



УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

О КОРРЕКТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В СЛАБО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ПОРОУПРУГОМ СКЕЛЕТЕ ¹²⁾

И.В. Некрасова ¹³⁾

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Nekrasova_i@bsu.edu.ru

Аннотация. Предлагается вывод эволюционных уравнений для описания распределения давления в пласте вблизи нефтяной скважины в процессе гидравлического удара. Он основан на предложенной Р. Барриджем и Дж. Келлером схеме усреднения точной математической модели, описывающей на микроскопическом уровне совместное движение упругого твёрдого скелета и вязкой жидкости, которая заполняет поры.

Ключевые слова: уравнения Стокса, гидравлический разрыв, двухмасштабная сходимость, усреднение периодических структур.

Введение

Гидравлическим ударом называется резкое повышение давления в некоторых пространственных областях, заполненной жидкостью, например, таких, которые представляются трубами, трещинами и порами. Гидравлический удар в нефтяной скважине является частью процесса гидравлического разрыва нефтяного пласта. Существующие математические модели гидравлического удара являются либо упрощёнными инженерными моделями ([1], [2], [3]), косвенно связанными с фундаментальными законами механики сплошных сред, либо моделями, описывающими распространение трещин в упругой среде ([4]). Но эти модели не работают на более сложных системах, таких как нефтяная скважина. Это, в первую очередь, вызвано отсутствием достаточно простой физически корректной математической модели, описывающей это явление. Под физически корректной математической моделью будем понимать любую из основных моделей механики сплошных сред, либо модель асимптотически близкую к некоторой физически корректной феноменологической модели физического процесса на микроскопическом уровне ([5]).

В настоящей работе мы строим физически корректные математические модели гидравлического удара следуя очень естественной идее Р. Барриджа и Дж. Келлера [6], согласно которой, при описании гидравлического удара, необходимо, в первую очередь, описать физический процесс на микроскопическом уровне, опираясь на физически корректную математическую модель, затем, если модель содержит малый параметр, найти все предельные режимы (усреднённые уравнения) устремив малый параметр к нулю.

¹²⁾Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 02.740.11.0613)

¹³⁾Некрасова И.В., старший преподаватель Белгородского государственного университета



В качестве базовой математической модели гидравлического удара на микроскопическом уровне мы рассматриваем модель, описывающую кратковременные изотермические процессы в несжимаемой среде [7] – [9], где безразмерный вектор перемещений \mathbf{w} сплошной среды в безразмерных переменных

$$\mathbf{x}' = L\mathbf{x}, \quad t' = \tau t, \quad \mathbf{w}' = \frac{L^2}{g\tau^2}\mathbf{w}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в области Ω при $t > 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (0.1)$$

$$\tilde{\varrho} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \tilde{\varrho} \mathbf{F}, \quad (0.2)$$

$$\mathbb{P} = \tilde{\chi} \alpha_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\right) + (1 - \tilde{\chi}) \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I}, \quad (0.3)$$

где

$$\tilde{\varrho} = \tilde{\chi} \varrho_f + (1 - \tilde{\chi}) \varrho_s,$$

$\tilde{\chi}(\mathbf{x})$ – характеристическая функция порового пространства, $p(\mathbf{x}, t)$ – давление, ρ_f и ρ_s соответственно средние безразмерные плотности жидкости в порах и твёрдого скелета грунта, соотнесённые к средней плотности воды ρ_0 , \mathbb{I} – единичная матрица.

Безразмерные постоянные α_μ и α_λ определяются формулами

$$\alpha_\mu = \frac{2\mu\tau}{L^2\rho_0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda\tau^2}{L^2\rho_0},$$

где μ – вязкость жидкости, λ – упругая постоянная Ламэ, τ – характерное время физического процесса, L – характерный размер рассматриваемой физической области.

Уравнение (0.2) понимается в смысле теории распределений и содержит уравнения Стокса в жидкой части, уравнения Ламэ в твёрдом скелете и условие непрерывности нормальных напряжений на границе «твёрдый скелет – поровое пространство».

Эта математическая модель содержит естественный малый параметр ε , которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру L : $\varepsilon = l/L$. Поэтому вполне обоснованным является нахождение предельных режимов в точной модели при стремлении малого параметра к нулю. Такие приближения сильно упрощают исходную задачу, сохраняя при этом все её основные свойства. Но даже при наличии малого параметра задача все еще достаточно трудная и необходимы дополнительные упрощающие допущения. С геометрической точки зрения таким упрощением является предположение о периодичности порового пространства. А именно, пусть выполнено следующее

Предположения.

1). Пусть область Y_s есть «твёрдая часть» единичного куба $Y = (0, 1)^3 \subset \mathbb{R}^3$, и его «жидкая» часть Y_f есть открытое дополнение Y_s в Y и граница $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ есть липшицева поверхность.



2). Область E_f есть периодическое повторение в \mathbb{R}^3 элементарной ячейки $Y_f^\varepsilon = \varepsilon Y_f$, область E_s есть периодическое повторение в \mathbb{R}^3 элементарной ячейки $Y_s^\varepsilon = \varepsilon Y_s$.

3). Поровое пространство $\Omega_f^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_f$ есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_f , а твердый скелет $\Omega_s^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_s$ есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_s . Непрерывная по Липшицу граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \partial\Omega_f^\varepsilon$ есть периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

4). $\Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon \cup \Omega_s^\varepsilon$. Поровое пространство Ω_f^ε и твердый скелет Ω_s^ε являются связными множествами.

В указанных предположениях

$$\tilde{\chi}(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi_0(\mathbf{x})\chi(\mathbf{x}/\varepsilon),$$

где $\chi_0(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция области Ω .

