УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ О НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ НА МИКРОСКОПИЧЕСКОМ УРОВНЕ. [10)]

А.М. Мейрманов, Р.Н. Зимин, О.В. Гальцев, О.А. Гальцева [11)]

Белгородский государственный университет,
ул.Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: reshat85@mail.ru

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для системы, состоящей из уравнений Стокса, описывающих движение несжимаемой вязкой жидкости в поровом пространстве и уравнения Ламе в твердом скелете. Система дополняется конвективным уравнением диффузии для примеси в жидкости. Считается, что плотность жидкости зависит от концентрации примеси. Для рассматриваемой математической модели доказывается существование по крайней мере одного обобщенного решения.

Ключевые слова: система уравнений Стокса и Ламе, конвективное уравнение диффузии.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \in R^3$ ограниченная связная область с липшицевой границей S, полученная периодическим повторением элементарной ячейки $\varepsilon\overline{Y}$, где $\varepsilon > 0$ малый параметр,

$$\overline{Y} = Y_f \cup Y_s \cup \gamma \cup \partial Y, \quad Y = (0,1)\times(0,1)\times(0,1), \quad \varepsilon Y = (0,\varepsilon)\times(0,\varepsilon)\times(0,\varepsilon),$$

где $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ – липшицева граница между множествами Y_f и Y_s.

Через $\overline{\Omega}{}^{\varepsilon}_f$ обозначим периодическое повторение элементарной ячейки $\varepsilon\overline{Y}_f$, а через $\overline{\Omega}{}^{\varepsilon}_s$ – периодическое повторение $\varepsilon\overline{Y}_s$. Тогда

$$\Omega = \Omega^{\varepsilon}_f \cup \Omega^{\varepsilon}_s \cup \Gamma^{\varepsilon},$$

где $\Gamma^{\varepsilon} = \partial\Omega^{\varepsilon}_f \cap \partial\Omega^{\varepsilon}_s$ – периодическое повторение границы $\varepsilon\gamma$.

При этом будем считать, что область Y_s полностью окружена областью Y_f (см. рис. 1), то есть

$$\overline{Y}_s \cap \partial Y = \emptyset.$$

В области Ω рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\nabla\cdot\left(\chi^{\varepsilon}\mu_0\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right) + (1-\chi^{\varepsilon})\,\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon}) - p^{\varepsilon}\mathbb{I}\right) + \rho(c^{\varepsilon})\boldsymbol{F} = 0 \tag{1}$$

[10]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт №02.740.11.0613).

[11]Мейрманов Анварбек Мукатович, профессор Белгородского государственного университета.
Зимин Р.Н., аспирант Белгородского государственного университета.
Гальцев О.В., аспирант Белгородского государственного университета.
Гальцева О.А., аспирант Белгородского государственного университета.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}^{\varepsilon} = 0 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in S = \partial\Omega\,, \tag{3}$$

$$\chi^{\varepsilon}\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \tag{4}$$

$$\int_{\Omega} p^{\varepsilon}\, d\boldsymbol{x} = 0\,, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t) = (w_1^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t), w_2^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t), w_3^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t))$ – перемещение сплошной среды, $p^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t)$ – давление в сплошной среде, $c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t)$ – концентрация примеси, $\mathbb{D}(x, \boldsymbol{v})$ – симметрическая часть градиента вектора $\boldsymbol{v}$ (тензор напряжений), $\mathbb{I}$ – единичная матрица, $\chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ – характеристическая функция порового пространства,

$$\rho(c^{\varepsilon}) = \chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})\delta c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t)\,,$$

μ_0 – безразмерная вязкость жидкости, λ_0 – безразмерная постоянная Ламэ, δ – положительная постоянная.

Рис. 1 Геометрия элементарной ячейки.

Концентрация примеси определяется только в области Ω_f^{ε} как решение начально – краевой задачи

$$\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t} \cdot \nabla c^{\varepsilon} = D_0 \triangle c^{\varepsilon}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma^{\varepsilon} \bigcup S,\ t > 0, \tag{7}$$

$$c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, 0) = c_0(\boldsymbol{x}), \text{ при } \boldsymbol{x} \in \Omega_f^{\varepsilon}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор внешней нормали к Γ^{ε}, D_0 – коэффициент диффузии. Обзор результатов по данной задаче можно найти в ([6]).

