УДК 517.958, 517.986.7

ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Х.Г. Умаров [17)]

Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32, Грозный, 364037, Россия, e-mail: umarov50@mail.ru

Аннотация. Для линейного дифференциального уравнения в частных производных, моделирующего эволюцию линии свободной поверхности фильтрующейся жидкости, получен явный вид решения задачи Коши сведением поставленной задачи фильтрации к решению абстрактной задачи Коши в банаховом пространстве.

Ключевые слова: свободная поверхность фильтрующейся жидкости, сильно непрерывные полугруппы операторов.

Рассмотрим в области $x \in R^1, 0 < t < T \leq +\infty$, линейное дифференциальное уравнение в частных производных, моделирующее эволюцию линии свободной поверхности при фильтрации грунтовых вод [1]

$$\lambda u_t - u_{xxt} = \alpha u_{xx} - \beta u_{xxxx} + f\,, \tag{1}$$

где $u = u\,(x,t)$ — искомая функция, характеризующая напор жидкости; $f = f\,(x,t)$ — заданная функция, учитывающая внешнее воздействие на фильтрационный поток; λ, α, β -— положительные постоянные зависящие от свойств водоносного грунта.

Уравнение (1) является псевдопараболическим уравнением соболевского типа не разрешенным относительно производной по временной переменной t. Различные прямые и обратные начально-краевые задачи, для уравнения обобщающего уравнение (1), исследовались многими авторами (см., например, [2] и приведенную там библиографию).

Будем искать решение уравнения (1) в банаховом пространстве $L_p\,(R^1)$, $1 \leq p < +\infty$, функций $\psi = \psi\,(x)$ с интегрируемой по R^1 p-ой степенью абсолютной величины, норма которого определяется по формуле $\|\,\psi\|_{L_p(R^1)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\,\psi\,(x)\,|^p dx\right)^{1/p} \equiv \|\,\psi\|_{L_p}$, т.е. будем предполагать, что начальная функция

$$u|_{t=0} = \varphi\,(x)\,. \tag{2}$$

свободный член $f\,(x,t)$ и искомое решение $u\,(x,t)$, вместе со всеми производными входящими в уравнение (1), для всех значений временной переменной t, по переменной x принадлежат банахову пространству $L_p\,(R^1)$.

---

[17]Умаров Х.Г., доцент Чеченского государственного университета.

Наша цель – получить явный вид решения $u(x,t)$ задачи Коши (1), (2), при этом решение $u(x,t)$ непрерывно при $t \in [0,T[$ по норме пространства $L_p(R^1)$, а входящие в уравнение частные и смешанные производные непрерывны при $t \in]0,T[$ также по норме пространства $L_p(R^1)$.

В пространстве $L_p(R^1)$, $1 \le p < +\infty$, дифференциальный оператор d^2/dx^2, с областью определения $D\left(d^2/dx^2\right) = \{\psi(x) \in L_p(R^1)$: обобщенные производные $\psi'(x)$, $\psi''(x) \in L_p(R^1)\}$ порождает сжимающую [3, с. 261], [4, с. 58] сильно непрерывную, более того – аналитическую, полугруппу $U\left(t; d^2/dx^2\right)$, $t \ge 0$, класса C_0, представляющуюся сингулярным интегралом Гаусса–Вейерштрасса:

$$U\left(t; \frac{d^2}{dx^2}\right)\psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\psi(\xi)\,d\xi\,, \qquad t \ge 0\,. \tag{3}$$

Положительная полуось принадлежит резольвентному множеству оператора d^2/dx^2 и для резольвенты $\left(\lambda I - d^2/dx^2\right)^{-1}$, $\lambda > 0$, справедлива [3, с. 37] оценка

$$\lambda\left\|\left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\right\| \le 1\,. \tag{4}$$

