УДК 517.9

ОБОБЩЕННЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Чан Куанг Выонг

Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: misuto6174@yahoo.com

Аннотация. В статье представлены результаты о равномерной сходимости обобщенных степенных рядов.

Ключевые слова: обобщенные степенные ряды, система Коши-Римана, аналитические функции, равномерная сходимость.

В теории эллиптических систем первого порядка важное место занимают системы вида

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0\,, \tag{1}$$

где $l \times l-$матрица $J \in C^{l\times l}$ не имеет вещественных собственных значений. Системы этого вида впервые были изучены А.Дуглисом [1] для числовой матрицы J в рамках так называемых гиперкомплексных чисел. Позднее было обнаружено [2,3], что эти системы играют важную роль в теории эллиптических систем 2-го и более высоких порядков.

При $J = i$ система (1) составляет известное условие Коши-Римана, описывает классические аналитические функции. По аналогии с обычными степенными рядами, возникающими в теории аналитических функций, можно ввести и обобщенные ряды, играющие аналогичную роль для системы (1).

Пусть $\sigma(J) = \{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_k\}$ – спектр матрицы J. С комплексным числом $z = x+iy \neq 0$ свяжем $l \times l-$ матрицу $z = x + Jy$, где 1 означает единичную матрицу. В случае комплексного числа

$$\nu = \alpha + i\beta,\ \beta \neq 0\,, \tag{2}$$

аналогичное обозначение определяет комплексное число $z_\nu = x + \nu y = x + \alpha y + i\beta y$. Очевидно, равенство $|z_\nu| = r$ на плоскости переменных $z = x + iy$ описывает эллипс

$$x^2 + 2\alpha xy + |\nu|^2y^2 = R^2\,, \tag{3}$$

внутренность и внешность которого обозначим, соответственно, $G(\nu, R)$ и $G'(\nu, R)$. Пусть $a_0(\nu)$ и $a_1(\nu)$ означают, соответственно, малую и большую полуоси этого эллипса с $R = 1$. Матрица

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & |\nu|^2 \end{pmatrix}$$

квадратичной формы в (3) положительно определена и ее собственных значения λ_0 и λ_1 являются корнями характеристического уравнения $(\lambda-1)(\lambda-|\nu|^2) = \alpha^2$. Величины, обратные к ним, совпадают с квадратами a_0^2 и a_1^2 полуосей.

Таким образом, полуоси эллипса (3) даются равенствами

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{1+|\nu|^2-\sqrt{(1-|\nu|^2)^2+4\alpha^2}}}\,,\\
a_1 &= \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{1+|\nu|^2+\sqrt{(1-|\nu|^2)^2+4\alpha^2}}}\,.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Обобщенными степенными рядами называется выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_J^n c_n, \quad c_n \in \mathbb{R}^l\,. \tag{5}$$

Введем для элементов $A \in \mathbb{C}^{l\times l}$ и $\xi \in \mathbb{C}^l$ соответствующих конечномерных пространств нормы по формулам

$$\|A\| = \max_{1\le i\le l}\left\{\sum_{1\le j\le l}|a_{ij}|\right\}, \quad \|\xi\| = \max_{1\le i\le l}|\xi_i|\,. \tag{6}$$

Тогда справедливы соотношения

$$\|A\xi\| \le \|A\|\,\|\xi\|, \quad \|AB\| \le \|A\|\,\|B\|\,. \tag{7}$$

В частности, ряд (5) сходится абсолютно (по норме) в точке z, если

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|z_J\|^n\,\|c_n\| < \infty\,. \tag{8}$$

Лемма 1. *Пусть r есть степень минимального многочлена матрицы J. Тогда справедлива оценка*

$$\|z_J^n\| \le C \max_{\nu\in\sigma(J)}|z_\nu|^n(1+|n|)^{r-1}, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\,, \tag{9}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от J.

□ Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_k$ – все различные собственные значения матрицы J. Как известн из линейной алгебры [4], матрица J может быть приведена к жордановой форме. Другими словами, существует такая обратимая матрица B, что $J^0 = B^{-1}AB$ имеет блочно-диагональный вид $\mathrm{diag}\,(J_1, J_2, \ldots, J_n)$, где J_k есть блочно-диагональная матрица, составленная из некоторого числа ν_k-клеток Жордана. При этом порядок каждой из этих матриц не превосходит r. Все элементы матрицы $J_k - \nu_k$ равны нулю, кроме некоторых элементов на первой диагонали над главной, которые равны 1. Таким образом, с учетом (6)

$$\|J_k - \nu_k\| = 1\,, \quad (J_k - \nu_k)^r = 0\,. \tag{10}$$

Пусть функция $f(u)$ аналитична в окрестности всех точек ν_k. Тогда согласно [4] значение этой функции от матрицы J_k вычисляется по формуле

$$f(J_k) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(\nu_k)}{j!}(J_k - \nu_k)^j .$$

Совместно с (7), (10) отсюда

$$\|f(J_k)\| \leqslant \sum_{j=0}^{r-1} \frac{|f^{(j)}(\nu_k)|}{j!} . \tag{11}$$

С другой стороны,

$$f(J) = B^{-1}f(J^0)B, \quad f(J^0) = \mathrm{diag}\,[f(J_1), \ldots, f(J_k)] ,$$

так что с учетом (7), (11)

$$\|f(J)\| \leqslant \|B\| \cdot \|B^{-1}\| \max_{\nu\in\sigma(J)} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{|f^{(j)}(\nu)|}{j!} . \tag{12}$$

Очевидно,

$$f(J) = z_J^n, \quad f(u) = (x + uy)^n .$$

Для рассматриваемой функции имеем:

$$\frac{f^{(j)}(\nu)}{j!} = z_\nu^n \binom{n}{j} \frac{y^j}{z_\nu^j} , \qquad \frac{|f^{(j)}(\nu)|}{j!} = |z_\nu|^n \binom{n}{j} \frac{1}{|\mathrm{Im}\,\nu|^j} ,$$