2. Основной результат

Определение 1. *Функции $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$, $p^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ и $c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ называются обобщенным решением задачи (1) – (8) в области $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$, если*

*1) $p^{\varepsilon}\in L^2(\Omega_T)$, $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\in W_2^{1,1}(\Omega_f^{\varepsilon}\times(0,T))\bigcap W_2^{1,0}(\Omega_s^{\varepsilon}\times(0,T))$,
$c^{\varepsilon}\in L_{\infty}(\Omega_f^{\varepsilon}\times(0,T))\bigcap W_2^{1,0}(\Omega_f^{\varepsilon}\times(0,T))$;*

2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение (2);

3) функции $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}$, p^{ε} и c^{ε} удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_T}(\chi^{\varepsilon}\mu_0\mathbb{D}(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})+(1-\chi^{\varepsilon})\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon}):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})-p^{\varepsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})\,dxdt=$$
$$\int_{\Omega_T}\rho(c^{\varepsilon})\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dxdt \quad (9)$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю на границе S и при $t=T$ и интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}\left(c^{\varepsilon}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\nabla c^{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\psi-D_0\nabla c^{\varepsilon}\cdot\nabla\psi\right)dxdt=-\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}c_0(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x},0)dx \quad (10)$$

для произвольной гладкой функции $\psi(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю при $t=T$.

Здесь используется обозначение: $A:B\equiv tr(AB^T)$, где A и B – квадратные матрицы. Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть*

$$0\leqslant c_0(\boldsymbol{x})\leqslant 1, \quad (11)$$

$$\int_{\Omega_T}\left(|\boldsymbol{F}|^2+\left|\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}\right|^2\right)dxdt\leqslant F^2,\quad |\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)|\leqslant F. \quad (12)$$

Тогда задача (1) – (8) имеет хотя бы одно обобщенное решение и для него справедливы оценки

$$\max_{0<t<T}\lambda_0\int_{\Omega}(1-\chi)|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})|^2dx+\int_{\Omega_T}\left(\mu_0\left|\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\right|^2+|p^{\varepsilon}|^2\right)dxdt\leqslant MF^2\,, \quad (13)$$

$$0\leqslant c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\leqslant 1\,. \quad (14)$$

$$\int_0^T\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}|\nabla c^{\varepsilon}|^2dxdt\leqslant MF^2\,, \quad (15)$$

$$\max_{0<t<T}\int_{\Omega}\chi\left|\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\right|^2dx+\int_{\Omega_T}(1-\chi)\left|\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\right|^2dxdt\leqslant MF^2\,, \quad (16)$$

$$\int_{\Omega}|\nabla\boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_1)-\nabla\boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_2)|^2dx\leqslant C|t_1-t_2|^{1/2}\,, \quad (17)$$

где функция $\boldsymbol{v}^{\varepsilon}=\mathbb{E}_{\Omega_f^{\varepsilon}}(\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}/\partial t)$ описана ниже.

3. Доказательство теоремы

Для упрощения записи, если не оговорено противное, индекс ε опускаем.

Рассмотрим следующую вспомогательную начально – краевую задачу, состоящую из системы уравнений Стокса

$$\nabla\cdot\left(\mu_0\chi\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)+\lambda_0(1-\chi)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})-q)\mathbb{I}\right)+\rho(c)\boldsymbol{F}=0\,,\tag{18}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0\,,\tag{19}$$

в области Ω при $t>0$, дополненную условиями

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=0\,,\quad\text{при}\quad\boldsymbol{x}\in S\,,\tag{20}$$

$$\chi\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=0\,,\quad\text{при}\quad\boldsymbol{x}\in\Omega\,,\tag{21}$$

$$\int_\Omega q\,dx=0\,,\tag{22}$$

и уравнением диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\mathbb{M}^{(h)}\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)\cdot\nabla c=D_0\triangle c\,,\tag{23}$$

для концентрации примеси в области Ω_f при $t>0$, дополненное условиями

$$\frac{\partial c}{\partial\boldsymbol{n}}=0\,,\quad\text{при}\quad\boldsymbol{x}\in\Gamma\bigcup S\,,\tag{24}$$

$$c(\boldsymbol{x},0)=\mathbb{M}^{(h)}(c_0(\boldsymbol{x}))\,,\quad\text{при}\quad\boldsymbol{x}\in\Omega_f\,,\tag{25}$$

где

$$\mathbb{M}^{(h)}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t))=\frac{1}{h^4}\int_t^{t+h}d\tau\int_{R^3}\eta\left(\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{h}\right)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y},\tau)\,d\boldsymbol{y}$$

– оператор сглаживания по переменным $\boldsymbol{x}$ и t, где ядро усреднения $\eta(s)\in\mathbb{C}(R^3)$ – четная неотрицательная функция, $\eta(\boldsymbol{x})=0$, если $|\boldsymbol{x}|\geqslant 1$, $\int_{|\boldsymbol{x}|\leqslant 1}\eta(|\boldsymbol{x}|)\,ds=1$. Сглаженные функции являются гладкими, финитными и при $h\to 0$ сходится по норме $L_2(\Omega'_{T-\beta})$ в любой строго внутренней подобласти $\Omega'_{T-\beta}\subset\Omega_T$, $h\leqslant\beta$(см. [1]).

