{\mu_1}(\gamma)}J_{p_1}(\gamma y)d\gamma = q_1(y)\,.$$

После применения к последнему равенству формулы обращения для преобразования Ханкеля [6, с.166] имеем:

$$b_1(\gamma)\frac{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)}{\xi^{\mu_1}(\gamma)\gamma} = \int\limits_0^{+\infty} \tau^{p_1+1}q_1(\tau)J_{p_1}(\gamma\tau)d\tau\,,$$

откуда

$$b_1(\gamma) = \frac{\xi^{\mu_1}(\gamma)\gamma}{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)}\int\limits_0^{+\infty} \tau^{p_1+1}q_1(\tau)J_{p_1}(\gamma\tau)d\tau\,. \tag{30}$$

Таким же образом, при $\mu = 1/2$ получаем:

$$b_1(\gamma) = -\gamma\int\limits_0^{+\infty} \tau^{p_1+1}q_1(\tau)J_{p_1}(\gamma\tau)d\tau\,. \tag{31}$$

Аналогично, используя второе равенства в условии (17), находим выражение для $b_2(\gamma)$:

$$b_2(\gamma) = \frac{a^{\mu_1}\gamma\int\limits_0^{+\infty}\eta^{p_1+1}q_2(\eta)J_{p_1}(\gamma\eta)d\eta - b_1(\gamma)K_{\mu_1}(\xi(\gamma)a)}{I_{\mu_1}(\xi(\gamma)a)}\,, \quad \mu > \frac{1}{2}\,. \tag{32}$$

Для того чтобы интеграл (27) являлся решением уравнения (1), достаточно чтобы равномерно сходились интегралы от частных производных 1-го и 2-го порядков подынтегральной функции интеграла (27) на множествах $[\varepsilon_1, a-\delta]\times[\varepsilon_2,\infty)$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, δ – произвольно малые положительные постоянные.

Найдем интеграл от производной по x подинтегральной функции в (27), используя формулу дифференцирования для модифицированной функции Бесселя [6, с.141]:

$$(z^{-\nu}K_\nu(z))' = -z^{-\nu}K_{\nu+1}(z)\,, \tag{33}$$

разобьем его следующим образом: $I = x^{-\mu_1}y^{-p_1}(-I_1 + I_2 - I_3)$, где

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\xi^{\mu_1+1}(\gamma)\gamma}{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)}K_{\mu_1+1}(\xi(\gamma)x))J_{p_1}(\gamma y)\int\limits_0^{+\infty}\tau^{p_1+1}q_1(\tau)J_{p_1}(\gamma\tau)d\tau d\gamma\,,$$

$$I_2 = \int\limits_0^\infty a^{\mu_1}\gamma\xi(\gamma)\int\limits_0^{+\infty}\eta^{p_1+1}q_2(\eta)J_{p_1}(\gamma\eta)d\eta\frac{I_{\mu_1+1}(\xi(\gamma)x)}{I_{\mu_1}(\xi(\gamma)a)}J_{p_1}(\gamma y)d\gamma\,,$$

$$I_3 = \int\limits_0^\infty \frac{\xi^{\mu_1+1}(\gamma)\gamma}{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)}K_{\mu_1}(\xi(\gamma)a)\frac{I_{\mu_1+1}(\xi(\gamma)x)}{I_{\mu_1}(\xi(\gamma)a)}J_{p_1}(\gamma y)\Big(\int\limits_0^{+\infty}\tau^{p_1+1}q_1(\tau)J_{p_1}(\gamma\tau)d\tau\Big)d\gamma\,.$$

