УДК 517.987

О СВОЙСТВЕ ВНЕШНИХ ГРАНИЦ ПОЛНЫХ КЛАСТЕРОВ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ

Ю.П. Вирченко

НИУ Белгородский государственный университет,
Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Доказывается тождество, связывающее величины внешней и внутренней границ так называемых полных конечных кластеров на квадратной решетке.

Ключевые слова: квадратная решетка, полный конечный кластер, внешняя граница.

1. Введение. Решение одной из основных задач теории перколяции – вычисление порога перколяции, в настоящее время, понимается как получение возможно более точных нижних и верхних оценок этой характеристики. В дискретных двумерных задачах верхние оценки порога перколяции основаны на так называемом кластерном разложении, которое представляет собой сумму слагаемых, каждое из которых является вероятностью появления в случайной реализации конечного кластера, содержащего фиксированную вершину бесконечного графа, на котором ставится задача о появлении перколяции. В связи с этим, точность верхних оценок порога перколяции связана с точностью верхних оценок этих вероятностей. Обычно, такого рода верхние оценки получаются на основе понятия внешней границы конечного кластера и выражаются в терминах длины этой границы. Для возникновения данного конечного кластера необходимым условием является пустота пересечения внешней границы со случайной реализацией. Это условие сразу приводит к простым оценкам, которые оказываются, однако, довольно грубыми. Поэтому, для получения их уточнений, необходим учет внутренней структуры кластера, в простейшем случае, – учет состояния случайной реализации на множестве вершин кластера, непосредственно прилегающих к внешней границе, которые составляют его так называемую внутреннюю границу. При этом возникает потребность в выражении этого состояния в терминах длины внешней границы, чтобы связать единой числовой характеристикой оба множества – внешнюю и внутреннюю границы. В настоящем сообщении доказывается простое тождество, связывающее длины внешней и внутренней границ в случае так называемых полных кластеров на квадратной решетке, обладающих топологически простой границей.

2. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный граф с множеством вершин $\mathbb{Z}^2$ и отношением смежности φ вершин x и y, определяемым соотношениями $y = x \pm \mathsf{e}_i$, $i = 1, 2$, где $\mathsf{e}_1 = \langle 1, 0 \rangle$, $\mathsf{e}_2 = \langle 0, 1 \rangle$. Такой граф называется квадратной решеткой. Мы будем далее его обозначать тем же символом $\mathbb{Z}^2$. Связное множество узлов решетки называется кластером. Мы будем рассматривать конечные кластеры W на $\mathbb{Z}^2$. Для таких кластеров вводится понятие их внешней границы $\partial_+ W$ (см. [1]). А именно, пусть W – фиксированный конечный кластер и $\partial W = \{x \in \complement W : \exists (y \in W : x\varphi y)\}$. Внешней границей кластера W называется такое максимальное подмножество $\partial_+ W$ из ∂W, для каждой вершины x которого существует такой бесконечный путь $\gamma(x)$ на графе $\mathbb{Z}^2$ с началом в x, что $\{\gamma(x)\} \cap [W \cup \partial W] = \{x\}$.

Сопряженным графом $\bar{\mathbb{Z}}^2$ к квадратной решетке называется бесконечный граф с тем же множеством вершин, у которого отношение смежности $\bar{\varphi}$ двух вершин x и y определяется соотношениями: либо $x\varphi y$, либо $y = x + \mathsf{e} + \mathsf{e}'$, где $\mathsf{e} = \pm \mathsf{e}_i$, $\mathsf{e}' = \pm \mathsf{e}_j$, $i, j = 1, 2$. Справедлива теорема (см. [1], [2]): Для того чтобы конечное непустое множество γ на $\bar{\mathbb{Z}}^2$ представляло собой внешнюю границу какого-либо конечного кластера необходимо и достаточно, чтобы γ было простым *неспрямляемым* циклом (определение дано в [2]) на сопряженном графе. Каждый такой цикл однозначным образом определяет конечное множество на решетке $\mathbb{Z}^2$, выделяемое условием того, что любой бесконечный несамопересекающийся путь с началом в вершине этого множества обязательно имеет непустое пересечение с γ. Это множество будем называть внутренностью цикла γ (так как цикл неспрямляем, то оно непусто) и обозначать посредством $\mathrm{Int}[\gamma]$. Наряду с внешней границей, введем для конечного графа W понятие внутренней границы $\partial_- W$. Это множество определяется соотношением $\partial_- W = \{x \in W : \exists (y \in \partial W : x\varphi y)\}$.