Для решения задачи (18) – (25) воспользуемся теоремой Шаудера о неподвижной точке. А именно, фиксируем множество $\mathfrak{M}=\{\bar{c}(\boldsymbol{x},t)\in\mathbb{C}(\Omega_T)\ |\ 0\leqslant\bar{c}\leqslant 1\}$.

Пусть $\boldsymbol{v}=\mathbb{E}_{\Omega_f}(\partial\boldsymbol{u}/\partial t)$ есть продолжение $\partial\boldsymbol{u}/\partial t$ из области Ω_f в Ω такое, что

$$\int_\Omega|\boldsymbol{v}|^2dx\leq C\int_{\Omega_f}\left|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right|^2dx\,,$$

$$\int_\Omega|\mathbb{D}\,(x,\boldsymbol{v})|^2\,dx\leq C\int_{\Omega_f}\left|\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)\right|^2dx\,,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\,,$$

с постоянной C не зависящей от ε ([7]).

В первую очередь решим задачу (18) – (22) с $\rho = \rho(\bar{c})$, где $\bar{c} \in \mathfrak{M}$. Полученное решение определяет оператор $\bar{\boldsymbol{u}} = \mathbb{A}(\bar{c})$, действующий из пространства $\mathfrak{M}$ в пространство $\mathfrak{N}$ с нормой

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathfrak{N}} = \max_{0<t<T} \int_\Omega (1-\chi)|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})|^2 dx + \int_{\Omega_T} \chi \left|\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)\right|^2 dxdt\,.$$

Вектор функции из $\mathfrak{N}$ так же удовлетворяют условиям

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = 0\,,\ \boldsymbol{x} \in S\,,$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_f\,.$$

Легко показать, что справедливы следующие неравенства

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{2,\Omega_T} + \|\nabla \boldsymbol{u}\|^2_{2,\Omega_T} \leq C\|\boldsymbol{u}\|_{\mathfrak{N}}$$

$$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right\|_{2,\Omega_f\times(0,T)} \leq C\|\boldsymbol{u}\|_{\mathfrak{N}}\,. \tag{26}$$

Подставляя $\bar{\boldsymbol{u}} = \mathbb{A}(\bar{c})$ в уравнение диффузии (23) приходим к следующей начально – краевой задаче об определении функции $c(\boldsymbol{x},t)$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbb{M}^{(h)}\left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial t}\right) \cdot \nabla c = D_0 \triangle c\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f\,, \quad t > 0\,, \tag{27}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{n}} = 0,\ \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_f\ , \tag{28}$$

$$c(\boldsymbol{x},0) = \mathbb{M}^{(h)}(c_0(\boldsymbol{x})),\ \boldsymbol{x} \in \Omega_f\,, \tag{29}$$

которая определяет оператор на множестве $\mathfrak{N}$: $c = \mathbb{B}(\bar{\boldsymbol{u}})$. Полученная задача с гладкими коэффициентами хорошо изучена (см. [3]) и при каждом фиксированном $h > 0$, имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение, для которого справедливы принцип максимума

$$0 \leqslant c \leqslant 1\,, \tag{30}$$

и энергетическое неравенство

$$\int_0^T \int_{\Omega_f} |\nabla\, c|^2 dxdt \leqslant M \int_{\Omega_T} |\boldsymbol{v}|^2 dxdt\,. \tag{31}$$

Здесь и всюду ниже через M обозначаем постоянные, не зависящие от ε и от параметра сглаживания h.

Суперпозиция

$$c = \mathbb{B} \circ \mathbb{A}(\bar{c}) = \Phi(\bar{c})$$

есть искомый оператор, неподвижные точки которого $c_h = \Phi(c_h)$ определяют решение задачи (18)–(25) $c = c_h$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_h$, $q = q_h$.

Оценка (30) и гладкость решения задачи (27) – (29) показывают, что оператор Φ переводит множество $\mathfrak{M}$ в себя:

$$\Phi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}\,.$$

Если мы докажем, что оператор Φ вполне непрерывен, то согласно теореме Шаудера он имеет неподвижную точку. Для этого воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями.

Лемма 1. *В условиях Теоремы 1 для каждого фиксированного $\bar{c}(x,t) \in \mathfrak{M}$ задача (18) – (22) имеет единственное обобщенное решение $\bar{\boldsymbol{u}}$ и для него справедливы оценки:*

$$\max_{0<t<T} \lambda_0 \int_\Omega (1-\chi)|\mathbb{D}(x, \bar{(\boldsymbol{u})})|^2 dx + \int_{\Omega_T} \left(\mu_0 \chi \left| \mathbb{D}(x, \frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial t}) \right|^2 + |\bar{q}|^2 \right) dxdt \leqslant MF^2\,. \qquad (32)$$

$$\max_{0<t<T} \mu_0 \int_\Omega \chi \left| \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial t}\right)\right|^2 dx + \int_{\Omega_T} (1-\chi)\,\lambda_0 \left| \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial t}\right)\right|^2 dxdt \leqslant MF^2\,. \qquad (33)$$