Пусть безразмерные параметры α_μ и α_λ зависят от малого параметра задачи ε и существуют пределы (конечные или бесконечные):

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1, \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0, \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\alpha_\lambda}{\varepsilon^2} = \lambda_1.$$

Целью настоящей работы является нахождение предельных режимов (усреднённых уравнений) и соответствующих начальных и краевых условий при

$$0 < \lambda_0 < \infty, \quad \mu_0 = 0$$

в следующих случаях:

- 1) $\mu_1 = \infty$,
- 2) $0 \leq \mu_1 < \infty$.

Вывод полученных результатов основан на систематическом использовании метода двухмасштабной сходимости, предложенного Г. Нгуетсенгом ([10]).

1. Постановка задачи

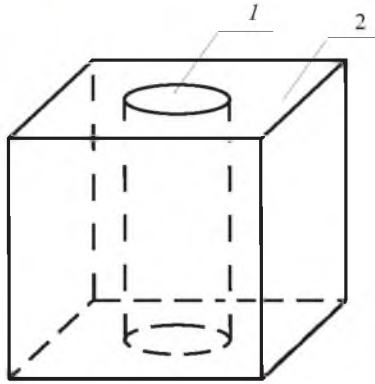
Как правило, начальный импульс, определяющий гидравлический удар, передаётся в нефтяной пласт через заполненный жидкостью резервуар. Моделируя этот процесс, мы рассматриваем в качестве области Ω подобласть куба $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < x_i < 1, i = 1, 2, 3\}$, такую что дополнение Ω в Q есть цилиндр $\bar{\Omega}^0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq \delta^2 < 1, -1 < x_3 < 1\}$ (см. рис. 1). Область Ω^0 и есть тот резервуар, через который в область Ω передаётся начальный импульс.

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ совместное движение твердого скелета и жидкости, заполняющей поры, в области Ω_T описывается системой

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \tag{1.1}$$

$$\varrho^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}, \tag{1.2}$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathbb{I}. \tag{1.3}$$

Рис. 1. 1 – область Ω^0 , 2 – область Ω

В области Ω_T^0 движение жидкости описывается системой Стокса, состоящей из уравнения неразрывности (1.1) и уравнения баланса импульса

$$\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}^0, \quad (1.4)$$

$$\mathbb{P}^0 = \alpha_\mu \mathbb{D} \left(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) - p^\varepsilon \mathbb{I}. \quad (1.5)$$

На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ выполнены условия непрерывности перемещений

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^0}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad (1.6)$$

и нормальных напряжений

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^0}} \mathbb{P}^0(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbb{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0), \quad (1.7)$$

для $(\mathbf{x}^0, t) \in S_T^0 = S^0 \times (0, T)$.

Сформулируем граничные условия на $S = \partial Q$. На верхнем основании $S^1 = \{x_3 = 1\} \cap \partial\Omega^0$ цилиндра Ω_0 задано нормальное напряжение

$$\mathbb{P}^0(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{e}_3 = p_0(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_3, \quad (1.8)$$

где $p_0(\mathbf{x}, t)$ есть импульс, определяющий гидравлический удар.

Будем считать, что функция $p_0(\mathbf{x}, t) = p_0(x_1, x_2, t)$ финитна в области

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 < \delta^2 < 1\}.$$

На оставшейся части внешней границы $S^2 = S \setminus S^1$

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in S_T^2 = S^2 \times (0, T). \quad (1.9)$$



Формулировка модели завершается посредством введения однородных начальных условий

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.10)$$

Обычным образом определяется понятие обобщённого решения задачи (1.1) – (1.10).

Определение 1. Пара функций $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$, таких что

$$\mathbf{w}^\varepsilon \in W_2^{1,1}(\Omega_T), \quad p^\varepsilon \in L_2(\Omega_T),$$

называется обобщённым решением задачи (1.1) – (1.10), если данные функции удовлетворяют уравнению неразрывности (1.1) почти всюду в Q_T , граничному условию (1.8), начальному условию (1.10) для функции \mathbf{w}^ε , и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \left(-\tilde{\varrho}^\varepsilon \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + (\zeta \mathbb{P}^0 + (1 - \zeta) \mathbb{P}) : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}) \right) dx dt = \int_{Q_T} \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi} p_0) dx dt \quad (1.11)$$

для всех функций $\boldsymbol{\varphi} \in W_2^{1,1}(Q_T)$, таких что $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) = 0$ на границе S_T^2 , и $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, T) = 0, \mathbf{x} \in Q$.

В уравнении (1.11) $\tilde{\varrho}^\varepsilon = (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon)\varrho_f + (1 - \zeta)(1 - \chi^\varepsilon)\varrho_s$ и $\zeta = \zeta(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция области Ω^0 в Q . Через $A : B$ обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам, т.е. $A : B = \text{tr}(A \circ B^*) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij}$.

Тождество (1.11) мы будем иногда записывать в дифференциальной форме

$$\tilde{\varrho}^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\zeta \mathbb{P}^0 + (1 - \zeta) \mathbb{P}), \quad (1.12)$$

и говорить, что функции $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ удовлетворяют уравнению (1.12) и граничному условию (1.8) в смысле теории распределений.

Будем считать, что функция p_0 подчинена следующему условию

$$\int_{Q_T} \left(|\nabla p_0(\mathbf{x}, t)|^2 + \left| \nabla \frac{\partial p_0}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 \right) dx dt = \mathfrak{P}^2 < \infty,$$

где \mathfrak{P} – константа, зависящая только от областей Q, Ω и Ω_0 .

Для формулировки нижеследующих утверждений мы нуждаемся в дополнительной конструкции. А именно, пусть $Q_f^\varepsilon = Q \setminus \bar{\Omega}_s^\varepsilon$ и

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}(\mathbf{w}^\varepsilon),$$

где

$$\mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon} : W_2^1(\Omega_s^\varepsilon) \rightarrow W_2^1(\Omega)$$

есть оператор продолжения из Ω_s^ε на Ω , так что

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega_s^\varepsilon \times (0, T),$$



и

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx &\leq C_0 \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{w}^\varepsilon|^2 dx \\ \int_{\Omega} |\mathbb{D}(x, \mathbf{u}^\varepsilon)|^2 dx &\leq C_0 \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon)|^2 dx \end{aligned} \quad (1.13)$$

(более подробно о таком продолжении см. работу [11]).

