УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И ПУАНКАРЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ЧАПЛЫГИНА

С.А. Алдашев [1)]

Научный инстиут прикладной математики и информатики при АГУ имени К.Жубанова, ул. Братьев Жубановых, 256, Актобе, Казахстан, e-mail: aldash51@mail.ru

Аннотация. В работе показано, что задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина имеют единственное решение.

Ключевые слова: задачи Дирихле и Пуанкаре, корректность, вырождение, многомерные уравнения.

В [1] было показано, что на плоскости одна из фундаментальных задач математической физики – изучение поведения колеблющейся струны некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как замечено в [2,3], задача Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. В [4] показано, что решение задачи Дирихле существует в прямоугольных областях. В дальнейшем, эта задача исследовалась методами функционального анализа [5], которые неэффективны в приложениях.

В пространстве [6,7] получены теоремы единственности решения задачи Дирихле для строго гиперболических уравнений, а [8,9] доказаны корректность задачи Дирихле и Пуанкаре для многомерного волнового уравнения.

Насколько нам известно, многомерные задачи Дирихле и Пуанкаре для вырождающихся гиперболических уравнений ранее не изучались.

В настоящей работе показано, что задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина имеют единственное решение.

1. Постановка задач и результаты. Пусть D_β – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = 0$ где $|x|$– длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через Γ_β, S_β, S_0 соответственно.

В области D_β рассмотрим взаимно-сопряженные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0\,, \tag{1}$$

[1]Алдашев С.А, док.физ.-мат. наук, проф. Института прикладной математики и информатики при АГУ.

$$L^*v \equiv g(t)\Delta_x v - v_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i v_{x_i} - b v_t + d v = 0, \tag{1*}$$

где $g(t) > 0$ при $t > 0$, и может обращаться в нуль при $t = 0$, $g(t) \in C([0,\beta]) \cap C^2((0,\beta))$, Δ_x- оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m \geqslant 2$, а $d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leq \pi$, $i = 2,3,...,m-1$.

В качестве многомерных задач Дирихле и Пуанкаре рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Найти решения уравнения (1) в области D_β, который находятся в классе $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$ и удовлетворяют краевым условиям

$$u\Big|_{S_\beta} = \varphi(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi(t,\theta), \quad u\Big|_{S_0} = \tau(r,\theta), \tag{2}$$

или

$$u\Big|_{S_\beta} = \varphi(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi(t,\theta), \quad u_t\Big|_{S_0} = \nu(r,\theta). \tag{3}$$

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0,1,...$ – пространства Соболева.

Имеет место ([10])

Лемма 1. *Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$. Если $l \geqslant m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. *Для того, чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \qquad c_1,\, c_2 = \mathrm{const}.$$

Через $\widetilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\widetilde{b}_n^k(r,t)$, $\widetilde{c}_n^k(r,t)$, $\widetilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\bar{\varphi}_n^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, $\bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$, обозначим коэффициенты ряда (4), соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1,...,m$, $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H – единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in W_2^l(D_\beta) \subset C(\overline{D}_\beta), l \geq m+1$, $i = 1,...,m$. Тогда справедлива

Теорема. *Если* $\varphi(r,\theta) \in W_2^p(S_\beta)$, $\psi(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\beta)$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) \in W_2^p(S_0)$, $p > \frac{3m}{2}$ *и выполняется условие*

$$\cos \mu_s \beta' \neq 0, \quad s = 1, 2, ..., \tag{5}$$

то задача 1 имеет единственное решение, где $\mu_{s,n}$ *– положительные нули функций Бесселя первого рода* $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$, $\beta' = \int\limits_0^\beta \sqrt{g(\xi)} d\xi$.

2. Разрешимость задачи 1. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$Lu \equiv g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{\delta u}{r^2}\right) - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0\,, \tag{6}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\right)\,, \quad g_1 = 1\,, \quad g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2\,, \quad j > 1\,.$$

Известно ([10]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta)\,, \tag{7}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$– функции, подлежащие определению.