□ Доказательство существования единственного обобщенного решения задачи (18) – (22) и получение оценки (32) повторяет аналогичные доказательства в ([4]), ([5]). Продифференцируем теперь (18) по t, умножим на $\partial \boldsymbol{u}/\partial t$ и проинтегрируем по области Ω

$$\frac{\mu_0}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \chi |\mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t})|^2 dx + \lambda_0 \int_\Omega (1-\chi)|\mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t})|^2 dx =$$
$$\delta \int_\Omega \chi \frac{\partial c}{\partial t}\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} dx + \int_\Omega \chi \rho(c)\, \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} dx\,.$$

Первое слагаемое преобразуем следующим образом:

$$I = \delta \int_\Omega \chi \frac{\partial c}{\partial t}\boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{v} dx = \delta \int_\Omega \chi \big(\nabla \cdot (D_0 \nabla c) - \boldsymbol{v}\cdot \nabla c\big)(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}) dx =$$
$$\delta \int_\Omega \chi \big(- D_0 \nabla c \cdot \big(\nabla \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{F}\big) - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla c)(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})\big) dx\,.$$

Здесь мы воспользовались уравнением диффузии и тем, что

$$\chi\big(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\big) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \quad t > 0\,.$$

Используя неравенства Гельдера, Коши, Пуанкаре – Фридрихса и Корна и оценками (31) и (32) имеем

$$|I| \leqslant M \int_\Omega \chi |\boldsymbol{v}|^2 |\nabla c| dx + M \int_\Omega \chi |\nabla c|^2 dx + M\int_\Omega \chi |\mathbb{D}(x, \boldsymbol{v})|^2 dx\,.$$

Основное слагаемое здесь

$$I_0 = \int_\Omega \chi|\boldsymbol{v}|^2|\nabla c|dx \leqslant \left(\int_\Omega \chi|\boldsymbol{v}|^4dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \chi|\nabla c|^2dx\right)^{1/2}.$$

Оценив первый сомножитель по теореме вложения ([2]), получим

$$I_0 \leqslant \beta\int_\Omega \chi|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v})|^2dx\left(\int_\Omega \chi|\nabla c|^2dx\right)^{1/2}.$$

Положим

$$y(t) = \int_\Omega \chi|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v})|^2dx\,,$$

Тогда

$$\frac{dy}{dt} \leqslant MF^2 + y\left(\int_\Omega \chi|\nabla c|^2dx\right)^{1/2},$$

согласно неравенству Гронуолла (см. [3])

$$y(t) \leqslant MF^2T\exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau\right),$$

где

$$a(t) = \left(\int_\Omega \chi|\nabla c|^2dx\right)^{1/2}.$$

Не сложно проверить, что

$$\int_0^t a(\tau)d\tau \leqslant \sqrt{t}\left(\int_0^t |a(\tau)|^2d\tau\right)^{1/2}.$$

Окончательно получим:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega \chi\big|\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\big)\big|^2dx \leqslant MF^2T\exp(\sqrt{T}\int_{\Omega_T}\chi|\nabla c|^2dxdt)\,. \blacksquare$$

Лемма 2. *Оператор $\mathbb{A}$ непрерывный.*

☐ Пусть

$$\bar{\boldsymbol{u}}_1 = \mathbb{A}(\bar{c}_1)\,,\ \bar{\boldsymbol{u}}_2 = \mathbb{A}(\bar{c}_2)\,,\ \bar{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{u}}_1 - \bar{\boldsymbol{u}}_2\,,$$

$$\bar{c} = \bar{c}_1 - \bar{c}_2\,,\ \bar{q} = \bar{q}_1 - \bar{q}_2\,,$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}_1 = \frac{\partial\bar{\boldsymbol{u}}_1}{\partial t}\,,\ \bar{\boldsymbol{v}}_2 = \frac{\partial\bar{\boldsymbol{u}}_2}{\partial t}\,,\ \bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{v}}_1 - \bar{\boldsymbol{v}}_2\,.$$

Тогда для разности $\bar{\boldsymbol{u}}$ имеем

$$\nabla\cdot(\mu_0\chi\mathbb{D}(x,\bar{\boldsymbol{v}}) + \lambda_0(1-\chi)\mathbb{D}(x,\bar{\boldsymbol{u}}) - \bar{q}\mathbb{I}) = -\chi\delta\bar{c}\boldsymbol{F}\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\ t>0\,, \tag{34}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,, t > 0\,,$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, t) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in S\,,$$

$$\chi \bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,, \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \quad \int_\Omega q\, \boldsymbol{x} = 0\,.$$