Функция $K_\nu(z)$ положительна и убывает при $z > 0$, поэтому при $x > \varepsilon_1$ верно неравенство $K_{\mu_1+1}(\xi(\gamma)\varepsilon_1) > K_{\mu_1+1}(\xi(\gamma)x)$. Пусть $j = \sup\limits_{z>0}|J_{p_1}(z)|$. Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{\xi^{\mu_1+1}(\gamma)\gamma}{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)}K_{\mu_1+1}(\xi(\gamma)x))J_{p_1}(\gamma y)\int\limits_0^{+\infty}\tau^{p_1+1}q_1(\tau)J_{p_1}(\gamma\tau)d\tau\right|d\gamma \le$$

$$\le \int\limits_0^{+\infty} j\left|\frac{\xi^{\mu_1+1}(\gamma)\gamma}{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)}\int\limits_0^{+\infty}\tau^{p_1+1}q_1(\tau)J_{p_1}(\gamma\tau)d\tau\right|K_{\mu_1+1}(\xi(\gamma)\varepsilon_1))d\gamma\,.$$

Интеграл стоящий справа сходится, в силу асимптотики

$$K_\nu(z) \simeq \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}},\quad z\to\infty \tag{34}$$

и стремления к нулю функции $\left|\int\limits_0^{+\infty}\tau^{p_1+1}q_1(\tau)J_{p_1}(\gamma\tau)d\tau\right|$ при $\gamma\to\infty$. По признаку Вейерштрасса интеграл I_1 сходится равномерно.

Интеграл I_2 сходится равномерно, так как его подинтегральное выражение состоит из интегрируемой функции $\gamma J_{p_1}(\gamma y)\int\limits_0^{+\infty}\eta^{p_1+1}q_2(\eta)J_{p_1}(\gamma\eta)d\eta$ и множителя, имеющего экспоненциальный характер убывания на бесконечности при $x\in[0,\delta]$, что следует из асимптотики [6, с.173]

$$I_\nu(z) \simeq \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\,,\quad z\to\infty\,. \tag{35}$$

Равномерная сходимость интеграла I_3 и интегралов от второй производной по x и первой и второй производных по y доказывается аналогично.

Нахождение функции $V_2(x,y)$. Будем искать функцию $V_2(x,y)$ методом разделения переменных:

$$V_2(x,y) = V(x)W(y)\,.$$

В результате приходим к следующим уравнениям:

$$V'' + \frac{2\mu}{x}V' + \gamma^2 V = 0\,, \tag{36}$$

$$W'' + \frac{2p}{y}W' - (\gamma^2+\lambda^2)W = 0\,, \tag{37}$$

где γ^2 – константа разделения.

Уравнение (36) заменой $V(x) = x^{-\mu_1}F(\gamma x)$ сводится к уравнению Бесселя, общее решение которого можно записать в виде [6, с.132-135]:

$$F(z) = C_1 J_{\mu_1}(z) + C_2 Y_{\mu_1}(z)\,,$$

где $Y_\nu(z)$ – функция Бесселя второго рода,

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}, \quad \nu \notin Z, \quad Y_n(z) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(z), \quad n \in Z\,.$$

Тогда общим решением уравнения (36) будет функция

$$V(x) = C_1 x^{-\mu_1} J_{\mu_1}(\gamma x) + C_2 x^{-\mu_1} Y_{\mu_1}(\gamma x)\,.$$

В силу условия (25) и асимптотик функций Бесселя первого и второго рода [6, с.172],

$$J_\nu(z) \simeq \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}\,, \quad z \to 0\,,$$

$$Y_\nu(z) \simeq -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi x^\nu}\,, \quad \nu > 0, \quad z \to 0\,,$$

необходимо положить $C_2 = 0$.

Для того чтобы функция $u(x,y)$ удовлетворяла второму равенству условия (22), необходимо выполнение равенства $J_{\mu_1}(\gamma a) = 0$. Если обозначить посредством r_n, $n = 1, 2, \ldots$ все положительные корни уравнения $J_{\mu_1}(x) = 0$, пронумерованные в порядке возрастания, то $\gamma a = r_n$ для некоторого номера n, откуда получаем $\gamma = \frac{r_n}{a}$. Тогда $V(x)$ принимает следующий вид:

$$V_n(x) = A_n x^{-\mu_1} J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right)\,.$$

Уравнение (37) заменой $V(x) = x^{-\mu_1}F(\gamma x)$ сводится к модифицированному уравнению Бесселя [6, с.141], его общим решением будет функция

$$W_n(y) = C_3 y^{-p_1} K_{p_1}(\xi_n y) + C_4 y^{-p_1} I_{p_1}(\xi_n y)\,,$$

где $\xi_n = \sqrt{\left(\frac{r_n}{a}\right)^2 + \lambda^2}$.