Подставив (7) в (6), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\bar{u}_n^k$ получим ([11,12])

$$g(t)\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}g(t)\rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m} a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{g(t)\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}g(t)\rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k + \right.$$

$$\left. + \left[\tilde{c}_n^k - \lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}g(t) + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}_{in-1}^k - na_{in}^k)\right]\bar{u}_n^k\right\} = 0\,. \tag{8}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$g(t)\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r}g(t)\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1 = 0\,, \tag{9}$$

$$g(t)\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r}g(t)\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2}g(t)\rho_1^k\bar{u}_1^k =$$
$$= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t} + \tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1\right), \quad n=1,\ k=\overline{1,k_1}, \tag{10}$$

$$g(t)\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}g(t)\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}g(t)\rho_n^k\bar{u}_n^k =$$
$$-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{in-1}^k)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\}, \tag{11}$$
$$k=\overline{1,k_n},\ n=2,3,\ldots.$$

Суммируя уравнение (10) от 1 до k_1, а уравнение (11) – от 1 до k_n, затем сложив полученные выражения вместо с (9), приходим к уравнению (8).

Отсюда следует, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$ – решение системы (9)-(11), то оно является решением уравнения (8).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (9)-(11) можно представить в виде

$$g(t)\left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right) - \bar{u}_{ntt}^k = f_n^k(r,t), \tag{12}$$

где $f_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r,t) = 0$.

Далее, из краевых условий (2) и (3), в силу (7), с учетом леммы 1 будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r,\beta) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1,t) = \psi_n^k(t), \quad \bar{u}_n^k(r,0) = \tilde{\tau}_n^k(r), \quad k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\ldots, \tag{13}$$

$$\bar{u}_n^k(r,\beta) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1,t) = \psi_n^k(t), \quad \bar{u}_{nt}^k(r,0) = \tilde{\nu}_n^k(r), \quad k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\ldots. \tag{14}$$

Выполнив в (12) замену $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$ и положив затем $r=r$,

$$y = \left(\frac{3}{2}\int_0^t\sqrt{g(\xi)}d\xi\right)^{\frac{2}{3}},$$

получим

$$yu_{nrr}^k - u_{nyy}^k + \frac{\bar{\lambda}_n y}{r^2}u_n^k - b(y)u_{ny}^k = \bar{f}_n^k(r,y), \tag{15}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m)-4\lambda_n)}{4}, \quad b(y) = \frac{1}{2g}\left[\frac{dg}{dy} - \frac{g}{y}\right], \quad \bar{f}_n^k(r,y) = r^{\frac{(1-m)}{2}}\frac{f_n^k(r,t)}{y^2}.$$

Полагая $u_n^k = \omega_n^k \exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(\xi)d\xi\right]$, уравнение (15) приводим к виду

$$y\omega_{nrr}^k - \omega_{nyy}^k + \frac{\bar{\lambda}_n y}{r^2}\omega_n^k = c(y)\omega_n^k + \tilde{f}_n^k(r,y), \tag{16}$$

$$c(y) = -\frac{1}{4}(b^2 + 2b'_y) \in C(y > 0)\,, \quad \widetilde{f}_n^k(r, y) = f_n^k(r, y) \exp\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(\xi)d\xi\right].$$

Уравнение (16), в свою очередь, с помощью замены переменных $r = r$, $x_0 = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ переходит в уравнение

$$v_{nrr}^k - v_{nx_0x_0}^k - \frac{v_{nx_0}^k}{3x_0} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\, v_n^k = g_n^k(r, x_0)\,, \tag{17}$$

$$v_n^k(r, x_0) = \omega_n^k\left[r, \left(\frac{3}{2}x_0\right)^{\frac{2}{3}}\right],$$

$$g(r, x_0) = \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left\{\widetilde{f}_n^k\left[r, \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right] + c\left[\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\omega_n^k\left[r, \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\right\}.$$

