УДК 517.9

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

И.В. Асташова [4)]

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские горы, ГСП-1, Москва, 119991, Россия, e-mail: ast@diffiety.ac.ru

Аннотация. Для нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера с комплексными коэффициентами получены асимптотические формулы для модуля и аргумента решений и равномерные оценки решений.

Ключевые слова: асимптотические формулы, равномерные оценки решений, комплексные коэффициенты.

1. Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y''(x) = p(x)|y(x)|^m y(x)\,, \tag{1}$$

где $m > 0$, $x \in \mathbb{R}$, а $p(x)$ – непрерывная комплекснозначная функция. Если $p(x)$ – действительнозначная функция, то это уравнение превращается в хорошо известное уравнение типа Эмдена-Фаулера, асимптотические свойства которого детально исследовались в работах Ф.Аткинсона, Р.Беллмана, И.Кигурадзе, А.Кнезера, В.Кондратьева, А.Мышкиса, Дж.Сансоне и других авторов. Подробную библиографию см. в [1]. С другой стороны, (1) – это одномерное уравнение Шредингера. Качественные свойства решений различных задач, связанных с этим уравнением в n-мерном случае ($n \geqslant 2$), были описаны М.Ф.Бидо-Верон, Х.Брезисом, Л.Вероном, Б.Гершем, С.Дои, Т.Като, В.Кондратьевым, П.Константином, Н.Хаяси, М.Шубиным и другими авторами, см. [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

В настоящей работе получены асимптотические формулы для модуля и аргумента решений и равномерные оценки решений.

2. Основные результаты. При $p(x) = p_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ существует решение $Y(x)$, определенное на $(0, +\infty)$, которое имеет вид

$$|Y(x)| = C_1 x^{-2/m}, \qquad \arg Y(x) = C_2 \ln x$$

[4]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00989).

с постоянными

$$C_1 = \sqrt[m]{Q\left(\frac{1+4/m}{\mathrm{Im}\ p_0}\right)^2}\,,$$

$$C_2 = -Q\,\frac{1+4/m}{\mathrm{Im}\ p_0}\,,$$

$$Q = \frac{-\mathrm{Re}\ p_0 + \sqrt{(\mathrm{Re}\ p_0)^2 + \dfrac{8(m+2)}{(m+4)^2}(\mathrm{Im}\ p_0)^2}}{2}\,.$$

Теорема 1. *Пусть $m > 0$ и $p(x) \equiv p_0 = \mathrm{const} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тогда все нетривиальные решения уравнения (1) исчерпывающе описываются следующим образом:*

1. *Все непродолжаемые решения, определенные на полуоси $(-\infty,\ x_0)$ или $(x_0, +\infty)$, которые имеют точный вид:*

$$|y(x)| = |\,Y(|x-x_0|)\,|\,,$$

$$\arg y(x) = \arg Y(|x-x_0|) + \varphi_0$$

с произвольными вещественными x_0 и φ_0.

2. *Для любого непродолжаемого решения, определенного на ограниченном интервале $(x_1,\ x_2)$, справедливо представление*

$$|y(x)| = |Y(|x-x_k|)|\ (1+o(1))\,,$$

$$\arg y(x) = \arg Y(|x-x_k|)\ (1+o(1))\,,$$

где $x \to x_k$, $k = 1,\ 2$.

Теорема 2. *Пусть $p(x)$ – непрерывная комплекснозначная функция, $m > 0$ и $p(x_0) = p_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Пусть $y(x)$ – непродолжаемое решение уравнения (1), определенное на (x_1, x_0) или (x_0, x_2) при $-\infty \leqslant x_1 < x_0 < x_2 \leqslant +\infty$. Тогда*

$$|y(x)| = |Y(|x-x_0|)|\ (1+o(1))\,,$$

$$\arg y(x) = \arg Y(|x-x_0|)\ (1+o(1))\,,$$

при $x \to x_0$.

Теорема 3. *Пусть $p(x)$ – непрерывная комплекснозначная функция, $\varepsilon = \pm 1$, $m > 0$, $p(x) \to p_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ при $x \to \varepsilon\infty$. Пусть, далее, $y(x)$ – решение уравнения (1), определенное в окрестности $\varepsilon\infty$. Тогда*

$$|y(x)| = |Y(|x|)|\ (1+o(1))\,,$$

$$\arg y(x) = \arg Y(|x|)\ (1+o(1))\,,$$

при $x \to \infty$.

Теорема 4. *Пусть* $\operatorname{Re} p(x) > p_* > 0$. *Тогда для любого решения* $y(x)$ *уравнения* (1), *определенного на* $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ *и такого, что* $y(x_0) \neq 0$, *справедлива оценка*

$$\varepsilon^2 < \frac{C}{p_*} |y(x_0)|^{-m}$$

с постоянной $C > 0$, *зависящей только от* m.