Вывод усреднённых уравнений базируется на следующей теореме.

Теорема 1. При всех $\varepsilon > 0$ на произвольном интервале времени $[0, T]$ существует единственное обобщённое решение задачи (1.1) – (1.10) и

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \int_Q \left(\left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right|^2 + |p^\varepsilon|^2 + \alpha_\mu (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon) \left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \right|^2 + \right. \\ \left. + \alpha_\lambda (1 - \zeta)(1 - \chi^\varepsilon) \left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 \right) dx \leq C_0 \mathfrak{P}^2, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где постоянная C_0 не зависит от малого параметра ε .

Доказательство существования обобщённого решения задачи (1.1) – (1.10) при всех $\varepsilon > 0$ и оценки (1.13) стандартно (см. [5], [8]) и базируется на энергетическом тождестве

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_Q \left(\tilde{q}^\varepsilon \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right|^2 + \alpha_\lambda (1 - \zeta)(1 - \chi^\varepsilon) \left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 \right) dx + \\ + \int_Q \alpha_\mu (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon) \left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \right|^2 dx = \int_Q \nabla \left(\frac{\partial p_0}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} dx, \end{aligned}$$

которое получится после дифференцирования уравнения (1.12) по времени, умножения на $\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t^2$ и интегрирования по частям по области Q .

Давление p^ε оценивается из интегрального тождества (1.11) как линейный непрерывный функционал над пространством функций $L_2((0, T); \overset{\circ}{W}_2^1(Q))$.

2. Формулировка основных результатов

Теорема 2. Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ – слабое решение задачи (1.1) – (1.10),

$$\mu_1 = \infty,$$

и $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_\varepsilon}(\mathbf{w}^\varepsilon)$. Тогда

1) последовательность $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ сходится слабо в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$ к функции \mathbf{u} , последовательности $\{\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t\}$ и $\{p^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ к функциям $\mathbf{v} = \partial \mathbf{w} / \partial t$ и p соответственно, и

$$(1 - \zeta) \left(\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = 0; \quad (2.1)$$



2) предельные функции \mathbf{v} , \mathbf{u} и p есть решение системы усредненных уравнений в области Q_T , состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{2.2}$$

и усредненного уравнения баланса импульса

$$\varrho_f \zeta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \hat{\varrho} (1 - \zeta) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\lambda_0 (1 - \zeta) \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - p \mathbb{I}), \tag{2.3}$$

совместно с краевыми и начальными условиями

$$p(\mathbf{x}, t) = -p_0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S^1, \quad t \in (0, T), \tag{2.4}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S^2, \quad t \in (0, T), \tag{2.5}$$

$$\zeta \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = (1 - \zeta) \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = (1 - \zeta) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q; \tag{2.6}$$

3) задача (2.2) – (2.6) имеет единственное решение.

В (2.3)

$$\hat{\varrho} = m \varrho_f + (1 - m) \varrho_s,$$

симметричный строго положительно определённый постоянный тензор четвертого ранга \mathfrak{N}_0^s определён ниже формулой (3.17).

Теорема 3. Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ – слабое решение задачи (1.1) – (1.10),

$$0 \leq \mu_1 < \infty,$$

и $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_\varepsilon}(\mathbf{w}^\varepsilon)$. Тогда

1) последовательность $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ сходится слабо в $W_2^{1,0}(Q_T)$ к функции \mathbf{u} , последовательности $\{\mathbf{w}_f^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$ и $\{p_f^\varepsilon\}$, где

$$\mathbf{w}_f^\varepsilon = (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon) \mathbf{w}^\varepsilon, \quad p_f^\varepsilon = (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon) p^\varepsilon,$$

сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ к функциям \mathbf{w}_f , p и p_f соответственно;

2) предельные функции \mathbf{u} , \mathbf{w}_f и p_f есть решение системы усредненных уравнений в области Q_T , состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot (\mathbf{w}_f + (1 - \zeta) \mathbf{u}) = 0, \tag{2.7}$$

усредненного уравнения баланса импульса

$$\varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2} + \varrho_s (1 - \zeta) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left(\lambda_0 (1 - \zeta) \mathfrak{N}_1^s : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \left(\zeta p + \frac{(1 - \zeta)}{m} p_f \right) \mathbb{I} \right) \tag{2.8}$$

для твердой компоненты и усредненного уравнения баланса импульса

$$(1 - \zeta) \left(\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} - m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) =$$



$$-(1 - \zeta) \int_0^t \mathbb{B}^{(f)}(\mu_1, \infty; t - \tau) \cdot \left(\frac{1}{m} \nabla p_f(\mathbf{x}, \tau) + \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2}(\mathbf{x}, \tau) \right) d\tau \quad (2.9)$$

для жидкой компоненты, совместно с краевыми и начальными условиями (2.4) – (2.6) для твердой компоненты и условиями

$$\mathbf{w}_f \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S^2, \quad t \in (0, T), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{w}_f(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q \quad (2.11)$$

для жидкой компоненты.

В уравнениях (2.8) – (2.10) симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга \mathfrak{N}_1^s и матрицы $\mathbb{B}^{(f)}(\mu_1, \infty; t)$, $\mathbb{B}^{(f)}(0, \infty)$ определены ниже формулами (3.21), (3.30) и (3.35), \mathbf{n} – нормальный вектор к границе S^2 .