При этом краевые условия (13) и (14) соответственно примут вид

$$v_n^k(r, \beta') = \varphi_n^k(r)\,, \quad v_n^k(1, x_0) = \psi_n^k(x_0),\ v_n^k(r, 0) = \tau_n^k(r)\,, \tag{18}$$

$$v_n^k(r, \beta') = \varphi_n^k(r),\ v_n^k(1, x_0) = \psi_n^k(x_0),\ \lim_{x_0 \to 0} x_0^{\frac{1}{3}}\frac{\partial}{\partial x_0}v_n^k = \nu_n^k(r)\,, \tag{19}$$

$$\varphi_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\,\bar{\varphi}_n^k(r)\exp\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tilde{\beta}} b(\xi)d\xi\right],\ \tilde{\beta} = \left(\frac{3}{2}\int\limits_0^{\beta}\sqrt{g}(\xi)d\xi\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\psi_n^k(x_0) = \psi_n^k(t)\exp\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(\xi)d\xi\right],\ \tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\,\bar{\tau}_n^k(r),\ \nu_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\,\bar{\nu}_n^k(r)\,.$$

Наряду с уравнением (17) рассмотрим уравнение

$$L_\alpha v_{\alpha,n}^k \equiv v_{\alpha,nrr}^k - v_{\alpha,nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0}v_{\alpha,nx_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\, v_{\alpha,n}^k = g_{\alpha,n}^k(r, x_0)\,, \tag{20_α}$$

$$L_0 v_{0,n}^k \equiv v_{0,nrr}^k - v_{0,nx_0x_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\, v_{0,n}^k = g_{0,n}^k(r, x_0), \tag{20_0}$$

$$g_{\alpha,n}^k(r, x_0) = \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha}\left\{\widetilde{f}_n^k\left[r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right] + c\left[\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]v_{\alpha,n}^k\left[r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]\right\},$$

$$g_{0,n}^k(r, x_0) = \widetilde{f}_n^k(r, x_0) + c(x_0)v_{0,n}^k(r, x_0),\ 0 < \alpha = \mathrm{const} < 1.$$

Отметим, что уравнение (17) совпадает с уравнением (20_α) при $\alpha = \frac{1}{3}$.

Как показано в [11, 12] (см. также [13]), существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнения (20_α) и (20_0).

Утверждение 1. *Если $\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ – решение задачи Коши для уравнения* (20_0), *удовлетворяющее условиям*

$$\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0)=\tau_n^k(r)\,,\quad \frac{\partial}{\partial x_0}\,\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0)=0\,, \tag{21}$$

то функция

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)=\gamma_\alpha\int\limits_0^1 \upsilon_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\equiv 2^{-1}\gamma_\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)x_0^{1-\alpha}D_{0x_0^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{22}$$

при $\alpha>0$ *является решением уравнения* (20_α) *с данными (21).*

Утверждение 2. *Если $\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$– решение задачи Коши для уравнения* (20_0), *удовлетворяющее условиям*

$$\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0)=\frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)},\ \frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0)=0\,, \tag{23}$$

то при $0<\alpha<1$ *функция*

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)=\gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q\left[x_0^{1-\alpha+2q}\int_0^1\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right]\equiv$$

$$\equiv\gamma_{2-k+2q}2^{q-1}\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right)D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0}\right] \tag{24}$$

является решением уравнения (20_α) *с начальными данными*

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,0)=0,\ \lim_{x_0\to 0}x_0^\alpha\frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)=\nu_n^k(r), \tag{25}$$

где $\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha=2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, $\Gamma(z)$ *– гамма-функция,* D_{0t}^α*– оператор Римана-Лиувплля ([14]), а* $q\geq 0$ *– наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству* $2-\alpha+2q\geq$ $\geq m-1$.

При этом функции $g_{\alpha,n}^k(r,x_0)$, $g_{0,n}^k(r,x_0)$ связаны формулами (22) в случае утверждения 1 и формулами (24) в случае утверждения 2.