Наличие в точке $\lambda > 0$, резольвенты $\left(\lambda I - d^2/dx^2\right)^{-1}$ позволяет существенно преобразовать уравнение (1), разрешив его относительно производной по времени. Именно, пусть $u(x,t)$ – решение задачи Коши (1), (2), для которого частные производные по переменной x первого и второго порядков непрерывны при $t \in [0,T[$. Введем новую неизвестную функцию

$$v = \lambda u - u_{xx}\,. \tag{5}$$

Из замены (5) можно единственным образом определить значение

$$v|_{t=0} = \lambda u(x,0) - u_{xx}(x,0) = \lambda\varphi(x) - \varphi_{xx}(x)$$

при условии, что производные $d^k\varphi(x)/dx^k$, $k = 1, 2$, принадлежат пространству $L_p(R^1)$, и выразить решение $u(x,t)$ задачи Коши (1), (2) через новую неизвестную функцию $v(x,t)$:

$$u = \left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} v\,. \tag{6}$$

В результате подстановки (6) приходим к уравнению:

$$v_t = \left(\alpha I - \beta\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{d^2}{dx^2}\left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} v + f\,, \qquad t > 0\,. \tag{7}$$

Операторный коэффициент в уравнении (7) – линейный оператор

$$\left(\alpha I - \beta\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{d^2}{dx^2}\left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} = \left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\left(\alpha I - \beta\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{d^2}{dx^2}$$

определен на функциях $\psi(x) \in L_p(R^1)$, для которых существуют обобщенные производные $d^k\psi(x)/dx^k$, $k = \overline{1,4}$, принадлежащие пространству $L_p(R^1)$, и его можно продолжить до оператора

$$A+B, \qquad A = \beta\frac{d^2}{dx^2},\ B = -(\alpha-\beta\lambda)\left[I - \lambda\left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\right],$$

область определения которого $D(A+B) = D\left(d^2/dx^2\right)$.

Таким образом, приходим к абстрактному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, обобщающему уравнение (7) в банаховом пространстве $L_p(R^1)$,

$$V_t = (A+B)V + F(t)\,, \qquad t>0\,, \tag{8}$$

где $V = V(t) : t \to v(x,t)$ – искомая, а $F(t) : t \to f(x,t)$ – заданная функции, определенные для $t \in [0,T[$ и со значениями в $L_p(R^1)$. Начальное условие (2) в $L_p(R^1)$ перепишется в виде

$$V|_{t=0} = \Phi\,, \tag{9}$$

здесь $\Phi = \left(\lambda I - d^2/dx^2\right)\varphi(x)$ – элемент пространства $L_p(R^1)$.

Поставленная цель – поиск решения $u(x,t)$ задачи Коши (1), (2), приводит в случае замены (5) и предположения о непрерывности частных производных $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ при $t \in [0,T[$, к необходимости нахождения решения [5, с. 105], [6, с. 462] абстрактной задачи Коши (8), (9): функции $V(t)$ непрерывной при $t \in [0,T[$ и непрерывно дифференцируемой при $t \in]0,T[$ по норме банахова пространства, значения которой принадлежат области определения оператора $A+B$ при $t \in]0,T[$.

Оператор

$$A = \beta\frac{d^2}{dx^2}\,, \qquad D(A) = D\left(\frac{d^2}{dx^2}\right),$$

является производящим оператором сжимающей аналитической полугруппы $U(t;A)$ класса C_0, для которой справедливо представление

$$U(t;A) = U\left(t;\beta\frac{d^2}{dx^2}\right) = U\left(\beta t;\frac{d^2}{dx^2}\right). \tag{10}$$

Возмущающий оператор

$$B = -(\alpha-\beta\lambda)I + (\alpha-\beta\lambda)\lambda\left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}, \qquad D(B) = L_p\left(R^1\right),$$

линеен и ограничен на всём пространстве, поэтому является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы (более того – группы) класса C_0:

$$U(t;B) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\,B^k\,,$$

для которой справедливы представление

$$U(t;B) = e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} U\left(\lambda(\alpha-\beta\lambda)t; \left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\right) =$$

$$= e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha-\beta\lambda)^k \lambda^k t^k}{k!} \left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-k} \tag{11}$$

и оценка

$$\|U(t;B)\| \le e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\alpha-\beta\lambda|^k \lambda^k t^k}{k!} \left\| \left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} \right\|^k .$$

Следовательно, используя оценку (4) резольвенты дифференциального оператора d^2/dx^2, приходим к заключению:

1) если $\alpha - \beta\lambda \ge 0$, то полугруппа $U(t;B)$ является сжимающей: $\|U(t;B)\| \le 1$;

2) если $\alpha - \beta\lambda < 0$, то справедлива оценка нормы $\|U(t;B)\| \le e^{2|\alpha-\beta\lambda|t}$.