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 2. На основании теоремы 1 и свойств оператора $\mathbb{E}_{\Omega_\varepsilon}$ заключаем, что последовательности $\{p^\varepsilon\}$, $\{(1 - \zeta)\mathbf{u}^\varepsilon\}$, $\{(1 - \zeta)\mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^\varepsilon)\}$, $\{\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t\}$, $\{(1 - \zeta)\partial \mathbf{u}^\varepsilon / \partial t\}$, $\{(1 - \zeta)\mathbb{D}(\mathbf{x}, \partial \mathbf{u}^\varepsilon / \partial t)\}$, $\{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t^2\}$ и $\{\sqrt{\alpha_\mu} \nabla(\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t)\}$ ограничены в $L_2(Q_T)$. Следовательно существует подпоследовательность, зависящая от малого параметра $\{\varepsilon > 0\}$ и функции p , \mathbf{u} и \mathbf{w} , такие что

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p, \quad \mathbf{v}^\varepsilon = \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathbf{v}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

слабо в $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon \searrow 0$, и

$$\mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

слабо в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$ при $\varepsilon \searrow 0$.

В дополнение к сказанному заметим, что

$$\alpha_\mu \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w}^\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

сильно в $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon \searrow 0$.

Переобозначая, если это необходимо, индексы, считаем сходящимися сами последовательности.

По теореме Нгуетсенга существуют 1-периодические по \mathbf{y} функции $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ из $L_2(Q_T \times Y)$ и $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ из $L_2(\Omega_T; W_2^1(Y))$, такие что последовательности $\{p^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$, $\{(1 - \zeta)\mathbf{u}^\varepsilon\}$, $\{\varepsilon \nabla \mathbf{v}^\varepsilon\}$ и $\{(1 - \zeta)\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\}$ сходятся двухмасштабно в $L_2(Q_T)$ к $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $(1 - \zeta)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\nabla_y \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ и $(1 - \zeta)(\nabla_x \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla_y \mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}))$ соответственно.

Лемма 1. Пусть последовательность $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ сходится двухмасштабно в $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon \searrow 0$ к функции $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, последовательность $\{\beta(\varepsilon)\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\}$ ограничена в $L_2(Q_T)$ и

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\beta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \infty.$$



Тогда

$$U(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

□ Пусть $\Psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ – произвольная гладкая скалярная периодическая по переменной \mathbf{y} и финитная в Y функция.

Последовательность $\{\sigma_{ij}^\varepsilon\}$, где

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = \int_{Q_T} \beta(\varepsilon) \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \Psi\left(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) dxdt, \quad \mathbf{u}^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon),$$

равномерно ограничена по ε . Следовательно,

$$\int_{Q_T} \varepsilon \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \Psi\left(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) dxdt = \frac{\varepsilon}{\beta(\varepsilon)} \sigma_{ij}^\varepsilon \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \searrow 0$, что эквивалентно следующему

$$\int_{Q_T} \int_Y U_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \frac{\partial \Psi}{\partial y_j}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) dydxdt = 0, \quad \mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3),$$

или $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. ■

Лемма 2. Предельные функции \mathbf{u} , \mathbf{v} и \mathbf{U} удовлетворяют макроскопическому и микроскопическому уравнениям неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \tag{3.2}$$

$$(1 - \chi(\mathbf{y}))(\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{U}) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_T, \quad \mathbf{y} \in Y, \tag{3.3}$$

и

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{W} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_T, \quad \mathbf{y} \in Y, \quad \mathbf{W} = \int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{y}) d\tau, \tag{3.4}$$

где

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = (\zeta + \chi(\mathbf{y})(1 - \zeta)) \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + (1 - \zeta)(1 - \chi(\mathbf{y})) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \tag{3.5}$$

и

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{V} \rangle_Y = \zeta \mathbf{v} + (1 - \zeta) \langle \mathbf{V} \rangle_{Y_f} + (1 - \zeta)(1 - m) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t). \tag{3.6}$$

□ Для доказательства (3.2) достаточно рассмотреть уравнение неразрывности в виде

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) dxdt = 0,$$

справедливое для всякой гладкой функции φ , равной нулю на части S_T^1 границы ∂Q и перейти к пределу при $\varepsilon \searrow 0$.

Уравнение (3.3) есть результат двухмасштабного предельного перехода в равенстве

$$(1 - \chi^\varepsilon(\mathbf{x})) \nabla \cdot \mathbf{u}^\varepsilon = 0$$



для $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_T$.

Уравнение (3.4) получим, перейдя к двухмасштабному пределу в уравнении неразрывности (1.1) в интегральной форме

$$\int_{Q_T} \varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon \cdot \nabla (h_0(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}/\varepsilon)) dx dt = 0.$$

Наконец, соотношение (3.5) есть результат двухмасштабного предельного перехода в равенстве

$$\mathbf{v}^\varepsilon = (\zeta + \chi^\varepsilon(1 - \zeta)) \mathbf{v}^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon)(1 - \zeta) \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t}. \quad \blacksquare$$

Лемма 3. Для почти всех $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_T$ и $\mathbf{y} \in Y$ слабые и двухмасштабные пределы последовательностей $\{\chi^\varepsilon p^\varepsilon\}$ и $\{(1 - \chi^\varepsilon) p^\varepsilon\}$ удовлетворяют соотношению

$$(1 - \zeta) P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = (1 - \zeta) (P_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \frac{1}{m} \chi(\mathbf{y}) p_f(\mathbf{x}, t)), \quad (3.7)$$

где $P_s = (1 - \chi(\mathbf{y})) P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$.