Теперь переходим к решению задачи (20_α), (18) и (20_α), (19). Решение задачи (20_α),(18) будем искать в виде

$$\upsilon_{\alpha,n}^k(r,x_0)=\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)+\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)\,, \tag{26}$$

где $\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ – решение задачи Коши (20_α), (21), а $\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ – решение краевой задачи для уравнения

$$L_\alpha\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}=\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha}c\left[\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}, \tag{$20'_\alpha$}$$

с данными

$$v_{\alpha,n}^{k,2}(r,\beta') = \varphi_n^k(r) - v_{\alpha,n}^{k,1}(r,\beta'),\ v_{\alpha,n}^{k,2}(1,x_0) = \psi_n^k(x_0) - v_{\alpha,n}^{k,1}(1,x_0),\ v_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0\,. \tag{27}$$

Учитывая формулы (22), (24), а также обратимость оператора D_{0t}^{α} ([14]) задачи (20_α), (21) и ($20'_\alpha$), (27), соответственно сводим к задаче Коши (20_0), (21), имеющее единственное решение ([12, 15]) и к задаче для уравнения

$$L_0 v_{0,n}^{k,1} = c(x_0) v_{0,n}^{k,1}\,, \tag{$20'_0$}$$

с условием

$$v_{0,n}^{k,1}(r,\beta') = \varphi_{1n}^k(r)\,, \quad v_{0,n}^{k,1}(1,x_0) = \psi_{1n}^k(x_0)\,, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} v_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0\,, \tag{28}$$

где $\varphi_{1n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(x_0)$ – функции, вырождающиеся, соответственно через $\varphi_n^k(r)$, $\tau_n^k(r)$ и $\psi_n^k(x_0)$, $\tau_n^k(r)$.

Произведя замену $\bar{v}_{0,n}^{k,1}(r,x_0) = v_{0,n}^{k,1}(r,x_0) - \psi_{1n}^k(x_0)$ задачу ($20'_0$), (28)приведем к следующей задаче

$$L\bar{v}_{0,n}^{k,1} \equiv \bar{v}_{0,nrr}^{k,1} - \bar{v}_{0,nx_0x_0}^{k,1} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\bar{v}_{0,n}^{k,1} = \bar{g}_{0,n}^k(r,x_0)\,, \tag{29}$$

$$\bar{v}_{0,n}^{k,1}(r,\beta') = \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r)\,, \quad \bar{v}_{0,n}^{k,1}(1,x_0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial x_0}\bar{v}_{0,n}^{k,1} = -\psi_{1nx_0}^k(0) = c_0\,, \tag{30}$$

$$\bar{g}_{0,n}^k(r,x_0) = c(x_0)\bar{v}_{0,n}^{k,1}(r,x_0) + \psi_{1nx_0x_0}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\psi_{1n}^k,\ \ \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \varphi_{1n}^k(r) - \psi_{1n}^k(\beta')\,.$$

Решение задачи (29), (30) ищем в виде

$$\bar{v}_{0,n}^{k,1}(r,x_0) = \omega_{1n}^k(r,x_0) + \omega_{2n}^k(r,x_0), \tag{31}$$

где $\omega_{1n}^k(r,x_0)$– решение задачи

$$L\omega_{1n}^k = \widetilde{g}_{0,n}r,x_0 = c_0\omega_{1n}^k + \psi_{1nx_0x_0}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\psi_{1n}^k, \tag{32}$$

$$\omega_{1n}^k(r,\beta') = 0\,, \quad \omega_{1n}^k(1,x_0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial x_0}\omega_{1n}^k(r,0) = 0, \tag{33}$$

а $\omega_{2n}^k(r,x_0)$ – решение задачи

$$L\omega_{2n}^k = c(x_0)\omega_{2n}^k\,, \tag{34}$$

$$\omega_{2n}^k(r,\beta') = \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r)\,, \quad \omega_{2n}^k(1,x_0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial x_0}\omega_{2n}^k(r,0) = c_0\,. \tag{35}$$

Решение выше указанных задач, рассмотрим в виде

$$\omega_n^k(r,x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(x_0)\,, \tag{36}$$