Определение 1. *Кластер W назовем полным, если для него имеет место*

$$\mathrm{Int}(\partial_+ W) = W\,.$$

Очевидно, что если кластер W не является полным, то ему всегда, однозначным образом, можно сопоставить такое его расширение $\bar{W}$, которое является полным кластером. Оно является наибольшим из всех расширений. Очевидно, что полный кластер W обладает тем свойством $\partial_+ W = \partial W$ и его внутренняя граница совпадает с множеством $\{x \in \mathrm{Int}[\partial_+ W] : \exists (y \in \partial_+ W : x\varphi y)\}$.

Внутренняя граница может быть устроена довольно сложно. Однако, если граница кластера обладает формулируемым ниже свойством топологической простоты, то можно утверждать, что она, также как и внешняя граница, является циклом на сопряженном графе (возможно, спрямляемым).

Определение 2. *Полный кластер W назовем кластером с простой границей, если для любой вершины $x \in \partial_- W$ множество $\partial_W x = \{y \in \partial_+ W : x\varphi y\}$ является $\bar{\varphi}$-связным.*

3. Свойство границ полного кластера. Теперь мы в состоянии сформулировать и доказать результат, которому посвящено настоящее сообщение. Нас будет интересовать наличие связи между длинами двух циклов – внешней и внутренней границами полного кластера с простой границей.

Теорема. *Для любого полного кластера W на квадратной решетке с простой границей имеет место соотношение*

$$|\partial_+ W| = |\partial_- W| + 4\,. \qquad (1)$$

□ Доказательство состоит из нескольких пунктов.

1. На первом шаге осуществим следующее построение. Сопоставим каждой грани Γ бесконечного плоского графа $\mathbb{Z}^2$ вершину $x \leftrightarrow \Gamma$ и каждому ребру, разделяющему две грани Γ и Γ', – ребро $\langle x, x'\rangle$, $x' \leftrightarrow \Gamma'$. В результате, получим новый бесконечный граф, который будем обозначать $\mathbb{Z}^2_*$ и который, как легко видеть, изоморфен решетке $\mathbb{Z}^2$, то есть также является квадратной решеткой. При этом каждая грань Γ_* на $\mathbb{Z}^2_*$ соответствует определенной вершине x_* на $\mathbb{Z}^2$. Полученную квадратную решетку будем называть *дуальной* по отношению к решетке $\mathbb{Z}^2$. При этом решетка $\mathbb{Z}^2$ является дуальной по отношению к $\mathbb{Z}^2_*$, то есть решетки $\mathbb{Z}^2$ и $\mathbb{Z}^2_*$ образуют пару взаимно дуальных бесконечных графов.

Каждому множеству вершин на $\mathbb{Z}^2$, в частности циклу, однозначным образом, соответствует «многоугольник» (вообще говоря, несвязанный), составленный из граней на $\mathbb{Z}^2_*$ и наоборот. Поэтому кластеру W соответствует кластер W_*, в состав которого входят те и только те вершины, которые входят в состав границ граней решетки $\mathbb{Z}^2_*$ из множества $\{\Gamma : x \leftrightarrow \Gamma, x \in W\}$. Кроме того, ввиду указанного соответствия, для произвольного конечного кластера W на $\mathbb{Z}^2$, величины $|\partial_+ W|$ и $|\partial_- W|$ равны числам граней в многоугольниках на $\mathbb{Z}^2_*$, сопоставляемых множествам $\partial_+ W$ и $\partial_- W$.