Для того, чтобы выполнялось условие (22), в силу асимптотики в функций $K_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ при $z \to \infty$ (34), (35) необходимо положить $C_4 = 0$. В результате, мы можем составить ряд

$$V_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^{\mu_1} y^{-p_1} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) K_{p_1}(\xi_n y)\,. \tag{38}$$

Определим коэффициенты B_n так, чтобы ряд (38) являлся решением задачи (22) - (26). Подставив этот ряд в условия (23), (24) с учётом асимптотики функции $K_\nu(z)$ (29) получим:

$$x^{\mu_1}\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\Gamma(p_1)}{2^{1-p_1}\xi_n^{p_1}} J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right)\,, \quad p > \frac{1}{2}\,,$$

$$x^{\mu_1}\varphi(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right)\,, \quad p = \frac{1}{2}\,.$$

При выполнении условий теоремы 3 можно разложить $x^{\mu_1}\varphi(x)$ в ряд Фурье-Бесселя [6, с.165]:

$$x^{\mu_1}\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right)\,, \tag{39}$$

где c_n определяются по формуле [6, с.164]

$$c_n = \frac{2}{a^2 J^2_{\mu_1+1}(r_n)} \int\limits_0^a \varphi(x) x^{\mu_1+1} J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) dx\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{40}$$

Тогда имеет место следующие равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\Gamma(-p_1)}{2^{p_1+1}\xi_n^{p_1+1}} J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right)\,, \quad p > \frac{1}{2}\,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{\mu_1}(\frac{r_n}{a}x) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{\mu_1}(\frac{r_n}{a}x)\,, \quad p = \frac{1}{2}\,.$$

Выразив из этого равенства B_n, получим

$$B_n = c_n \frac{\xi_n^{p_1}}{\Gamma(p_1) 2^{p_1-1}}\,, \quad p > \frac{1}{2}\,; \tag{41}$$

$$B_n = -c_n\,, \quad p = \frac{1}{2}\,, \tag{42}$$

где коэффициенты c_n определяются равенством (40).

Для того, чтобы формальное решение в виде ряда (38), коэффициенты которого определяются по формуле (41), было решением уравнения (1), необходимо доказать равномерную сходимость на множествах $[\varepsilon_1, a-\delta] \times [\varepsilon_2, \infty)$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, δ – произвольно малые положительные постоянные ряда (38) и ряда, получающегося почленным его дифференцированием по x и по y.

Пусть $j = \sup\limits_{x>0} J_{\mu_1}(x)$. Принимая во внимание, что $K_{p_1}(x)$ убывает при $x > 0$, имеем следующие оценки:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| c_n \frac{\xi_n^{p_1}}{\Gamma(p_1) 2^{p_1-1}} x^{-\mu_1} y^{-p_1} J_{-\mu_1}(\frac{r_n}{a}x) K_{p_1}(\xi_n y) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \frac{\xi_n^{p_1}}{\Gamma(p_1) 2^{p_1-1}} \varepsilon_1^{-\mu_1} \varepsilon_2^{-p_1} j K_{p_1}(\xi_n \varepsilon_2)\,.$$

Ряд, стоящий справа, сходится, вследствие экспоненциального убывания последовательности $K_{p_1}(\xi_n\varepsilon_2)$ при $n \to \infty$ и стремления к нулю коэффициентов c_n. Таким образом, равномерная сходимость ряда (38) доказана.

Доказательство сходимости рядов, получающихся почленным дифференцированием ряда (38) по x и по y, проводится аналогично.