при этом пусть

$$\tilde{g}_{0,n}^{k}(r,x_0)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(x_0)R_s(r)\,,\quad \tilde{\varphi}_{1n}^{k}(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}R_s(r)\,,\quad c_0=\sum_{s=1}^{\infty}e_{s,n}R_s(r)\,. \tag{37}$$

Подставляя (36) в (32), (33), с учетом (37), получим

$$R_{srr}+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s+\mu R_s=0\,,\quad 0<r<1\,, \tag{38}$$

$$R_s(1)=0,\ \left|R_s(0)\right|<\infty\,, \tag{39}$$

$$T_{sx_0x_0}+\mu T_s(x_0)=-a_{s,n}(x_0),\ 0<x_0<\beta\,, \tag{40}$$

$$T_s(\beta')=0\,,\quad T_{sx_0}(0)=0\,. \tag{41}$$

Ограниченным решением задачи (38), (39) является (см. [16])

$$R_s(r)=\sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r)\,, \tag{42}$$

где $\nu=\frac{n+(m-2)}{2}$, $\mu=\mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (40) представимо в виде (см. [16])

$$T_{s,n}(x_0)=c_{1s}\cos\mu_{s,n}x_0+c_{2s}\sin\mu_{s,n}x_0+\frac{\cos\mu_{s,n}x_0}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^{x_0}a_{s,n}(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi d\xi-$$

$$-\frac{\sin\mu_{s,n}x_0}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^{x_0}a_{s,n}(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi d\xi\,,$$

c_{1s},c_{2s} – произвольные постоянные, удовлетворив второму условию условия (41) будем иметь

$$\begin{gathered}\mu_{s,n}T_{s,n}(x_0)=c_{1s}\cos\mu_{s,n}x_0+\cos\mu_{s,n}x_0\int\limits_0^{x_0}a_{s,n}(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi d\xi\ -\\ -\sin\mu_{s,n}x_0\int\limits_0^{x_0}a_{s,n}(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi d\xi\,.\end{gathered} \tag{43}$$

Подставляя (42) в (37) получим

$$\begin{gathered}r^{-\frac{1}{2}}\tilde{g}_{0,n}^{k}(r,x_0)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(x_0)J_\nu(\mu_{s,n}r),\quad r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_{n}^{k}(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r)\,,\\ r^{-\frac{1}{2}}c_0=\sum_{s=1}^{\infty}e_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r),\ 0<r<1.\end{gathered} \tag{44}$$

Ряды (44) – разложения в ряды Фурье-Бесселя ([17]), если

$$a_{s,n}(x_0) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\,\tilde{g}^k_{0,n}(\xi,x_0)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi =$$
$$2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\left[c(x_0)\omega^k_n(\xi,x_0) + \psi^k_{1nx_0x_0} - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\psi^k_{1n}(x_0)\right]J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\,, \tag{45}$$

$$b_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{\varphi}^k_{1n}(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,\ e_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 c_0\sqrt{\xi}J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi\,.$$

Учитывая свойства ортогональности функций Бесселя (см. [17])

$$\int\limits_0^1 \xi J_\nu(\mu_{s,m}\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi = \begin{cases} 0, n\neq m, \\ \dfrac{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2}{2}\,, \quad n=m, \end{cases}$$

из (45), (36), (42) имеем равенство

$$a_{s,n}(x_0) = c(x_0)T_{s,n}(x_0) + 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\left[\psi^k_{1nx_0x_0} - \frac{\bar{\lambda}_n}{\xi^2}\psi^k_{1n}(x_0)\right]J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi\,. \tag{46}$$

Подставляя (46) в (43) получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$T_{s,n}(x_0) = f_{s,n}(x_0) + \int\limits_0^{x_0} G_{s,n}(x_0,\xi)T_{s,n}(\xi)d\xi\,,$$