Умножим уравнение (34) на функцию $\bar{\boldsymbol{v}}$ и проинтегрируем по области Ω. Интеграл, стоящий в правой части оценим с помощью неравенств Гельдера и Коши с β:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \lambda_0(1-\chi)|\mathbb{D}(x, \bar{\boldsymbol{u}})|^2 dx + \int_\Omega \mu_0 \chi |\mathbb{D}(x, \bar{\boldsymbol{v}})|^2 = |-\int_\Omega \chi \delta \bar{c} \boldsymbol{F} \cdot \bar{\boldsymbol{v}} dx| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{2\beta} F^2 (|\bar{c}|^{(0)}_{\Omega_f \times (0,T)})^2 + \frac{\beta}{2}\int_\Omega \chi |\bar{\boldsymbol{v}}| dx\,.$$

Применив ко второму слагаемому последовательно неравенства Пуанкаре – Фридрихса и Корна, и положив $\beta = \mu_0 / C$, получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \lambda_0(1-\chi)|\mathbb{D}(x, \bar{\boldsymbol{u}})|^2 dx + \frac{\mu_0}{2}\int_\Omega \chi |\mathbb{D}(x, \bar{\boldsymbol{v}})|^2 dx \leqslant M_1 F^2 \|\bar{c}\|^2_{\mathfrak{M}}\,. \tag{35}$$

Проинтегрировав (35) по t, получим непрерывность оператора $\mathbb{A}$. А именно,

$$\|\bar{\boldsymbol{u}}\|_{\mathfrak{N}} \leqslant M_2 F^2 \|\bar{c}\|_{\mathfrak{M}}\,. \blacksquare$$

Лемма 3. *Оператор $\mathbb{B}$ непрерывный.*

☐ Пусть

$$c_1 = \mathbb{B}(\bar{\boldsymbol{u}}_1)\,, c_2 = \mathbb{B}(\bar{\boldsymbol{u}}_2)\,, \quad c = c_1 - c_2\,, \quad \bar{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{u}}_1 - \bar{\boldsymbol{u}}_2\,,$$

$$\bar{\boldsymbol{w}}_1 = \mathbb{M}^{(h)}(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}_1}{\partial t})\,, \quad \bar{\boldsymbol{w}}_2 = \mathbb{M}^{(h)}(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}_2}{\partial t})\,, \quad \bar{\boldsymbol{w}} = \bar{\boldsymbol{w}}_1 - \bar{\boldsymbol{w}}_2\,.$$

Тогда разность $c(\boldsymbol{x}, t)$ является решением следующей начально – краевой задачи:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D_0 \triangle c + \bar{\boldsymbol{w}}_1 \nabla c - \bar{\boldsymbol{w}} \nabla c_2 = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_f, \quad t \in (0, T)\,; \tag{36}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{n}} = 0\,, \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_f,\ c(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,, \boldsymbol{x} \in \Omega_f\,. \tag{37}$$

Умножим (36) на $c(\boldsymbol{x}, t)$ и проинтегрируем по области Ω_f, применяя формулу интегрирования по частям

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_f} |c|^2 dx + D_0 \int_{\Omega_f} |\nabla c|^2 dx = \int_{\Omega_f} \bar{\boldsymbol{w}}_1 \cdot (c \nabla c) dx + \int_{\Omega_f} \bar{\boldsymbol{w}} \cdot (c_2 \nabla c) dx\,.$$

Функции c_2 и $\bar{\boldsymbol{w}}_1$ ограничены по построению. Оценим правую часть

$$\left| \int_{\Omega_f} \bar{\boldsymbol{w}}_1 \cdot (c \nabla c) dx + \int_{\Omega_f} \bar{\boldsymbol{w}} \cdot (c_2 \nabla c) dx \right| \leqslant N_1 \left(\int_{\Omega_f} (c \nabla c) dx + \int_{\Omega_f} \bar{\boldsymbol{w}} \cdot \nabla c dx \right) \leqslant$$

$$\leqslant N_2\left(\int_{\Omega_f}|c|^2dx+\int_{\Omega_f}|\bar{\boldsymbol{w}}|^2dx\right)+N_3\int_{\Omega_f}|\nabla c|^2dx\,.$$

Проинтегрировав по t обе части неравенства получим

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\Omega_f}|c|^2dx+D_1\int_0^T\int_{\Omega_f}|\nabla c|^2dx\leqslant N_2\left[\int_0^T\int_{\Omega_f}|\bar{\boldsymbol{w}}|^2dxdt+\int_0^T\int_{\Omega_f}|c|^2dx\,,dt\right]$$

$$c(\boldsymbol{x},0)=0.$$

Воспользуемся теперь неравенством Гроноулла:

$$\int_{\Omega_f}|c|^2dx\leqslant N_4\int_0^T\int_{\Omega_f}|\bar{\boldsymbol{w}}|^2dxdt\,.$$