Дифференциальный оператор $-\lambda I + d^2/dx^2$, $\lambda > 0$, является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы класса C_0, норма которой экспоненциально убывает:

$$U\left(t; -\lambda I + \frac{d^2}{dx^2}\right) = e^{-\lambda t} U\left(t; \frac{d^2}{dx^2}\right) ,$$

поэтому, используя формулу [6, с. 297] для отрицательных степеней производящего оператора полугруппы с отрицательным типом найдём, для последующего использования, выражение для степеней резольвенты: $(\lambda > 0, k = 1, 2, \ldots)$

$$\left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-k} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} s^{k-1} e^{-\lambda s} U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right) ds \,. \tag{12}$$

Применяя соотношения (12), продолжим преобразование степенного ряда в (11):

1) если $\alpha - \beta\lambda \ge 0$, то

$$U(t;B)\psi = e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} \left[\psi + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\alpha-\beta\lambda)^k \lambda^k t^k}{(k-1)!k!} \int_0^{+\infty} s^{k-1} e^{-\lambda s} U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi ds\right] =$$

$$= e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} \left[\psi + \sqrt{(\alpha-\beta\lambda)\lambda t} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} I_1\left(2\sqrt{(\alpha-\beta\lambda)\lambda s t}\right) U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi \frac{ds}{\sqrt{s}}\right] ,$$

где $I_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$ – модифицированная функция Бесселя, а ψ – произвольный элемент пространства $L_p(R^1)$;

2) если $\alpha - \beta\lambda < 0$, то

$$U(t;B)\psi = e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}\Bigg[\psi - \sqrt{|\,\alpha-\beta\lambda\,|\,\lambda t}\ \times$$

$$\times\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!}\left(\sqrt{|\,\alpha-\beta\lambda\,|\lambda s t}\right)^{2k+1} U\left(s;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi\frac{ds}{\sqrt{s}}\Bigg] =$$

$$= e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}\left[\psi - \sqrt{|\,\alpha-\beta\lambda\,|\,\lambda t}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} J_1\left(2\sqrt{|\,\alpha-\beta\lambda\,|\,\lambda s t}\right) U\left(s;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi\frac{ds}{\sqrt{s}}\right],$$

где $J_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k (z/2)^{2k+1}}{k!\,(k+1)!}$ — функция Бесселя.

Теперь, вводя обозначение

$$G_{J_1}^{I_1}(\alpha,\beta,\lambda,s,t) = \begin{cases} I_1\left(2\sqrt{(\alpha-\beta\lambda)\,\lambda s t}\right) & , \quad \alpha-\beta\lambda \ge 0\,; \\ -J_1\left(2\sqrt{|\,\alpha-\beta\lambda\,|\,\lambda s t}\right) & , \quad \alpha-\beta\lambda < 0\,, \end{cases}$$

представление для полугруппы, порождаемой оператором B, можно записать в виде

$$U(t;B)\psi = e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}\left[\psi + \sqrt{|\,\alpha-\beta\lambda\,|\,\lambda t}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} G_{J_1}^{I_1}(\alpha,\beta,\lambda,s,t)\, U\left(s;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi\frac{ds}{\sqrt{s}}\right]. \tag{13}$$

Из полученных представлений (10) и (13) соответственно полугрупп $U(t;A)$ и $U(t;B)$ через полугруппу (3), порождаемую оператором d^2/dx^2, следует их коммутирование.