которое имеет единственное непрерывное решение (см. [18])

$$T_{s,n}(x_0) = f_{s,n}(x_0) + \int\limits_0^{x_0} R_{s,n}(x_0,\xi;1)f_{s,n}(\xi)d\xi\,, \tag{47}$$

где

$$\mu_{s,n}f_{s,n}(x_0) = c_{1s}\mu_{s,n}\cos\mu_{s,n}x_0 + 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^{x_0}\left\{\int\limits_0^1 \sqrt{\eta}\left[\psi^k_{1n\xi\xi} - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{\bar{\lambda}_n}{\eta^2}\psi^k_{1n}\right]J_\nu(\mu_{s,n}\eta)d\eta\right\}\sin\mu_{s,n}(\xi - x_0)d\xi\,, \tag{48}$$

$\mu_{s,n}G_{s,n}(x_0,\xi) = c(\xi)\sin\mu_{s,n}(\xi - x_0)$, $R_{s,n}(x_0,\xi;1)$ – резольвента ядра $G_{s,n}(x_0,\xi)$.

Из (47), (41) будем иметь

$$f_{s,n}(\beta') + \int\limits_0^{\beta'} R_{s,n}(\beta',\xi;1) f_{s,n}(\xi) d\xi = 0\,. \tag{49}$$

Далее, подставляя (48) в (49), при выполнении условий (5) однозначно определим постоянное c_{1s}, $s = 1, 2, \ldots$. Таким образом, решением задачи (32), (33) является функция

$$\omega_{1n}^k(r, x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r}\, T_{s,n}(x_0) J_\nu(\mu_s r)\,, \tag{50}$$

где $T_{s,n}(x_0)$ находится из (47).

Теперь, подставляя (36) в (34), (35), с учетом (37), имеем задачу

$$V_{sx_0x_0} + \mu_{s,n}^2 V_s = c(x_0) V_s\,,$$

$$V_s(\beta') = b_{s,n}, \;\; V_{sx_0}(0) = e_{s,n}\,,$$

решение которого определяется по формуле (47), где

$$\mu_{s,n} f_{s,n}(x_0) = c_{1s}\mu_{s,n} \cos \mu_{s,n} x_0 + e_{s,n} \sin \mu_{s,n} x_0\,.$$

Из (47), (51),(49) при выполнении условии (5) определим постоянное c_{1s}, $s = 1, 2\ldots$. Следовательно, решение задачи (34), (35) записывается в виде

$$\omega_{2n}^k(r, x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r}\, V_{s,n}(x_0) J_\nu(\mu_s x_0)\,. \tag{52}$$

Таким образом, единственным решением задачи (29), (30) является функция (31), где $\omega_{1n}^k(r, x_0)$ определяется из (50), а $\omega_{2n}^k(r, x_0)$ из (52).

Далее, используя утверждения 1 и 2, устанавливается однозначная разрешимость задач (20_α), (21)и (20_α), (28). Значит, из (26) следует, что задача (20_α), (18), также имеет единственное решение.

Теперь будем решать задачу (20_α), (19) в виде (26), где $\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0)$ – решение задачи Коши (20_α), (25), а $\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0)$ – решение задачи для (20_α) с данными

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,\beta') = \varphi_n^k(r) - \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,\beta'), \;\; \upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(1,x_0) = \psi_n^k(x_0) - \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(1,x_0), \;\; \frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,0) = 0\,. \tag{53}$$

Используя формулы (24),(22), задачи (20_α), (25) и (20_α), (53) соответственно приведем к задаче Коши (20_0), (23) и к задаче (20_0), (28), где $\varphi_{1n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(x_0)$– функций, теперь вырождающихся, соответственно через $\varphi_n^k(r)$, $\nu_n^k(r)$ и $\psi_n^k(x_0)$, $\nu_n^k(r)$.

Таким образом, задача (20_α), (19) также однозначно разрешима. Следовательно, сначала решив задачу (9), (13) $(n = 0)$, а затем (10), (13) $(n = 1)$ и т.д. найдем последовательно все $\upsilon_{\alpha,n}^k(r, x_0)$ из (26), где $\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0)$, $\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0), k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ определяются из двумерных задач.