Следствие. *Пусть для функции* $p(x)$ *выполняются условия теоремы 4. Тогда для любого решения* $y(x)$ *уравнения* (1), *определенного на* $[a, b]$, *выполнено*

$$|y(x)| < \sqrt[m]{\frac{C}{\varepsilon^2 p_*}}$$

для всех $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$.

Следствие. *Пусть для функции* $p(x)$ *выполняются условия теоремы 4. Тогда для любого решения* $y(x)$ *уравнения* (1), *определенного на* $(-\infty,\ x_0)$ *или* $(x_0, +\infty)$, *на всей области определения выполняется неравенство*

$$|y(x)| < |x - x_0|^{-2/m} \sqrt[m]{C/p_*}\ .$$

Следствие. *Если* $\operatorname{Re} p(x) > q_* x^{-r}$, $q_* > 0$, $r > 0$, *то для любого решения* $y(x)$ *уравнения* (1), *определенного на* $(0, +\infty)$, *для всех* $x > 0$ *выполнено*

$$|y(x)| < x^{(r-2)/m} \sqrt[m]{C/q_*}\ .$$

Во всех случаях C зависит только от m и совпадает с соответствующей постоянной из теоремы 4.

Следствие. *Если функция* $p(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы 4, то единственным решением уравнения* (1), *определенным на* $(-\infty, +\infty)$, *является тривиальное решение* $y(x) \equiv 0$.

3. Доказательство основных результатов. Всюду ниже для уменьшения количества дробей в формулах вместо $m/4$ используется μ.

3.1. Фазовое пространство. Заметим, что если функция $p(x)$ является постоянной и $y(x)$ является решением (1), то и функция $z(x) = A\, y\left(|A|^{2\mu}(x - x_0)\right)$ при произвольных константах $A \in \mathbb{C}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ также является решением этого уравнения. Это позволяет понизить размерность задачи, отождествляя решения, связанные приведенным соотношением.

Пара функций $\big(y(x), y'(x)\big)$ порождает кривую в $\mathbb{C}^2$. Кривые, порожденные нетривиальными решениями, лежат в $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Решения $y(x)$ и $y(x - x_0)$ порождают одну и ту же кривую (с точностью до параметризации).

Рассмотрим отношение эквивалентности в $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, при котором решения $y_1(x)$ и $y_2(x) = Ay_1(|A|^{2\mu}x)$ порождают одну и ту же кривую в факторпространстве. Это отношение может быть задано формулой

$$(z_0, z_1) \sim (Az_0, A|A|^{2\mu}z_1)$$

для произвольного комплексного $A \neq 0$.

Обозначим через Φ факторпространство $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ по этому отношению эквивалентности. Его можно снабдить структурой действительного двумерного многообразия класса C^1 с помощью атласа, состоящего из двух карт. Обе карты являются биекциями подмножеств Φ на $\mathbb{C}$.

Первая карта определена на классах эквивалентности комплексных пар (z_0, z_1), для которых $z_0 \neq 0$, то есть на всем Φ, кроме точки-классе эквивалентности пары $(0, 1)$. Биекция определяется комплекснозначной функцией

$$u : [(z_0, z_1)] \longmapsto \frac{z_1}{z_0|z_0|^{2\mu}} .$$

Вторая карта определена для классов пар (z_0, z_1), $z_1 \neq 0$, следующим образом:

$$U : [(z_0, z_1)] \longmapsto \frac{z_0|z_1|^{2\mu/(2\mu+1)}}{z_1} .$$

Непосредственно проверяется, что эти функции корректно определены и являются биекциями. Замены координат задаются соотношениями

$$u = \frac{1}{U|U|^{2\mu}} , \qquad U = \frac{|u|^{2\mu/(2\mu+1)}}{u}$$

и принадлежат классу C^1 как отображения $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Полученное многообразие гомеоморфно двумерной сфере и поэтому компактно. Его даже можно вложить в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы u и U стали стереографическими проекциями (см. рис. 1).