При возмущении производящего оператора A аналитической полугруппы $U(t;A)$ класса C_0 линейным ограниченным оператором B, оператор $A+B$ с областью определения $D(A+B) = D(A)$, также порождает [4, с. 183], [5, с. 77, с. 81] аналитическую полугруппу $U(t;A+B)$ класса C_0, при этом возмущённая полугруппа определяется для произвольного элемента ψ банахова пространства разложением в ряд:

$$U(t;A+B)\psi = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t)\psi\,, \qquad t \ge 0\,,$$

где $U_0(t)\psi = U(t;A)\psi$ и $U_k(t)\psi = \int_0^t U(t-s;A)\,BU_{k-1}(s)\psi ds$, $k \ge 1$, причём ряд абсолютно сходится, равномерно по t в любом конечном интервале положительной полуоси.

В нашем случае, возмущающий линейный ограниченный оператор B коммутирует с полугруппой, порождаемой возмущаемым оператором A:

$$BU(t;A)\psi = U(t;A)B\psi\,,$$

так как этим свойством обладает резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ и полугруппа $U(t;A)$, для любого производящего оператора A сильно непрерывной полугруппы класса C_0. Отсюда следует, что для произвольного элемента ψ банахова пространства

$$U_k(t)\psi = \frac{t^k}{k!}B^k U(t;A)\psi = \frac{t^k}{k!}U(t;A)B^k\psi$$

и, значит, справедливо представление

$$\begin{aligned} &U(t;A+B)\psi = U(t;A)U(t;B)\psi = U(t;B)U(t;A)\psi = \\ &= e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}\left[U\left(\beta t;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi + \right. \\ &\left. +\sqrt{|\,\alpha-\beta\lambda\,|\,\lambda t}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}G_{J_1}^{I_1}(\alpha,\beta,\lambda,s,t)\,U\left(s+\beta t;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi\frac{ds}{\sqrt{s}}\right] \end{aligned} \tag{14}$$

и оценка нормы

$$\|U(t;A+B)\| \le \|U(t;A)\|\,\|U(t;B)\| \le \begin{cases} 1\,, & \alpha-\beta\lambda \ge 0\,; \\ e^{2|\alpha-\beta\lambda|t}\,, & \alpha-\beta\lambda < 0\,. \end{cases} \tag{15}$$

Итак, в абстрактном уравнении (8) коэффициент $A+B$ является производящим оператором аналитической полугруппы (14) класса C_0. Поэтому [4, с. 170], [5, с. 104, с. 113], если норма свободного члена $F(t)$ уравнения (8) интегрируема по промежутку $[0,T[$: $\int_0^T \|F(t)\|\,dt < +\infty$ и функция $F(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера $\|F(t)-F(s)\| \le c(\epsilon)\,|\,t-s\,|^{\gamma}$, $t,\ s\in[\epsilon,T[$, $\epsilon,\ \gamma>0$, то абстрактная задача Коши (8), (9), для произвольного начального данного Φ из рассматриваемого банахова пространства, имеет единственное решение, которое даётся формулой

$$V = U(t;A+B)\Phi + \int_0^t U(t-\tau;A+B)F(\tau)\,d\tau\,, \qquad t\ge 0\,. \tag{16}$$

Принадлежность элемента Φ пространству $L_p(R^1)$ следует из принадлежности, как начальной функции $\varphi(x)$, так и функций $d^k\varphi(x)/dx^k$, $k=1,2$, пространству $L_p(R^1)$. Соответственно, для выполнения выше приведённых требований к свободному члену F уравнения (8) достаточно, чтобы свободный член $f(x,t)$ уравнения (1) имел интегрируемую по промежутку $[0,T[$ норму $\|f(x,t)\|_{L_p}$:

$$\int_0^T \|f(x,t)\|_{L_p}dt < +\infty \tag{17}$$

и удовлетворял локальному условию Гёльдера по переменной t по норме пространства $L_p(R^1)$:

$$\|f(x,t)-f(x,s)\|_{L_p} \le c(\epsilon)\,|\,t-s\,|^{\gamma}\,, \qquad t,s\in[\epsilon,T[\;, \quad \epsilon,\gamma>0\,. \tag{18}$$