Итак, в области D_β, имеет место

$$\int\limits_H \rho(\theta) Lu\, dH = 0\,. \tag{54}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$, V_0 плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$, плотной в $L_2(H)$, а $T(t)\in V_1$, V_1 плотна в $L_2((0,\beta))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in\in V$, $V=V_0\otimes H\otimes V_1$ плотна в $L_2(D_\beta)$ ([19]).

Отсюда и из (54), следует, что

$$\int\limits_{D_\beta} f(r,\theta,t) Lu\, dD_\beta = 0$$

и

$$Lu = 0, \quad \forall (r,\theta,t)\in D_\beta\,.$$

Таким образом, решением задачи 1 является функция (7), где $\overline{u}_n^k(r,t)$ находятся из задачи (8), (9) в случае задачи (1), (2) и из (8), (10) – в случае задачи (1), (3).

Учитывая формулу $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$ (.[17]), оценки (.[20, 10])

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\ \ \nu\geq 0,$$

$$|k_n|\leq c_1 n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q} Y^k_{n,m}(\theta)\right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad c_1, c_2 = \text{const}, \quad j=\overline{1,m-1}, \quad q = 0,1,\ldots, \tag{55}$$

а также леммы, которые дают ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $g(t)$, $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, как в [11, 12], можно показать, что полученное решение (7) принадлежит искомому классу $C^1(\bar{D}_\beta)\cap C^2(D_\beta)$. Следовательно, разрешимость задачи 1 установлено.

3. Единственность решения задачи 1. Сначала рассмотрим задачу (1), (2) и докажем ее единственность решения. Для этого построим решение задачи Дирихле для уравнения (1*) с данными

$$v\Big|_{S_\beta\cup\Gamma_\beta} = 0, \quad v\Big|_{S_0} = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y^k_{n,m}(\theta), \quad k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\ldots, \tag{56}$$

где $\bar{\tau}_n^k(r)\in V$, V – множество функций $\tau(r)$ из класса $C^1([0,1])\cap C^2((0,1))$. Множество V плотно всюду в $L_2((0,1))$ [19]. Решение задачи (1*), (55) будем искать в виде (7), где функции $\bar{v}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п.2, функции $\bar{v}_n^k(r,t)$ удовлетворяют системы уравнений (9)-(11), где $\tilde{a}^k_{in}$, a^k_{in}, $\tilde{b}^k_n$ заменены соответственно на $-\tilde{a}^k_{in}$, $-a^k_{in}$, $-\tilde{b}^k_n$, а $\tilde{c}^k_n$ на $\tilde{d}^k_n$, $i=1,\ldots,m$, $k=\overline{1,k_n}$, $\quad n=0,1,\ldots$.

Далее, из краевого условия (56), в силу (7), получим

$$\bar{v}_n^k(r,\beta) = \bar{v}_n^k(1,t) = 0, \quad \bar{v}_n^k(r,0) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\ldots. \tag{57}$$

Как ранее замечено, что каждое уравнение системы (9)-(11) представимо в виде (12). В п.2 показано, что задача (12), (57) имеет единственное решение, если выполнено соотношение (5).

Таким образом, решение задачи (1*), (56) в виде ряда (7) построено, которая в силу оценок (55) принадлежит классу $C^1\left(\bar{D}_\beta\right) \cap C^2\left(D_\beta\right)$.