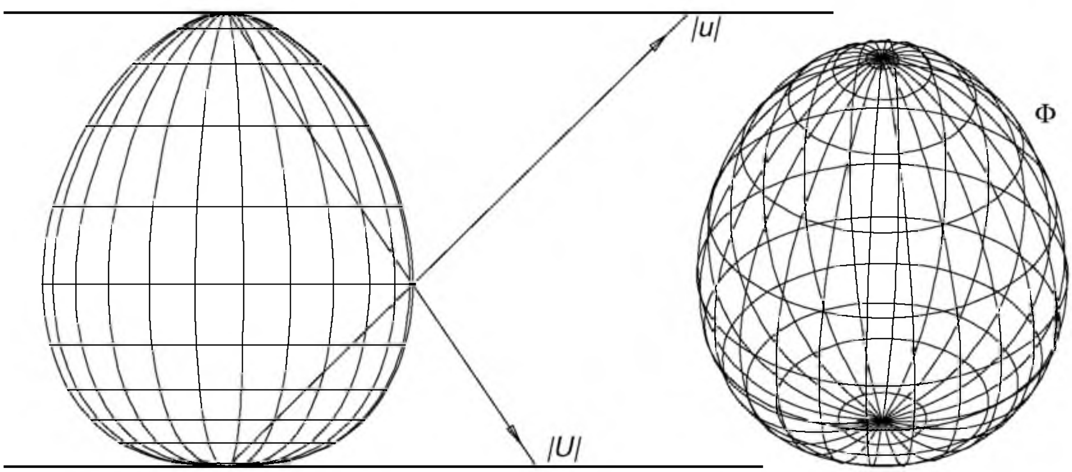

Рис. 1.

3.2. **Динамическая система на фазовом пространстве для постоянной** $p(x)$. Опишем в координатах кривые, порождаемые на Φ решениями (1) с постоянной $p(x) \equiv p_0$.

На первой карте имеем

$$u = \frac{y'}{y|y|^{2\mu}} \,,$$

откуда непосредственными вычислениями получаем

$$u' = |y|^{2\mu} \left(p_0 - (\mu+1)u^2 - \mu|u|^2\right) \,.$$

Следовательно, выбирая в качестве параметра переменную t, для которой $dt = |y|^{2\mu}dx$, получим внутреннее описание кривой:

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = p_0 - (\mu+1)u^2 - \mu|u|^2 \,.$$

Аналогично, на второй карте кривые, порождаемые решениями (1), описываются уравнением

$$\frac{dU}{d\tau} = 1 + \frac{|U|^{4\mu}}{2\mu+1}\Big(\mu\bar{p}_0|U|^2 - (\mu+1)p_0U^2\Big)$$

с другим параметром τ, для которого $d\tau = |y'|^{2\mu/(2\mu+1)}dx$.

Правые части обоих уравнений принадлежат классу C^1 в действительном смысле. Из двух параметров с помощью разбиения единицы можно сделать один так, чтобы все кривые, порожденные на Φ решениями (1), были траекториями автономной динамической системы с новым параметром в качестве независимой переменной. Ввиду компактности Φ, любая траектория системы продолжена на всю ось $(-\infty, +\infty)$, причем именно такие полные траектории, а не их части порождаются непродолжаемыми решениями (1).

У системы есть ровно две неподвижные точки (при условии, что $p_0 \neq 0$). Они обе находятся в первой карте и отличаются только знаком. Уравнение $\dot{u} = 0$, записанное в терминах $v = \mathrm{Re}\ u_0$ и $w = \mathrm{Im}\ u_0$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (2\mu+1)v_0^2 - w_0^2 & = & \mathrm{Re}\ p_0 \,, \\ 2(\mu+1)v_0w_0 & = & \mathrm{Im}\ p_0 \,, \end{array}\right.$$

можно легко решить, получив два решения: $u_0 = v_0 + w_0 i$, где

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}\ p_0 + \sqrt{(\mathrm{Re}\ p_0)^2 + \dfrac{2\mu+1}{(\mu+1)^2}(\mathrm{Im}\ p_0)^2}}{4\mu+2}} \,, \tag{2}$$

$$w_0 = \frac{\mathrm{Im}\ p_0}{2(\mu+1)\ v_0} \,.$$

и второе решение $-u_0 = -v_0 - w_0 i$.

Иногда удобнее записывать систему в терминах неподвижной точки u_0, а не p_0:

$$\dot{u} = (\mu+1)(u_0^2 - u^2) + \mu(|u_0|^2 - |u|^2)\,. \tag{3}$$

3.3. **Случай $u_0 = \pm i$. Замкнутые траектории.** Хотя случай $u_0 = \pm i$ соответствует действительному значению p_0, его исследование помогает понять поведение траекторий и для комплексных p_0.