□ В интегральное тождество (1.11) подставим пробную функцию вида $\varphi = \varepsilon \varphi_0(\mathbf{x}, t) \varphi_1(\mathbf{x}/\varepsilon)$, где $\varphi_1(\mathbf{y})$ – произвольная 1-периодическая финитная в области Y_f функция от \mathbf{y} . Переходя к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, мы получим

$$\nabla_{\mathbf{y}} P_f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f. \quad (3.8)$$

Из чего следует

$$P_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{m} \chi(\mathbf{y}) p_f(\mathbf{x}, t).$$

Последнее, с учетом равенства

$$P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = P_f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + P_s(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \in \Omega_T \times Y,$$

доказывает (3.7). ■

Лемма 4. Предельные функции \mathbf{u} , p , \mathbf{U} и P удовлетворяют макроскопическому уравнению баланса импульса

$$\begin{aligned} & \varrho_f \left(\zeta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (1 - \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{V} \rangle_{Y_f} \right) + \varrho_s (1 - m) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \\ & \nabla \cdot \left(\lambda_0 (1 - \zeta) ((1 - m) \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \rangle_{Y_s}) - p \mathbb{I} \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

в области Q_T , краевому условию (2.4), начальному условию (2.6) для функции \mathbf{v} и микроскопическому уравнению баланса импульса

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left((1 - \chi) \lambda_0 (\mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U})) - (P_s + \frac{\chi}{m} p_f) \mathbb{I} \right) = 0 \quad (3.10)$$



в области Y для почти всех $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_T$.

□ Уравнение (3.9) следует из (1.11) после двухмасштабного предельного перехода с пробными функциями вида $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$:

$$\int_{Q_T} \left(- \left(\varrho_f (\zeta \mathbf{v} + (1 - \zeta) \langle \mathbf{V} \rangle_{Y_f}) + \varrho_s (1 - m) (1 - \zeta) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \right. \\ \left. + (\lambda_0 (1 - \zeta) ((1 - m) \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}) \rangle_{Y_s}) - p \mathbb{I}) : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \varphi) \right) dxdt = \\ \int_{Q_T} \nabla \cdot (\varphi p_0) dxdt. \quad (3.11)$$

Последнее интегральное тождество, записанное в следующем виде

$$\int_{Q_T} \left(\varrho_f \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p \nabla \cdot \varphi + \nabla \cdot (\varphi p_0) \right) dxdt = 0$$

для финитных в области Ω_0 функций φ , обеспечивает краевое условие (2.4), начальное условие (2.6) для функций \mathbf{v} и оценку

$$\int_{Q_T} \zeta |\nabla p(\mathbf{x}, t)|^2 dxdt \leq C_0 \mathfrak{P}^2. \quad (3.12)$$

Уравнение (3.10) следует из (1.11) после двухмасштабного предельного перехода с пробными функциями вида $\varphi = \varepsilon h(\mathbf{x}, t) \varphi_0(\mathbf{x}/\varepsilon)$, где h есть финитная в Ω функция. ■

Лемма 1 и ограниченность последовательности $\{\sqrt{\alpha_\mu} \nabla(\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t)\}$ в $L_2(Q_T)$ влекут равенство

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (3.13)$$

Применяя двухмасштабный предельный переход в равенстве

$$(1 - \zeta)(1 - \chi^\varepsilon) \left(\mathbf{v}^\varepsilon - \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right) = 0,$$

получим (2.1). Следовательно функция \mathbf{v} удовлетворяет уравнению неразрывности (2.2) и уравнению неразрывности (3.3) в следующем виде

$$(1 - \chi(\mathbf{y})) \nabla_y \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_T, \quad \mathbf{y} \in Y, \quad (3.14)$$

в то время как макроскопическое уравнение баланса импульса (3.11) обретает вид

$$\int_{Q_T} \left(- \left(\varrho_f \zeta \mathbf{v} + \hat{\varrho} (1 - \zeta) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \right. \\ \left. (\lambda_0 (1 - \zeta) ((1 - m) \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}) \rangle_{Y_s}) - p \mathbb{I}) : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \varphi) \right) dxdt = \\ \int_{Q_T} \nabla \cdot (\varphi p_0) dxdt,$$



что эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\varrho_f \zeta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \hat{\varrho} (1 - \zeta) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left(\lambda_0 (1 - \zeta) ((1 - m) \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \rangle_{Y_s}) - p \mathbb{I} \right) \quad (3.15)$$

и начальному условию (2.6) для функции \mathbf{u} .

Лемма 5. *Предельные функции \mathbf{v} , \mathbf{u} и p удовлетворяют в области Q_T усреднённому уравнению баланса импульса (2.3).*

□ Усредненное уравнение (2.3) следует из макроскопического уравнения (3.15), после подстановки в него выражения

$$\langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}) \rangle_{Y_s} = \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - (1 - m) \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

В свою очередь, последняя формула есть результат решения уравнений (3.10) и (3.14) на элементарной ячейке Y_s . Действительно, полагая

$$\mathbf{U} = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{U}^{(ij)}(\mathbf{y}) D_{ij}(\mathbf{x}, t),$$

$$P_s - \frac{1}{m} p_f = \lambda_0 \sum_{i,j=1}^3 P^{(ij)}(\mathbf{y}) D_{ij}(\mathbf{x}, t),$$

где

$$D_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) \right), \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3),$$

$$\mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^3 D_{ij}(\mathbf{x}, t) \mathbb{J}^{ij},$$

получим следующую периодическую краевую задачу на Y :

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left((1 - \chi) (\mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(ij)}) + \mathbb{J}^{ij} - P^{(ij)} \mathbb{I}) \right) &= 0, \quad \mathbf{y} \in Y, \\ (1 - \chi) \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{U}^{(ij)} &= 0, \quad \langle \mathbf{U}^{(ij)} \rangle_{Y_s} = 0, \quad \mathbf{y} \in Y. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Тогда

$$\mathfrak{N}_0^s = (1 - m) \mathbb{J} + \sum_{i,j=1}^3 \langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(ij)}) \rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{J}^{ij}, \quad (3.17)$$

где

$$\mathbb{J} = \sum_{i,j=1}^3 \mathbb{J}^{ij} \otimes \mathbb{J}^{ij}, \quad \mathbb{J}^{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i).$$

Симметричность тензора \mathfrak{N}_0^s следует из равенства

$$\langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(ij)}) \rangle_{Y_s} : \mathbb{J}^{kl} = - \langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(ij)}) : \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(kl)}) \rangle_{Y_s} \quad (3.18)$$



которое, в свою очередь, является результатом умножения уравнения (3.16) для функции $\mathbf{U}^{(ij)}$ на $\mathbf{U}^{(kl)}$ и интегрирования по частям. Это же равенство доставляет положительную определенность тензора \mathfrak{N}_0^s .