Из определения сопряженных операторов L, L^*([21]) имеем

$$vLu - uL^*v = -vP(u) + uP(v) - uvQ\,,$$

где

$$P(u) = g(t)\sum_{i=1}^{m} u_{x_i}\cos\left(N^\perp, x_i\right) - u_t\cos\left(N^\perp, t\right), Q = \sum_{i=1}^{m} a_i\cos\left(N^\perp, x_i\right) - b\cos\left(N^\perp, t\right)\,,$$

а $N^\perp$ – внутренняя нормаль к границе ∂D_β, по формуле Грина имеем

$$\int\limits_{D_\beta}\left(vLu - uL^*v\right)dD_\beta = \int\limits_{\partial D_\beta}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N}\right)M + uvQ\right]ds\,, \tag{58}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N} = g(t)\sum_{i=1}^{m}\cos\left(N^\perp, x_i\right)\frac{\partial}{\partial x_i} - \cos\left(N^\perp, t\right)\frac{\partial}{\partial t}\,, \quad M^2 = g^2\sum_{i=1}^{m}\cos^2\left(N^\perp, x_i\right) + \cos^2\left(N^\perp, t\right)$$

Из (58), принимая во внимание однородные граничные условия (2) и условия (56) получим

$$\int\limits_{S_0}\tau(r,\theta)u_t(r,\theta,0)ds = 0\,. \tag{59}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна $L_2(S_0)$ (см. [19]), то из (59) заключаем, что $u_t(r,\theta,0) = 0$, $\forall(r,\theta) \in S_0$. Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши: $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = = 0$ для уравнения (1) (см. [21]) будем иметь $u(x,t) = 0$, $\forall(x,t) \in D_\beta$.

Таким образом, единственность решения задачи (1), (2) доказана. Ее справедливость для задачи (1), (3) показывается аналогично. Теорема доказана полностью.

Литература

1. Hadamard J. Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique // Princeton University Bulletin. – 1902. – 13. – P.49-52.

2. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа / М.: Изд. АН СССР, 1959. – 164 с.

3. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных / М.: Наука, 2006. – 287 с.

4. Bourgin D.G. and Duffin R. The Dirichlet problem the vibrating string equation // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1939. – 45. – P.851-858.

5. Fox D.W., Pucci C. The Dirichlet problem the wave equation //Annali di Mathematica Pura ed Applicata. – 1958. – 46. – P.155-182.

6. Нахушев А.М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференциальные уравнения. – 6, 1/ – С.190-191.

7. Dunninger D.R., Zachmanoglou E.C. The condition for uniqueness of the Diriclet problem for hyperbolic equations in cilindrical domains // J.Math.Mech. – 1969. – 18. – P.8

8. Aldashev S.A. The well-posedness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for the multidimensional wave equation // Mathematical problems Engineering. – 2010. – ID 653215. – 7 p.

9. Алдашев С.А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения // Современная математика и ее приложения. Уравнения с частными производными. – 2010. – 67. – С.28-32.

10. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.

11. Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений / Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.

12. Алдашев С.А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения / Орал: ЗКАТУ, 2007. – 140 с.

13. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе / Новосибирск: НГУ, 1973. – 139 с.

14. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии / М.: Высшая школа, 1985. – 302 с.

15. Алдашев С.А. Спектральные задачи Дарбу-Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Украинский математический журнал. – 2003. – 55. – 1. – С.100-107.

16. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М.: Наука, 1965. – 704 с.

17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2 / М.: Наука, 1974. – 296 с.

18. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4, ч.1 / М.: Наука, 1974. – 334 с.

19. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / М.: Наука, 1976. – 544 с.

20. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики / М.:Наука, 1966. – 724 с.

21. Смирнов М.М. Курс высшей математики. Т.4, ч.2 / М.: Наука, 1981. – 550 с.

CORRECTNESS OF DIRICHLET's AND POINCARÉ's PROBLEMS IN CYLINDRICAL DOMAIN FOR DEGENERATED MULTIDIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS WITH CHAPLYGIN'S OPERATOR

S.A. Aldashev

Scientific institute of applied mathematics and informatics of K.Zhubanov Actobe State University, Zhubanov Brothers Str., 256, Aktobe, Kazakhstan, e-mail: aldash51@mail.ru

Abstract. It is proved that Dirichlet's and Poincaré problems in cylindrical domain for degenerated multidimensional hyperbolic equations with Chaplygin's operator have unique solution.

Key words: Dirichlet's and Poincar' e's problems, correctness, degeneracy, multidimensional equations.