В этом случае система записывается следующим образом:

$$\dot{u} = -1 - (\mu+1)u^2 - \mu|u|^2\,. \tag{4}$$

Среди ее решений легко находится одно действительнозначное, меняющееся от $+\infty$ до $-\infty$. На самом деле, это только часть замкнутой траектории на Φ, проходящей через единственную не покрытую первой картой точку. Так как другие траектории не могут проходить через эту же точку, они все полностью лежат в первой карте. Точнее, в полуплоскости $\operatorname{Im} u > 0$ или $\operatorname{Im} u < 0$. Ввиду инвариантности системы относительно комплексного сопряжения достаточно рассмотреть только первый случай. Для любой такой траектории, не являющейся неподвижной точкой, исследуем поведение $\arg(u-i)$, используя обозначения $v = \operatorname{Re} u$, $w = \operatorname{Im} u$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\arg(u-i) = \operatorname{Im}\frac{\dot{u}}{u-i} = \\
&= \operatorname{Im}\frac{\left(-1-(\mu+1)u^2-\mu|u|^2\right)(\overline{u}+i)}{|u-i|^2} = \\
&= -\frac{-w+|u|^2w+1+(\mu+1)\operatorname{Re}(u^2)+\mu|u|^2}{|u-i|^2} = \\
&= \frac{-w(w^2-1)-v^2(w+1)-2\mu v^2+w^2-1}{v^2+(w-1)^2} = \\
&= \frac{-(w^2-1)(w-1)-v^2(w+1)\quad-\quad 2\mu v^2}{v^2+(w-1)^2} = \\
&= -w-1-2\mu\left(\frac{v}{|u-i|}\right)^2 < -1\,.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что траектория обходит точку i по часовой стрелке, регулярно меняя знак $\operatorname{Re} u$.

Из (4) также вытекает, что все траектории симметричны относительно мнимой оси. Значит, все они, кроме действительной оси и двух неподвижных точек, представляют собой овалы, окружающие одну из неподвижных точек, причем обход i происходит по, а $-i$ — против часовой стрелки.

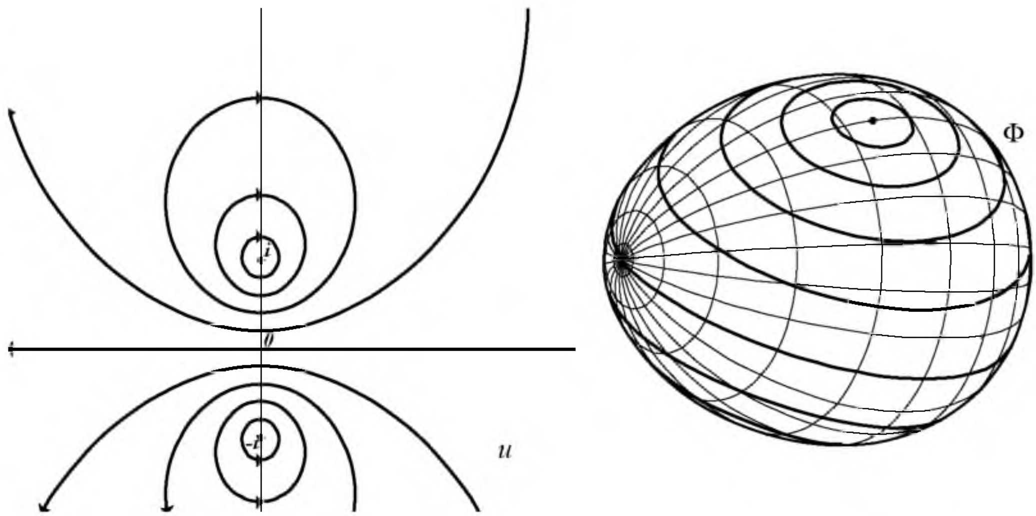

Рис. 2.

Глобально Ф, покрытое траекториями, выглядит, как глобус с двумя полюсами и множеством параллелей (см. рис. 2).

3.4. Случай комплексных p_0. Перейдем к случаю p_0 с ненулевой мнимой частью, при этом u_0 будет иметь и ненулевую действительную часть. Для использования предыдущего результата повернем и сожмем/растянем картину траекторий так, чтобы неподвижная точка, для которой $\operatorname{Re} u_0 > 0$, попала в i. Это преобразование записывается в первой карте в виде $u \mapsto iu/u_0$ и легко продолжается до глобального диффеоморфизма пространства Ф.

Непосредственные вычисления приводят к уравнению для такой модифицированной системы:

$$\dot{u} = i\Big((\mu + 1)\left(1 + u^2\right) u_0 + \mu\left(1 - |u|^2\right)\overline{u}_0\Big). \tag{5}$$

То, как ее траектории проходят через описанные выше овалы, можно выяснить, оценив знак мнимой части произведения $\dot{u}$ из (2) на $\dot{\overline{u}}$ из (5).