Последнее неравенство, учитывая свойства сглаживания, определение нормы во множестве $\mathfrak{N}$ и неравенство (26), можно переписать следующим образом:

$$\|c\|^2_{2,\Omega_f\times(0,T)}\leqslant N_5\|\bar{\boldsymbol{u}}\|^2_{\mathfrak{N}}\,.$$

Чтобы получить оценку для $|c|^0_{\Omega_t}$, обратимся к Лемме 3.3 ([3], с.95). Нас интересует утверждение леммы о том, что если $u(x,t)\in\mathbb{W}^{2l,l}_q(\Omega_T)$ и $2l-2r-s-(n+2)/q>0$, то при $0\leqslant\lambda<2l-2r-s-(n+2)/q$

$$\langle D^r_tD^s_xu\rangle^{(\lambda)}_{\Omega_T}=b_1\eta^{2l-2r-s-\frac{n+2}{q}-\lambda}\langle\langle u\rangle\rangle^{2l}_{\Omega_T}+b_2\eta^{-(2r+s+\frac{n+2}{q}+\lambda)}\|u\|_{q,\Omega_T}\,.$$

В нашем случае $c(x,t)\in\mathbb{W}^{2,1}_2(\Omega_T)$, то есть $l=1,\quad r=0,\quad s=0,\quad n=3,\quad\lambda=0,$

$$|c|^{(0)}_{\Omega_T}=b_1\eta^{\frac{1}{3}}\langle\langle c\rangle\rangle^{(2)}_{3,\Omega_T}+b_2\eta^{-\frac{5}{3}}\|c\|_{3,\Omega_T}\equiv A\eta^{\frac{1}{3}}+B\eta^{-\frac{5}{3}}\equiv f(\eta)\,.$$

Функция $f(\eta)$ достигает минимума при $\eta=(\frac{5B}{A})^{1/2}$, в этом случае $f(\eta)=b_3A^{5/6}B^{1/6}$ и

$$|c|^{(0)}_{\Omega_T}=b_4\big(\langle\langle c\rangle\rangle^{(2)}_{3,\Omega_T}\big)^{5/6}\big(\|c\|_{3,\Omega_T}\big)^{1/6}.$$

Окончательно получаем следующую оценку:

$$|c|^{(0)}_{\Omega_T}\leqslant b_5\|c\|_{3,\Omega_T}.$$

Справедливо также следующее неравенство:

$$\|c\|_{3,\Omega_T}\leqslant a_1\eta^{\frac{7}{6}}\langle\langle c\rangle\rangle^{(2)}_{2,\Omega_T}+a_2\eta^{-\frac{5}{6}}\|c\|_{2,\Omega_T}\equiv A\eta^{\frac{7}{6}}+B\eta^{-\frac{5}{6}}\equiv f(\eta)\,.$$

Совершенно аналогично получим

$$\|c\|_{3,\Omega_T}\leqslant a_3\|c\|_{2,\Omega_T}\,.$$

Окончательно имеем $\|c\|_{\mathfrak{M}}\leqslant N\|\bar{\boldsymbol{u}}\|_{\mathfrak{N}}$, что и означает непрерывность оператора $\mathbb{B}$. ■

Лемма 4. *Оператор Φ вполне непрерывен.*

$\square$ Оператор Φ является непрерывным, как суперпозиция непрерывных операторов. Для доказательства того, что он вполне непрерывен воспользуемся теоремой Арцела. В нашей задаче для фиксированного $h > 0$ функции $c_h(\boldsymbol{x}, t)$ по построению обладают ограниченными производными по $\boldsymbol{x}$ и по t, следовательно

$$|c_h(\boldsymbol{x}', t) - c_h(\boldsymbol{x}'', t)| \leqslant \left|\frac{\partial c_h(\boldsymbol{x}^*, t)}{\partial x_j}\right| |x'_j - x''_j| \leqslant k_1|x'_j - x''_j|\,, \quad (j = 1, 2, 3)\,,$$

$$|c_h(\boldsymbol{x}, t') - c_h(\boldsymbol{x}, t'')| \leqslant \left|\frac{\partial c_h(\boldsymbol{x}, t^*)}{\partial t}\right| |t' - t''| \leqslant k_2|t' - t''|\,,$$

то есть функции $c_h(\boldsymbol{x}, t)$ равностепенно непрерывны по $\boldsymbol{x}$ и по t. Равномерная ограниченность очевидна. Таким образом, оператор Φ является вполне непрерывным. $\blacksquare$