Чтобы решение, выражаемое формулой (38), удовлетворяло условию (25), достаточно равномерной сходимости ряда, получающегося умножением ряда (38) на $x^{2\mu_1}$, этот факт также доказывается аналогичным способом.

Для того чтобы выполнялось условие (23) для ряда (38), достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) J_{\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right), \tag{43}$$

где $c_n(y) = B_n y^{p_1} K_{p_1}(\xi_n y)$. Ряд (43), в котором y мы рассматриваем как параметр, является разложением функции $x^{\mu_1} y^{2p_1} u(x,y)$ по ортогональной с весом системе функций $\{J_{\mu_1}(\frac{r_n}{a}x)\}$. Ряд, получающийся из ряда (43) предельным переходом при $y \to 0$, сходится равномерно, если выполняются условия теоремы.

Изучим поведение коэффициентов $c_n(y)$ при изменении y. Для этого найдем производную по y от коэффициентов $c_n(y)$, используя формулу дифференцирования (33)

$$(B_n y^{p_1} K_{p_1}(\xi_n y))' = B_n \xi_n y^{p_1} K_{p_1-1}(\xi_n y).$$

Выражение, стоящее справа, не имеет положительных корней, так как их не имеет функция $K_\nu(z)$. Принимая во внимание, что $K_\nu(z)$ убывает экспоненциально при $z \to \infty$, можно сделать вывод, что коэффициенты как функции от y монотонно убывают на всей положительной полуоси, стремясь к нулю. Поэтому из равномерной сходимости ряда (38) при $y \to 0$ следует равномерная сходимость ряда (43) при всех остальных значениях y, а из этого факта следует сходимость ряда (38).

Таким образом, существование решения задачи (2)-(7) для $\mu > 1/2$, $p > 1/2$ доказано. А значит, вследствие формулы (9), и для значений параметров $\mu > 1/2$ и (или) $p > 1/2$. Чтобы получить формулы, явно выражающие решение краевой задачи с условиями (2), (3), (7), необходимо в формулах (27), (30), (31), (32), (38), (40), (41), (42) заменить p_1 на $-p_1$, $q_i(y)$ на $y^{2p-1}q_i(y)$, $i = 1, 2$ и умножить правые части равенств в формулах (27) и (38) на y^{-2p_1}.

Аналогично для получения формул выражающих решение задачи (2), (4), (6), нужно в формулах (27), (30), (31), (32), (38), (40), (41), (42) заменить μ_1 на $-\mu_1$, $q_2(y)$ на $a^{2\mu-1}q_2(y)$, $\varphi(x)$ на $x^{2\mu-1}\varphi(x)$ и умножить правые части формул (27) и (38) на $x^{-2\mu_1}$. ■

Литература

1. Лернер М.Е., Репин О.А. О задаче Дирихле для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца в первом квадранте // Вестник Самарского Технического Университета. – 1998. – 6. – С.5-8.

2. Лернер М.Е., Репин О.А. Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. – 2001. – 37. – С.1562-1564.
3. Моисеев Е.И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. – 2001. – 37. – С.1565-1567.
4. Рузиев М.Х. Задача Дирихле в вертикальной полуполосе для вырождающегося эллиптического уравнения // Материалы конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», 2007. – С.268-269.
5. Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А. Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами / Самара: Изд-во СГЭУ, 2008. – 275 с.
6. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. СПб.: Лань, 2010. – 368 с.

ABOUT DIRICHLET's PROBLEM IN INFINITE HALF-STRING FOR BIAXIAL SYMMETRIC HELMHOLZ EQUATION

A.A. Abashkin

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
Molodogvardeyskaya St., 194, Samara, 443001, Russia, e-mail: samcocaa@rambler.ru

Abstract. Boundary problem for the biaxial symmetric Helmholtz equation is studied. Boundary conditions of this problem depend on equation's parameters. Existence and uniqueness of the solution are proved. Formulas for solution of this boundary problem are found with help of Fourier-Bessel's expansion and Hankel's transformation.

Key words: Helmholz's equation, Fourier-Bessel's expansion, Hankel's transformation, Bessel's functions.