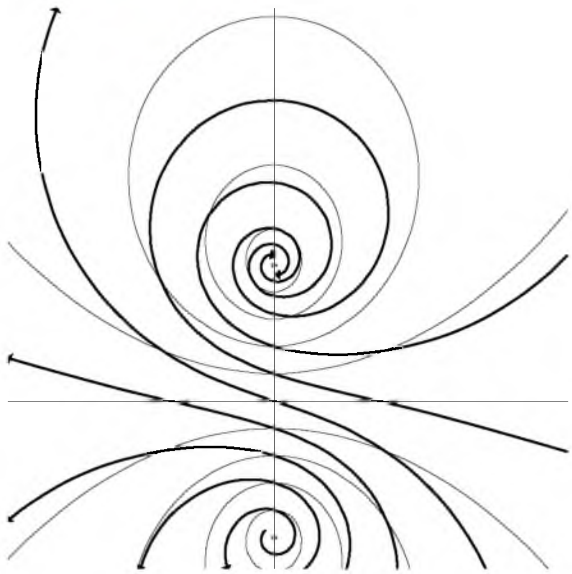

Рис. 3.

Это произведение равно

$$i\left((\mu+1)^2\left|1+u^2\right|^2\overline{u}_0-\mu^2\left(1-|u|^2\right)^2u_0\ + \right.$$

$$\left. +\ (\mu^2+\mu)\left(1-|u|^2\right)\left(\left(1+u^2\right)u_0-\left(1+\overline{u}^2\right)\overline{u}_0\right)\ \right).$$

Его мнимая часть выглядит менее громоздко

$$\left((\mu+1)^2\left|1+u^2\right|^2-\mu^2\left(1-|u^2|\right)^2\right)\mathrm{Re}\ u_0\,.$$

Согласно неравенству треугольника для векторов -1 и u^2, последнее выражение строго положительно для всех $u\in\mathbb{C}$, кроме $\pm i$. Это значит, что вне неподвижных точек все траектории системы (5) последовательно покидают все овалы, лежащие в полуплоскости $\mathrm{Im}\ u<0$, пересекают действительную ось, после чего последовательно проникают в овалы из полуплоскости $\mathrm{Im}\ u>0$ (см. рис. 3). Эти траектории не могут иметь предельную точку, отличную от $-i$ при $t\to-\infty$ и отличную от i при $t\to+\infty$. Поэтому, ввиду компактности многообразия Φ, для всех нетривиальных траекторий эти точки являются пределами.

Таким образом, траектории системы (3) – это две неподвижные точки и траектории, стремящиеся от одной из них к другой.

Зная неподвижные точки системы, можно явно выписать семейство решений уравнения (1). Используя полярную форму для $y=\rho e^{i\varphi}$, можно записать уравнение $u=u_0$ в виде

$$\frac{y'}{y|y|^{2\mu}}=\frac{(\rho'+i\rho\varphi')}{\rho^{2\mu+1}}=\mathrm{Re}\ u_0+i\ \mathrm{Im}\ u_0\,.$$

Решая его отдельно для действительной и мнимой частей, получим

$$\rho^{-2\mu} = -2\mu \mathrm{Re}\, u_0 \left(x - x_0\right),$$

а затем

$$\varphi = -\frac{\mathrm{Im}\, u_0}{2\mu \mathrm{Re}\, u_0} \ln|x - x_0| + \varphi_0.$$

Из неотрицательности ρ следует, что это решение определено на $(-\infty, x_0)$. Аналогичные формулы для $-u_0$ описывают решение, заданное на $(x_0, +\infty)$.

Для остальных траекторий имеют место соотношения $u \sim u_0$ при $t \to +\infty$ и $u \sim -u_0$ при $t \to -\infty$, приводящие к асимптотическим формулам для соответствующих решений уравнения (1), определенным на конечных интервалах (x_1, x_2).

Учитывая (2) и возвращаясь в обозначениях к $m = 4\mu$, получим следующее описание решений.

В рассматриваемом случае $p(x) \equiv p_0 = \mathrm{const} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ точное решение $Y(x)$, определенное на $(0, +\infty)$, имеет вид

$$|Y(x)| = C_1 x^{-2/m}, \qquad \arg Y(x) = C_2 \ln x$$

с постоянными

$$C_1 = \sqrt[m]{Q\left(\frac{1+4/m}{\mathrm{Im}\, p_0}\right)^2},$$

$$C_2 = -Q\frac{1+4/m}{\mathrm{Im}\, p_0},$$

$$Q = \frac{-\mathrm{Re}\, p_0 + \sqrt{(\mathrm{Re}\, p_0)^2 + \dfrac{8(m+2)}{(m+4)^2}(\mathrm{Im}\, p_0)^2}}{2}.$$

Оказывается, что все решения уравнения (1) за исключением тривиального $y \equiv 0$ имеют такую же асимптотику, как $Y(x)$.

Таким образом, доказана Теорема 1 (см. также рис. 4).