Так же легко показать, что множество $\mathfrak{M}$ является выпуклым. Следовательно, существует неподвижная точка оператора Φ, обозначим ее как c_h,

$$c_h = \Phi(c_h)\,,$$

и пусть $\boldsymbol{u}_h = \mathbb{A}(c_h)$. Тогда c_h является решением следующей задачи:

$$\nabla \cdot \big(\mu_0\chi\mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}_h) + \lambda_0(1-\chi)\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}_h) - q_h)\mathbb{I}\big) + \rho(c_h)\boldsymbol{F} = 0\,, \tag{38}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h = 0\,, \tag{39}$$

$$\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}, t) = 0 \quad \text{при } \boldsymbol{x} \in S\,, \tag{40}$$

$$\chi\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \tag{41}$$

$$\int_\Omega q_h\, dx = 0\,, \tag{42}$$

$$\frac{\partial c_h}{\partial t} + \mathbb{M}^{(h)}(\boldsymbol{v}_h) \cdot \nabla c_h = D_0 \triangle c_h\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f\,, \quad t \in (0, T)\,, \tag{43}$$

$$\frac{\partial c_h}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma \cup S \tag{44}$$

$$c_h(\boldsymbol{x}, 0) = \mathbb{M}^{(h)}(c_0(\boldsymbol{x})) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f\,, \tag{45}$$

где (43) понимается как интегральное тождество

$$\int_0^T \int_{\Omega_f} \left(c_h\, \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla c_h \cdot \mathbb{M}^{(h)}(\boldsymbol{v}_h)\, \psi - D_0 \nabla c_h \cdot \nabla \psi\right) dxdt = -\int_{\Omega_f} \mathbb{M}^{(h)}(c_0)\psi(\boldsymbol{x}, 0)dx\,,$$

для произвольной гладкой функции $\psi(\boldsymbol{x}, t)$, равной нулю при $t = T$.

Лемма 5. *В условиях Теоремы 1 при фиксированном $h > 0$ для функции $\boldsymbol{v}_h = \mathbb{E}_{\Omega_f}(\partial \boldsymbol{u}_h/\partial t)$, где $\boldsymbol{u}_h = \mathbb{A}(c_h)$, справедлива оценка*

$$\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{x}, t_1) - \nabla \boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{x}, t_2)|^2 dx \leqslant C|t_1 - t_2|^{1/2}\,, \tag{46}$$

где константа C не зависит от h и ε.

□ Индекс h опускаем. Продифференцируем (38) по t, умножим на произвольную гладкую функцию $\boldsymbol{\varphi}$ и проинтегрируем по области Ω. Получим следующее интегральное тождество:

$$\mu_0 \frac{d}{dt}\int_\Omega \chi D\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\right) : D\big(x, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)dx = I_2(t)\,,$$

где

$$I_2(t) = -\lambda_0 \int_\Omega (1-\chi) D\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\right) : D\left(x, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\right)dx +$$

$$+ \int_\Omega \left(\delta \frac{\partial c}{\partial t}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)dx + \int_\Omega \rho(c)\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\right)dx\,,$$

которое справедливо для произвольной соленоидальной функции $\boldsymbol{\varphi} \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

Выражение $\partial c/\partial t$ выразим из уравнения (43) и поведем аналогичные рассуждения, что и в Лемме 1.

В силу оценок (32)-(33), $I_2 \in L_2(0,T)$ и

$$\int_{t_1}^{t_2} |I_2(t)|dt \leqslant C\,|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}\,\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_{2,\Omega}\,.$$

Тогда

$$\int_\Omega \chi^\varepsilon \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t}\right) : \mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{\varphi}\big)dx \leqslant C\,|t_1-t_2|^{1/2}\,\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_{2,\Omega}\,,$$

где

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t_2) - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t_1)\,.$$

В частности, для

$$\boldsymbol{\varphi} = \tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t_2) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t_1),\ \ \|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_{2,\Omega} \leqslant C\,,\ \ \forall\, t_1,\, t_2\, \in (0,T)\,,$$

имеем

$$\int_\Omega \chi \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t}\right) : \mathbb{D}\left(x, \tilde{\boldsymbol{v}}\right)dx \leqslant C\,|t_1-t_2|^{1/2}\,.$$

Но, по определению продолжения $\boldsymbol{v}$,

$$\chi D\big(x, \tilde{\boldsymbol{v}}\big) = \chi D\left(x, \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t}\right)\,.$$

Тогда

$$\int_\Omega \chi D\left(x, \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t}\right) : D\left(x, \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t}\right)dx = \int_\Omega \chi D\left(x, \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t}\right) : D\left(x, \tilde{\boldsymbol{v}}\right)dx \leqslant C\,|t_1-t_2|^{1/2}.$$

Применив к последнему неравенство Корна, получим оценку в утверждении леммы. ■

Лемма 6. *Решение $(\boldsymbol{w}, p, c)$ исходной задачи (1) – (8) есть предел при $h \to 0$ решений $(\boldsymbol{u}_h, q_h, c_h)$ задачи (38) – (45).*

$\square$ Умножим (38) на произвольную гладкую вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$, равную нулю на границе S и при $t = T$, и проинтегрируем по области Ω_T.

$$\int_{\Omega_T} (\mu_0 \chi \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}_h) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) + \lambda_0 (1-\chi) \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}_h) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) - q_h \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})\, dx\, dt =$$

$$\int_{\Omega_T} \rho(c_h) \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx dt. \tag{47}$$

Пусть $h \to 0$. Легко видеть, что оценки (30) – (33) и (46) справедливы для всех h, с постоянными, не зависящими от h и ε.