с биномиальным коэффициентом

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!} .$$

Подставляя эти выражения в (12), приходим к оценке (9). ■

С помощью леммы 1 нетрудно описать области сходимости обобщенного степенного ряда (5). На основании этой леммы рассматриваемый ряд мажорируется по норме классическим степенным рядом

$$C\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n q^n , \tag{13}$$

где положено

$$q = \max_{\nu\in\sigma(J)} |z_\nu| , \quad \alpha_n = (1+n)^{r-1}\|c_n\| .$$

Хорошо известно [5], что радиус сходимости этого степенного ряда дается равенством

$$R \;=\; \frac{1}{\overline{\lim}\,\sqrt[n]{\|c_n\|}} . \tag{14}$$

Следовательно, в области

$$\max_{\nu\in\sigma(J)} |z_\nu| < R \tag{15}$$

ряд (5) сходится абсолютно для каждого z, а аналогичной области с заменой R на $r < R$ он сходится равномерно. В принятых выше обозначениях область (15) на плоскости $z = x + iy$ представляет собой пересечение эллипсов

$$G(J,R) = \cap_{\nu\in\sigma(J)} G(\nu, R)\,. \tag{16}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *В обозначениях (14) область (16) содержится в области абсолютной сходимости ряда (5) и формально продифференцированного ряда*

$$\sum_{n\geqslant 1} n z_J^{n-1} c_n\,.$$

На каждом компакте $K \subseteq G(J,R)$ эти ряды сходятся равномерно.

Из теоремы следует, что сумма $\phi(z)$ ряда (5) в области (16) как функция переменных x, y непрерывно дифференцируема и удовлетворяет системе (1).

Аналогичным образом можно рассмотреть обобщенный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_J^{-n} c_n \tag{17}$$

по отрицательным степеням матрицы z_J. В силу леммы 1 этот ряд мажорируется соответствующим степенным рядом

$$C\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^1 q^{-n}\,,$$

где как и выше

$$q = \max_{\nu\in\sigma(J)} |z_\nu|,\ \ \alpha_n^1 = (1+n)^{r-1}\|c_n\|\,.$$

Этот ряд имеет область сходимости

$$\max_{\nu\in\sigma(J)} |z_\nu| > R^1, \quad R^1 = \overline{\lim}\sqrt[n]{\|c_n\|}\,, \tag{18}$$

что приводит к следующему предложению.

Теорема 2. *Область (18), представляющая собой пересечение*

$$G'(J,R^1) = \cap_{\nu\in\sigma(J)} G'(\nu, R^1)$$

внешностей эллипсов, содержится в области абсолютной сходимости ряда (17) и формально продифференцированного ряда

$$\sum_{n\geqslant 1} (-n) z_J^{-n-1} c_n\,.$$

На каждом компакте $K' \subseteq G'(J, R^1)$ эти ряды сходятся равномерно.

В качестве иллюстрации рассмотрим случай когда $k = 2$, когда матрица J имеет два собственных значений. Области $G(J, R)$ и $G'(J, R^1)$ абсолютной сходимости этих рядов изображены на следующем рис. 1.

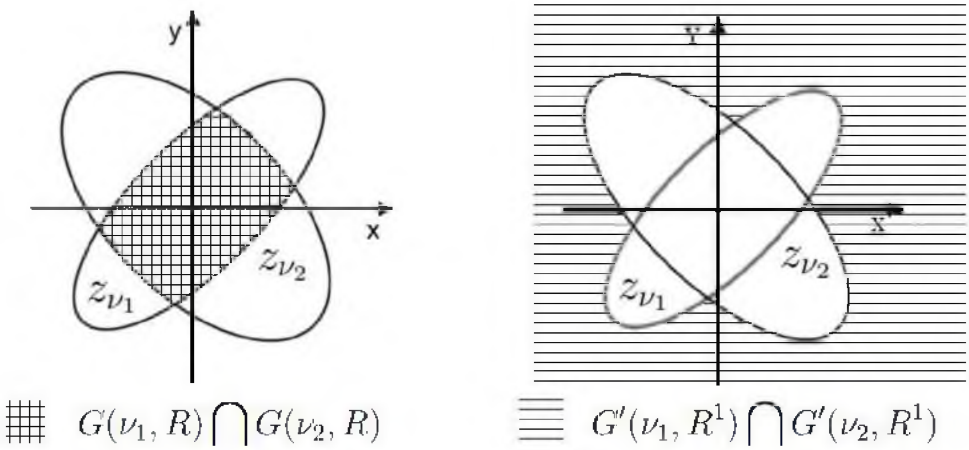

Рис. 1. Случай $k = 2$

Литература

1. Douglis A.A. A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables // Comm. Pure Appl. Math. – 1953. – 6. – P.259-289.
2. Солдатов А.П. Эллиптические системы высокого порядка // Дифференц. уравн. – 1989. – 25;1. – С.136-144.
3. Yeh R.Z. Hyperholomorphic functions and higher order partial differentials equations in the plane // Pacific Journ. of Mathem. – 1990. – 142;2. – P.379-399.
4. Мальцев Н.И. Основы линейной алгебры (3-е изд.) / М.: Наука, 1970.
5. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций / М.: Наука, 1984. – 320 с.

GENERALIZED POWER SERIES

Tran Quang Vuong

Belgorod State University,
Pobedy st., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: misuto6174@yahoo.com

Abstract. Results on the uniform convergence of generalized power series are presented.

Key words: generalized power series, Cauchy-Riemann's system, analytic functions, uniform convergence.