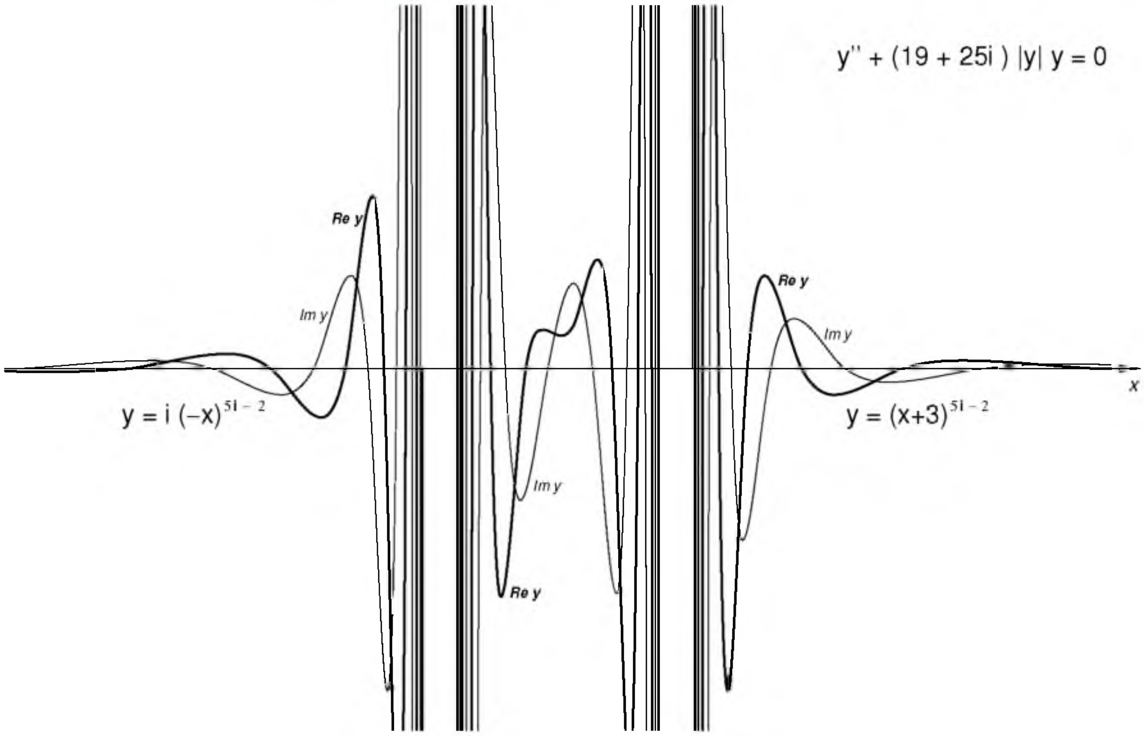

Рис. 4.

3.5. Случай непостоянной $p(x)$. Рассмотрим теперь случай, когда p зависит от x. Нетривиальные решения уравнения (1) по-прежнему порождают кривые на Ф, однако эти кривые не являются траекториями общей динамической системы. В первой карте кривые описываются уравнением

$$\dot{u} = \tilde{p}(t) - (\mu + 1)u^2 - \mu|u|^2$$

с различными функциями $\tilde{p}(t)$ для разных $y(x)$. Однако, некоторые свойства $p(x)$ наследуются $\tilde{p}(t)$, что помогает исследовать асимптотическое поведение траекторий на Ф и решений (1).

Пусть $y(x)$ – непродолжаемое решение уравнения (1), определенное на интервале (x_1, x_2) (возможно, неограниченном). Поскольку уравнение не изменяется при преобразовании $x \mapsto -x$, достаточно исследовать поведение решения $y(x)$ только вблизи x_2. Пусть $p(x) \to p_0$ при $x \to x_2$ (этот предел автоматически существует при $x_2 < +\infty$). Рассмотрим кривую, порождаемую $y(x)$ на Ф и преобразуем Ф (как и в случае $p(x) \equiv p_0$) таким образом, чтобы точка $u_0 = v_0 + w_0 i$, определяемая (2), перешла в i.

Преобразованная кривая не является траекторией (5). Но вне сколь угодно малых окрестностей точек $\pm i$ при $\tilde{p}(t)$ близких к p_0 с учетом непрерывности эта кривая пересекает овалы описанные для $u_0 = i$ в том же порядке, что и траектории (5). Таким образом, единственной возможной причиной для кривой не стремиться к $\pm i$ (или к $\pm u_0$

перед преобразованием Ф) является ограниченность t и τ при $x \to x_2$. Докажем, что этого не может быть.