Оценки (31), (32) и (33) позволяют из последовательностей $\{\boldsymbol{u}_h\}$, $\{q_h\}$ и $\{c_h\}$ выбрать подпоследовательности такие, что

$$\boldsymbol{u}_h \rightharpoonup \boldsymbol{w} \quad \text{слабо в} \quad W^{1,1}_2(\Omega_f \times (0,T)) \bigcap W^{1,0}_2(\Omega_s \times (0,T)),$$

$$q_h \rightharpoonup p \quad \text{слабо в} \quad L_2(\Omega_T),$$

$$c_h \rightharpoonup c \quad \text{слабо в} \quad W^{1,0}_2(\Omega_f \times (0,T)).$$

Переходя к пределу в неравенствах (30) – (33) и (46), получим требуемые в условии теоремы оценки.

В интегральном тождестве (47) предельный переход стандартный.

Аналогично поступим с уравнением (43), то есть умножим на произвольную гладкую функцию $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ равной нулю при $t = T$ и проинтегрируем по цилиндру $\Omega_f \times (0,T)$:

$$\int_0^T \int_{\Omega_f} \left(c_h \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla c_h \cdot \mathbb{M}^{(h)}(\boldsymbol{v}_h)\, \psi - D_0 \nabla c_h \cdot \nabla \psi \right) dx dt =$$

$$-\int_{\Omega_f} \mathbb{M}^{(h)}(c_0) \psi(\boldsymbol{x}, 0) dx. \tag{48}$$

Здесь есть сложность при предельном переходе $h \to 0$, только в одном слагаемом, а именно

$$\nabla c_h \cdot \mathbb{M}^{(h)}(\boldsymbol{v}_h),$$

так как оба множителя сходятся лишь слабо.

Но легко показать, что последовательность $\boldsymbol{v}_h$ при $h \to 0$ сходится сильно в $L(\Omega_T)$ к функции $\boldsymbol{v} = \mathbb{E}_{\Omega_f}(\partial \boldsymbol{u}/\partial t)$.

Действительно, зафиксируем счетное множество $\left(t_{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ из отрезка и выберем подпоследовательность $\{h > 0\}$ такую, что последовательность $\{\nabla \boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{x}, t_{(k)})\}$ будет сходиться слабо в $L_2(\Omega)$ при $h \to 0$ для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$. Это всегда возможно в силу оценки (32) и стандартного диагонального процесса. Последнее и оценка ((46)) обеспечивают слабую сходимость в $L_2(\Omega)$ последовательности $\nabla \boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{x}, t)$ для всех $t \in (0, T)$.

Используя компактное вложение пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ ([2]) имеем сильную сходимость $\{\boldsymbol{v}_{(h)}(\boldsymbol{x},t)\}$ в $L_2(\Omega)$ для всех $t \in (0,T)$.

В остальных слагаемых интегрального тождества (48) предельный переход стандартен. ■

Из доказанных лемм следует утверждение теоремы 1.

Литература

1. Adams R.E. Sobolev spaces, Academic Press / New York, 1975.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / М.: Мир, 1972.
3. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type / Providence, Rhode Island, 1968.
4. Meirmanov A., Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media / Siberian Mathematical Journal. – 2007. – 48. – P.519-538.
5. Meirmanov A. Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermo-elastic porous media / Euro Journal of Applied Mathematics. – 2008. – 19. – P.259-284.
6. Meirmanov A., Zimin R. Mathematical models of a diffusion-convection in porous media // Electronic Journal of Differential Equations. – 2012.
7. Зимин Р.Н. О продолжении функций, заданных на периодических множествах // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2010. – 17(88); 20. – С.65-73.

CORRECTNESS OF DIFFUSION-CONVECTION MATHEMATICAL MODEL OF ADMIXTURE IN POROELASTIC MEDIA ON MICROSCOPIC LEVEL

A.M. Meirmanov, R.N. Zimin, O.V. Galtseva, O.A. Galtsev

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Meirmanov@bsu.edu.ru, reshat85@mail.ru

Abstract. System describing the joint motion of incompressible viscous liquid and incompressible elastic skeleton is under consideration. Density of liquid depends on the admixture concentration. The system is completed with the diffusion-convection equation in the liquid domain. Existence of the weak solution of the initial-boundary problem for this system in the bounded domain is proved.

Key words: Stokes' and Lamé's system, diffusion-convection equation.