Единственность решения задачи (2.2) – (2.6) следует из энергетического тождества

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_Q \left((1 - \zeta) \lambda_0 (\mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{u})) : \mathbb{D}(x, \mathbf{u}) + \varrho_f \zeta |\mathbf{v}|^2 + \hat{\varrho} (1 - \zeta) \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 \right) dx = \int_{Q_T} \nabla \cdot (\varphi p_0) dx dt$$

для решения \mathbf{u} , \mathbf{v} усредненной задачи и свойств тензора \mathfrak{N}_0^s . Последнее тождество есть результат умножения уравнения (2.3) на \mathbf{v} и интегрирования по частям по области Q с учетом (2.1). Наконец, функция \mathbf{u} исчезает на границе S_T^2 в силу справедливости нижеследующего утверждения, которое приведем без доказательства. ■

Лемма 6. Пусть функции

$$\mathbf{v}^\varepsilon \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$$

и $\mathbf{v}^\varepsilon = 0$ на части $\sigma^\varepsilon = S_0 \cap S_s^\varepsilon \subset S_s^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \partial\Omega$ границы $S = \partial\Omega$, последовательность $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$ сходится слабо в $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ к функции \mathbf{v} .

Тогда $\mathbf{v} = 0$ на части S_0 границы S . То есть

$$\int_0^T \int_{S_0} |\mathbf{v}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{n}, t)| d\sigma dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0,$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к границе S в точке \mathbf{x} .

Доказательство теоремы 3.

Случай $\mu_1 > 0$. Как и в предыдущем параграфе мы утверждаем, что последовательности $\{p^\varepsilon\}$, $\{(1 - \zeta)\mathbf{u}^\varepsilon\}$, $\{(1 - \zeta)\mathbb{D}(x, \mathbf{u}^\varepsilon)\}$, $\{\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t\}$, $\{(1 - \zeta)\partial \mathbf{u}^\varepsilon / \partial t\}$, $\{(1 - \zeta)\mathbb{D}(x, \partial \mathbf{u}^\varepsilon / \partial t)\}$, $\{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t^2\}$ и $\{\sqrt{\alpha_\mu} \nabla(\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t)\}$ ограничены в $L_2(Q_T)$. Следовательно существуют подпоследовательности от малого параметра $\{\varepsilon > 0\}$ и функции p , \mathbf{v} и \mathbf{w} , такие что

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p, \quad \mathbf{v}^\varepsilon = \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathbf{v}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

слабо в $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon \searrow 0$, и

$$\mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

слабо в $W_2^{1,0}(Q_T)$ и $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$.

Заметим также, что

$$\alpha_\mu (1 - \zeta) \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) \rightarrow 0 \tag{3.19}$$

сильно в $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon \searrow 0$.

В то же время существуют 1-периодические по \mathbf{y} функции $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ из $L_2(Q_T \times Y)$ и $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ из $L_2(Q_T; W_2^1(Y))$, такие что последовательности $\{p^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$, $\{(1 -$



$\zeta\mathbf{u}^\varepsilon$, $\{\varepsilon\nabla\mathbf{v}^\varepsilon\}$ и $\{(1-\zeta)\nabla\mathbf{u}^\varepsilon\}$ сходятся двухмасштабно $L_2(Q_T)$ к функциям $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $(1-\zeta)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\nabla_y\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ и $(1-\zeta)(\nabla_x\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla_y\mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}))$ соответственно.

Для всех этих функций верны утверждения лемм 2 - 4.

Чтобы получить усредненное уравнение баланса импульса (2.8), необходимо записать выражения для $\mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U})$ и p как операторы на $\mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ и $(\nabla_x \cdot \mathbf{u})$, используя систему (3.3) (3.10), и подставить в уравнение (3.9).

Полагая

$$\mathbf{U} = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{U}^{(ij)}(\mathbf{y}) D_{ij}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{U}_0(\mathbf{y}) (\nabla_x \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)),$$

$$P_s - \frac{1}{m} p_f = \lambda_0 \sum_{i,j=1}^3 P^{(ij)}(\mathbf{y}) D_{ij}(\mathbf{x}, t) + \lambda_0 P_0(\mathbf{y}) (\nabla_x \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)),$$

получим следующую периодическую краевую задачу на Y :

$$\left. \begin{aligned} \nabla_y \cdot \left((1-\chi)(\mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}_0) - P_0\mathbb{I}) \right) &= 0, \\ (1-\chi)(\nabla_y \cdot \mathbf{U}_0 + 1) &= 0, \quad \langle \mathbf{U}_0 \rangle_{Y_s} = 0, \quad \mathbf{y} \in Y. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Тогда

$$\mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}) = \left(\sum_{i,j=1}^3 \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(ij)}) \otimes \mathbb{J}^{ij} + \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}_0) \otimes \mathbb{I} \right) : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

$$p = \frac{1}{m} p_f + \lambda_0 \left(\left\langle \sum_{i,j=1}^3 P^{(ij)} \right\rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{J}^{ij} + \langle P_0 \rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{I} \right) : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \subset \Omega_T \times Y$$

и

$$\mathfrak{N}_1^s = \mathfrak{N}_0^s + \langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}_0) \rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{I} + \left\langle \sum_{i,j=1}^3 P^{(ij)} \right\rangle_{Y_s} \mathbb{I} \otimes \mathbb{J}^{ij} + \langle P_0 \rangle_{Y_s} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}. \quad (3.21)$$