Пусть $x_2 < +\infty$. Тогда, в силу непродолжаемости, хотя бы одна из функций $y(x)$ или $y'(x)$ должна быть неограниченной. Но это невозможно если t ограничено:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{d}{dt}\ln\left(|y'|^2+|y|^{4\mu+2}\right)\right|\\&\leqslant \frac{dx}{dt}\cdot\frac{2|y'|\,|y''|+(4\mu+2)\,|y|^{4\mu+1}|y'|}{|y'|^2+|y|^{4\mu+2}}\\&\leqslant \frac{2|y'|\,|y|^{4\mu+1}\left(\sup|p(x)|+2\mu+1\right)}{|y|^{2\mu}\left(|y'|^2+|y|^{4\mu+2}\right)}\\&\leqslant \frac{2|y'|\,|y|^{2\mu+1}\left(\sup|p(x)|+2\mu+1\right)}{|y'|^2+|y|^{4\mu+2}}\\&\leqslant \sup|p(x)|+2\mu+1\,.\end{aligned}$$

Докажем, что случай $x_2 = +\infty$ также невозможен. Пусть $s \in \Phi$ – предел траектории при $x \to +\infty$. Рассмотрим произвольное решение уравнения (1) с $p(x) \equiv p_0$ и начальными условиями (y_3, y_3') при $x_3 \in (x_1, x_2)$ порождающим s. Поскольку $s \neq \pm u_0$, существует $x_4 > x_3$ такое, что $(y(x_4), y'(x_4))$ порождает другую точку в Ф. Так как окрестность V точки s может быть выбрана так, что для любого решения (1) с $p(x)$ достаточно близкой к p_0 и начальными данными достаточно близкими к (y_3, y_3') соответствующая кривая в Ф будет покидать V перед $x = x_4$. Из этого множества решений, используя подстановку $z(x) = A\; y\left(|A|^{2\mu}(x - x')\right)$, можно получить любое решение (1) с $p(x)$ достаточно близкой к p_0 и начальными данными (для всех x) порождающими точку в Ф, достаточно близкую к s. Следовательно, любая кривая в Ф, порождаемая решением (1) и определенная в окрестности $+\infty$ не может иметь предела, отличного от $\pm u_0$. Это доказывает Теорему 2 и Теорему 3.

3.6. Оценки. Докажем Теорему 4.

Рассмотрим вещественнозначную непрерывную функцию, связанную с решением соотношением

$$V(x) = 2|y(x)|'|y(x)|^{-2\mu-1}$$

и определенную на максимальном интервале $(x_0 - \delta_*,\ x_0 + \delta^*)$, где определено и отлично от нуля $y(x)$.

Воспользовавшись очевидным соотношением

$$2|y|' = \left(|y|^2\right)'|y|^{-1} = (y'\,\overline{y} + y\,\overline{y}\,')|y|^{-1}\,,$$

можно представить функцию $V(x)$ в виде

$$V(x) = (y'\,\overline{y} + y\,\overline{y}\,')\,|y|^{-2\mu-2}\,.$$

Дифференцируя это соотношение, получаем

$$
\begin{aligned}
V'(x) &= \\
&= 2|y|^{2\mu}\mathrm{Re}\; p(x) + 2|y'|^2|y|^{-2\mu-2} - \\
&- (\mu+1)V(x)^2|y|^{2\mu} > \\
&> |y|^{2\mu}\;(\,2p_* - (\mu+1)\,V(x)^2\,)\;.
\end{aligned}
$$

Вначале рассмотрим случай $V(x_0) \geqslant 0$. В этом случае, поскольку $V'\big|_{V=0} > 0$, функция $V(x)$ остается положительной для всех $x \in (x_0,\; x_0+\delta^*)$. Из определения V следует, что $|y(x)|$ возрастает на этом интервале. Следовательно, $|y(x)| > |y(x_0)| \neq 0$ для $x \in (x_0,\; x_0+\delta^*)$ и функция $V(x)$ определена для всех $x \in (x_0,\; x_0+\varepsilon)$.

Обозначим $\sqrt{p_*/(\mu+1)}$ через V_*. Предположим, что $V(x_0) \in \big[0, V_*\big]$. Пока $V(x)$ остается на этом отрезке, для $x > x_0$ выполняется:

$$
\begin{aligned}
V'(x) &> |y|^{2\mu}\left(2p_* - (\mu+1)V_*^2\right) = \\
&= |y|^{2\mu}p_* > |y(x_0)|^{2\mu}p_*\;.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $V(x_1)$ становится равной V_* для некоторых $x_1 \in (x_0,\; x_0+\varepsilon)$ таких что

$$
x_1 - x_0 < \frac{V_*}{|y(x_0)|^{2\mu}p_*} = \frac{|y(x_0)|^{-2\mu}}{(\mu+1)V_*}\;. \tag{6}
$$

и поэтому $|y(x_1)| > |y(x_0)|$.