2. Так как $\mathbb{Z}^2_*$ – бесконечный плоский граф, то рассмотрим его «стандартное» погружение в плоскость $\mathbb{R}^2$ и образ кластера W_* при этом погружении. Кластер W_*, как подграф плоского графа, также является плоским графом. Этот граф конечный. Поэтому он обладает бесконечной гранью. Эта грань получается удалением из $\mathbb{Z}^2_*$ всех ребер, которые не входят в подграф W_*. Граф W_*, заведомо, не имеет вершин сочленения, и поэтому каждое его ребро, если оно граничит с бесконечно гранью, отделяет эту грань от соответствующей ему конечной грани. В этих условиях, при стандартном погружении, граф W_* обладает ограничивающим его контуром γ_*, который составлен из тех только из тех ребер, которые отделяют бесконечную грань с одной из конечных граней. Контур γ_*, по построению, является несамопересекающимся циклом на $\mathbb{Z}^2_*$. При выбранном стандартном погружении, каждая вершина, входящая в состав γ_*, либо является вершиной, в которой происходит поворот цикла (на угол $\pi/2$), либо таковой не является. Так как кластер W обладает простой границей, то противоположные ребра каждой из граней графа W_* не могут входить одновременно в состав цикла γ_*.

Так как кластер W полный, то каждое ребро из γ_* разделяет на $\mathbb{Z}^2_*$ грань $\Gamma \leftrightarrow x \in \partial_- W$ и какую-то грань $\Gamma' \leftrightarrow x' \in \partial_+ W$. При этом, ввиду простоты границы кластера W, только одно из двух противоположных ребер каждой грани Γ обладает этим свойством. Наоборот, все ребра, разделяющие грани Γ и Γ' указанного типа, входят в состав цикла γ_*. Поэтому цикл γ_* не спрямляем на $\mathbb{Z}^2_*$.

3. Зафиксируем на γ_* определенную ориентацию, например, против часовой стрелки. Рассмотрим подпуть $\gamma_*^{(n)}$ длины n цикла γ_*, начинающийся в какой-то заранее выбранной вершине z на γ_*. Если n меньше длины цикла γ_*, то путь $\gamma_*^{(n)}$ не замкнут, так как цикл γ_* не самопересекается. Направление пути выбирается согласно ориентации цикла γ_*. Индукцией по n доказываются соотношения

$$l_{\pm}^{(n)} = n - m_{\mp}^{(n)}\,, \tag{2}$$

где $l_{\pm}^{(n)}$ – числа граней из $\partial_{\pm}W$, ребра которых входят в состав пути $\gamma_*^{(n)}$, $m_{\pm}^{(n)}$ – числа вершин из множества его внутренних вершин, которые являются вершинами поворота пути $\gamma_*^{(n)}$, соответственно, против (+) и по (-) часовой стрелки. При этом при построении индукционного шага очень важно, что цикл γ_* не спрямляем. Из (2) следует, что для любого n имеет место

$$l_+^{(n)} + m_-^{(n)} = l_-^{(n)} + m_+^{(n)} . \qquad (3)$$

4. Пусть для рассматриваемого кластера W длина соответствующего ему цикла γ_* равна n. Тогда $l_{\pm}^{(n)} = |\partial_{\pm}W|$. С другой стороны, для замкнутого цикла $\gamma_*^{(n)}$, при выбранном нами стандартном погружении в $\mathbb{R}^2$, имеет место $m_+^{(n)} - m_-^{(n)} = 4$, так как при замыкании цикла происходит поворот на 2π (цикл не самопересекается), а в каждой вершине поворота цикла $\gamma_*^{(n)}$ происходит поворот на $\pi/2$. Подстановка этих соотношений в (3) приводит к тождеству (1). ■

Литература

1. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians / H. Kesten. – Boston: Birkhauser, 1982.
2. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Конечные кластеры на плоских мозаиках. Часть 3. Теорема о внешней границе // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2011. – 23(118);25. – С.112-126.

ON THE PROPERTY OF EXTERNAL BOUNDARIES OF ENTIRE CLUSTERS ON SQUARE LATTICE

Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. The identity connecting external boundary value of each so-called entire finite cluster on square lattice and corresponding value of its internal boundary is proved.

Key words: square lattice, entire finite cluster, external boundary.