Симметричность и строгая положительная определенность тензора \mathfrak{N}_1^s следуют из равенств

$$\langle P_0 \rangle_{Y_s} = -\langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}_0) : \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}_0) \rangle_{Y_s}, \quad (3.22)$$

$$\langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(ij)}) : \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}_0) \rangle_{Y_s} = 0, \quad (3.23)$$

$$\langle P^{(ij)} \rangle_{Y_s} = -\langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}_0) : \mathbb{J}^{ij} \rangle_{Y_s}, \quad (3.24)$$

$$\langle \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(ij)}) : \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(kl)}) \rangle_{Y_s} + \langle \mathbb{J}^{ij} : \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U}^{(kl)}) \rangle_{Y_s} = 0, \quad (3.25)$$

для всех $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Равенства (3.22) и (3.23) есть результат умножения уравнения для \mathbf{U}_0 на \mathbf{U}_0 и $\mathbf{U}^{(ij)}$ соответственно и интегрирования по частям по области Y . Соотношения (3.24) и (3.25) получим, умножив уравнения для $\mathbf{U}^{(ij)}$ на \mathbf{U}_0 и $\mathbf{U}^{(kl)}$ соответственно, интегрируя по частям по области Y с использованием (3.23).

Следовательно функции \mathbf{u} , \mathbf{w}_f и p_f , где

$$\mathbf{w}_f = \zeta \mathbf{w} + (1-\zeta) \langle \mathbf{W} \rangle_{Y_f},$$



удовлетворяют уравнению неразрывности (2.7), усредненному уравнению баланса импульса (2.8) и краевым условиям (2.4) и (2.10).

Краевое условие (2.10) очевидным образом следует из уравнения неразрывности (3.2) и условия (2.5). Справедливость условия (2.4) показана в лемме 4.

Легко видеть, что последовательность $\{(\zeta + \chi^\varepsilon(1 - \zeta))\mathbf{v}^\varepsilon\}$ сходится двухмасштабно в $L_2(Q_T)$ к функции $\mathbf{V}_f = \partial \mathbf{W}_f / \partial t = (\zeta + (1 - \zeta)\chi(\mathbf{y}))\mathbf{V}$ и слабо в $L_2(Q_T)$ к функции $\mathbf{v}_f = \partial \mathbf{w}_f / \partial t = \zeta \mathbf{v} + (1 - \zeta)\langle \mathbf{V} \rangle_{Y_f}$.

Чтобы получить усредненное уравнение баланса импульса (2.8) для твердой компоненты, перейдем к пределу в тождестве (1.11) при $\varepsilon \searrow 0$ с пробными функциями вида $\varphi = h(\mathbf{x}, t)\varphi_0(\mathbf{x}/\varepsilon)$, где $h(\mathbf{x}, t)$ есть финитная в области Ω функция для всех $t \in (0, T)$, а $\varphi_0(\mathbf{y})$ – 1-периодическая гладкая финитная в Y_f соленоидальная функция.

В результате имеем для функции \mathbf{W}_f микроскопическое уравнение баланса импульса

$$\varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{W}_f}{\partial t^2} = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\mu_1 \nabla_{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial \mathbf{W}_f}{\partial t} \right) - \Pi^{(f)} \mathbb{I} \right) - \frac{1}{m} \nabla_{\mathbf{x}} p_f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{y} \in Y_f, \quad t \in (0, T) \quad (3.26)$$

начальные условия

$$\mathbf{W}_f(\mathbf{y}, \mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \mathbf{W}_f}{\partial t}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f, \quad (3.27)$$

для почти всех $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_T$.

Дополним систему (3.26) – (3.27) уравнением неразрывности (3.4) и краевым условием

$$\mathbf{W}_f(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{y} \in \gamma, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_T, \quad (3.28)$$

которое является следствием соотношения (3.5) и условия регулярности $\mathbf{V} \in L_2(Q_T; W_2^1(Y))$.

Решение вышеприведенной системы будем искать в следующем виде

$$\mathbf{W}_f = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y}, t - \tau) z_i(\mathbf{x}, \tau) d\tau,$$

$$\Pi^{(f)} = \sum_{i=1}^3 \int_0^t \Pi_i^{(f)}(\mathbf{y}, t - \tau) z_i(\mathbf{x}, \tau) d\tau,$$

где

$$\mathbf{z} = \frac{1}{m} \nabla p_f(\mathbf{x}, t) + \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{z} = \sum_{i=1}^3 z_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i.$$

Тогда периодические по переменной \mathbf{y} функции $\mathbf{W}_i^{(f)}$, $\Pi_i^{(f)}$ при $i = 1, 2, 3$ есть решения



следующих периодических начально-краевых задач

$$\left. \begin{aligned} \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t^2} &= \mu_1 \Delta_y \left(\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t} \right) - \nabla_y \Pi_i^{(f)}, \quad (\mathbf{y}, t) \in Y_f \times (0, T), \\ \nabla_y \cdot \mathbf{W}_i^{(f)} &= 0, \quad (\mathbf{y}, t) \in Y_f \times (0, T), \\ \mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y}, t) &= 0, \quad (\mathbf{y}, t) \in \gamma \times (0, T), \\ \mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y}, 0) &= 0, \quad \varrho_f \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y}, 0) = -\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} \in Y_f. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Корректность задач (3.29) следует из энергетических равенств

$$\frac{1}{2} \int_{Y_f} \varrho_f \left| \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t) \right|^2 d\mathbf{y} + \mu_1 \int_0^t \int_{Y_f} |\nabla_y \mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y}, \tau)|^2 d\mathbf{y} d\tau = \frac{m}{2\varrho_f}.$$

Заметим, что задачи (3.29) для соленоидальных функций $\mathbf{W}_i^{(f)}$, исчезающих на γ и при $t = 0$, следует понимать как интегральные тождества

$$\int_0^T \int_{Y_f} \left(\varrho_f \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} - \mu_1 \nabla_y \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t} : \nabla_y \boldsymbol{\varphi} \right) d\mathbf{y} dt = - \int_{Y_f} \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}, 0) d\mathbf{y}$$

для соленоидальных 1-периодических функций $\boldsymbol{\varphi}$, исчезающих на γ и при $t = T$.