Теперь предположим, что $V(x_0) \geqslant V_*$. Поскольку $V'\big|_{V=V_*} > |y(x_0)|^{2\mu}p_* > 0$, неравенство $V(x) > V_*$ остается справедливым $x \in (x_0,\; x_0+\varepsilon)$. Поэтому для таких x получаем

$$
\left(|y|^{-2\mu}\right)' = -\mu V < -\mu V_*
$$

и следовательно $|y(x)|^{-2\mu} < |y(x_0)|^{-2\mu} - \mu V_*(x-x_0)$. Таким образом,

$$
x - x_0 < \frac{|y(x_0)|^{-2\mu}}{\mu V_*}\;. \tag{7}
$$

Оценки (6) и (7) показывают что ни одна из функций $V(x)$ и $y(x)$ не может быть определена при $x > x_0+\varepsilon$ для

$$
\varepsilon^2 \geqslant \frac{|y(x_0)|^{-4\mu}}{V_*^2}\left(\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{16(m+2)^2}{m^2(m+4)\;p_*}\;|y(x_0)|^{-m}\;. \tag{8}
$$

Случай $V(x_0) < 0$ исследуется аналогичным образом, но левее x_0. А именно, для отрицательной $V(x_0)$ ни одна из функций $V(x)$ и $y(x)$ не может быть определена при $x > x_0+\varepsilon$ для ε, удовлетворяющих (8). Это завершает доказательство.

Из доказанной теоремы немедленно вытекают все четыре следствия.

Замечание. Результаты об асимптотическом поведении решений уравнения с действительными коэффициентами содержатся в [11] (см. также библиографию), об асимптотическом поведении решений уравнения (1) с постоянным комплексным коэффициентом содержатся в [12], [13], о равномерных оценках положительных решений уравнений с действительными коэффициентами – в [14], некоторые результаты об оценках решений для уравнения (1) были опубликованы в [15], см. также [16].

Литература

1. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука, 1990. – 432 с.
2. Bidaut-Véron M.F. Local and global behaviour of solutions of quasilinear elliptic equations of Emden-Fowler type // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1989. – 107. – P.293-324.
3. Brezis H., Kato T. Remarks on the Shrödinger operator with singular complex potential // J.Math. pures et appl. – 1979. – 58. – P.137-151.
4. Constantin P. Decay estimates of Schrödinger equations // Commun. Math. Phys. – 1990. – 127. – P.101-108.
5. Doi S. On the Cauchy problem for Schrödinger type equations and the regularity of solutions // J. Math. Kyoto Univ. – 1994. – 34. – P.319-328.
6. Guerch B., Véron L. Local properties of stationnary solutions of some nonlinear singular Schrödinger equation // Rev. Mat. Iberoamericana. – 1991. – 7. – P.65-114.
7. Hayashi N. Global existence of small solutions to quadratic nonlinear Schrödinger equations // Comm. P.D.E.. – 1993. – 18. – P.1109-1124.
8. Kato T. Shrödinger operators with singular potentials // Israël J. Math. – 1972. – 13. – P.135-148.
9. Kato T. On some Shrödinger operators with a singular complex potential // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. IV. – 1978. – 5. – P.105-114.
10. Kondrat'ev V., Shubin M. Discreteness of spectrum for the Schrödinger operators on manifolds of bounded geometry / Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 110 / Birkhäuser Verlag: Basel/Switzerland, 1999.
11. Асташова И. В. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Современная математика и ее приложения. – 2003. – 8. – С.3-33.
12. Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений уравнения типа Эмдена-Фаулера с комплексным коэффициентом // Современная математика и ее приложения. – 2005. – 29. – С.14–18.
13. Astashova I.V. On asymptotic properties of the one-dimensional Schrödinger equation / Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 114 / Birkhäuser Verlag: Basel/Switzerland, 2000. – P.15-19.
14. Асташова И.В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Известия РАН. – 2008. – 72;6. – С.103-124.

15. Astashova I.V. Estimates of Solutions to One-dimensional Schrödinger Equation / World Scientific: Progress in Analysis, v. II / Proceedings of the 3rd International ISAAC Congress. – Singapore, 2003. – P.955-960.

16. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М: МЭСИ, 2010. – 242 с. (ISBN 978-5-7764-0647-8)

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO NONLINEAR EQUATIONS WITH COMPLEX COEFFICIENTS

I.V. Astashova

Moscow Lomonosov State University,
Leninskie gory, GSP-1, Moscow, 119991, Russia, e-mail: ast@diffiety.ac.ru

Abstract. Asymptotic formulas for modulus and argument of solutions and uniform estimates of solutions are obtained to nonlinear differential equations of Emden-Fowler's type with complex coefficients.

Key words: asymptotic behavior, uniform estimates of solutions, complex coefficients.