По определению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &= \int_{Y_f} \frac{\partial \mathbf{W}_f}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\ m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &+ \int_0^t \left(\sum_{i=1}^3 \left(\int_{Y_f} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{y} \right) \otimes \mathbf{e}_i \right) \cdot \mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau) d\tau = \\ m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &+ \int_0^t \mathbb{B}^f(\mu_1, \infty; t - \tau) \cdot \left(\frac{1}{m} \nabla p_f(\mathbf{x}, \tau) + \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2}(\mathbf{x}, \tau) \right) d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\mathbb{B}^f(\mu_1, \infty; t) = \sum_{i=1}^3 \left(\int_{Y_f} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \right) \otimes \mathbf{e}_i, \quad (3.30)$$

Случай $\mu_1 = 0$. Для этого случая верны все те же рассуждения, что и при $\mu_1 > 0$, исключая следующее:

1) двухмасштабную сходимость последовательности $\{\varepsilon \nabla \mathbf{w}^\varepsilon\}$ к функции $\nabla \mathbf{W} \in L_2(Q_T \times Y)$,

2) вывод уравнения баланса импульса для жидкой компоненты.

При $\mu_1 = 0$ микроскопическое уравнение баланса импульса для жидкой компоненты приобретает вид

$$\varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{W}_f}{\partial t^2} = -\nabla_y \Pi^{(f)} - \frac{1}{m} \nabla_x p_f. \quad (3.31)$$



Вместо условия (3.28) на границе γ имеем условие

$$(\mathbf{W}_f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) = 0, \quad (3.32)$$

которое является следствием микроскопического уравнения неразрывности (3.4) и представления

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (1 - \chi(\mathbf{y}))\mathbf{W}_f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in Y.$$

Чтобы решить (3.31), подействуем на это уравнение оператором $\nabla_{\mathbf{y}}$ и снова воспользуемся (3.4):

$$0 = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{W}_f}{\partial t^2} \right) = -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \Pi^{(f)}). \quad (3.33)$$

Граничное условие (3.32) и уравнение (3.31) доставляют краевое условие на γ для давления $\Pi^{(f)}$:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \Pi^{(f)} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) = -\left(\frac{1}{m} \nabla_x p_f + \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}). \quad (3.34)$$

Используя представление

$$\Pi^{(f)} = -\left(\sum_{i=1}^3 \Pi_i^{(f)}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\frac{1}{m} \nabla_x p_f + \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right),$$

где $\Pi_i^{(f)}$, $i = 1, 2, 3$, есть решения периодических краевых задач

$$\Delta_{\mathbf{y}} \Pi_i^{(f)} = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f, \quad (\nabla_{\mathbf{y}} \Pi_i^{(f)} - \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in \gamma,$$

мы получим

$$\nabla_{\mathbf{y}} \Pi^{(f)} = -\left(\sum_{i=1}^3 \nabla_{\mathbf{y}} \Pi_i^{(f)} \otimes \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\frac{1}{m} \nabla_x p_f + \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right).$$

Интегрируя уравнение (3.31) по области Y_f^* , получим желаемое уравнение баланса импульса (2.9) для жидкой компоненты, если положим

$$\varrho_f \mathbb{B}^{(f)}(\infty, 0) = \mathbb{I} - \left(\sum_{i=1}^3 \int_{Y_f} \nabla_{\mathbf{y}} \Pi_i^{(f)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \otimes \mathbf{e}_i \right). \quad (3.35)$$

Литература

1. Adachi J.I., Detournay E., Peirce A.P. Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers // Int. J. of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2010. – 47. – P.625-630.
2. Kovalyshen Y., Detournay E. A Reexamination of the Classical PKN Model of Hydraulic Fracture // Transp. Porous Med. – 2010. – 81. – P.317-339.



3. Weiguob L., Yangshenga Z. A mathematical model for solid liquid and mass transfer coupling and numerical simulation for hydraulic fracture in rock salt // Progress in Natural Science. – 2005. – 15;8. – P.742-748.
4. Гарипов Т.Т. Моделирование процесса гидроразрыва пласта в пороупругой среде // Мат. Моделирование. – 2006. – 18;6. – С.53-69.
5. Meirmanov A. Double porosity models in incompressible poroelastic media // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2010. – 20;4. – P.635-659.
6. Burrige R., Keller J.B. Poroelasticity equations derived from microstructure // Journal of Acoustic Society of America. – 1981. – 70;4. – P.1140-1146.
7. Мейрманов А.М. Метод двухмасштабной сходимости Нгуэтсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. Мат. Журнал. – 2007. – 48;3. – С.645-667.
8. Meirmanov A. A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – 40;3. – P.1272-1289.
9. Meirmanov A. Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – 163;2. – P.111-172.
10. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – 20;3. – P.608-623.
11. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // J. math. pures et appl. – 1985. – 64. – P.31-75.

**ABOUT CORRECTNESS OF MATHEMATICAL MODELS
OF HYDRAULIC SHOCK IN SLIGHTLY VISCOUS LIQUID
AND ELASTIC SOLID SKELETON**

I.V. Nekrasova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Nekrasova_i@bsu.edu.ru

Abstract. Derivation of evolution equations for description of pressure distribution near the well during the hydraulic shock is proposed. It is based upon the scheme suggested by J. Keller and R. Burrige. The scheme is connected with the averaging of exact microscopic mathematical model describing the joint evolution of an elastic solid skeleton and a viscous fluid filling the pores.

Key words: Stokes' equations, hydraulic fracturing, two-scale convergence, averaging of periodic structures.