Предполагая выполнение всех этих требований, действуя на обе части соотношения (16) оператором $\left(\lambda I - d^2/dx^2\right)^{-1}$, $\lambda>0$, и используя перестановочность полугруппы

$U(t;A+B)$ и резольвенты $\left(\lambda I - d^2/dx^2\right)^{-1}$, выводим формулу для решения уравнения (1)

$$u = U(t;A+B)\,\varphi(x) + \int_0^t U(t-\tau;A+B)\left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} f(x,\tau)\,d\tau\,, \tag{19}$$

для которого, в силу неравенств (15), справедлива оценка

$$\begin{cases} \|u(x,t)\|_{L_p} \le \|\varphi(x)\|_{L_p} + \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^t \|f(x,\tau)\|_{L_p} d\tau\,, & \alpha-\beta\lambda \ge 0\,; \\ \|u(x,t)\|_{L_p} \le e^{2|\alpha-\beta\lambda|t}\,\|\varphi(x)\|_{L_p} + \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^t e^{2|\alpha-\beta\lambda|\tau}\,\|f(x,t-\tau)\|_{L_p} d\tau\,, & \alpha-\beta\lambda < 0. \end{cases} \tag{20}$$

Теперь, применяя представления (14) и (12) соответственно полугруппы $U(t;A+B)$ резольвенты $\left(\lambda I - d^2/dx^2\right)^{-1}$ через полугруппу, порождаемую оператором d^2/dx^2, из формулы (19) имеем

$$\begin{aligned} u(x,t) = e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}&\left[U\left(\beta t;\frac{d^2}{dx^2}\right)\varphi(x) + \right. \\ &\left. + \sqrt{|\,\alpha-\beta\lambda\,|\,\lambda t}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} G_{J_1}^{I_1}(\alpha,\beta,\lambda,s,t)\,U\left(s+\beta t;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi(x)\,\frac{ds}{\sqrt{s}}\right] + \\ &+ \int_0^t e^{-(\alpha-\beta\lambda)(t-\tau)}d\tau\,\left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda r} U\left(r+\beta(t-\tau);\frac{d^2}{dx^2}\right) f(x,\tau)\,dr + \right. \\ &+ \sqrt{|\,\alpha-\beta\lambda\,|\,\lambda(t-\tau)}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} G_{J_1}^{I_1}(\alpha,\beta,\lambda,s,t-\tau)\,\frac{ds}{\sqrt{s}}\,\times \\ &\left.\times \int_0^{+\infty} e^{-\lambda r} U\left(r+s+\beta(t-\tau);\frac{d^2}{dx^2}\right) f(x,\tau)\,dr\right]. \end{aligned}$$

Наконец, применяя представление (3) полугруппы, порождаемой оператором d^2/dx^2, получаем явный вид решения задачи Коши для одномерного уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(\alpha-\beta\lambda)t} \left[\frac{1}{\sqrt{\beta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\beta t}} \varphi(\xi) d\xi \ + \right.$$

$$\left. + \sqrt{|\,\alpha-\beta\lambda\,|\,\lambda t} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} G_{J_1}^{I_1}(\alpha,\beta,\lambda,s,t) \frac{ds}{\sqrt{s\,(s+\beta t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(s+\beta t)}} \varphi(\xi)\, d\xi \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-(\alpha-\beta\lambda)(t-\tau)} d\tau \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda r} \frac{dr}{\sqrt{r+\beta(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4[r+\beta(t-\tau)]}} f(\xi,\tau) d\xi + \right. \tag{21}$$

$$+ \sqrt{|\,\alpha-\beta\lambda\,|\,\lambda\,(t-\tau)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} G_{J_1}^{I_1}(\alpha,\beta,\lambda,s,t-\tau) \frac{ds}{\sqrt{s}} \times$$

$$\left. \times \int_0^{+\infty} e^{-\lambda r} \frac{dr}{\sqrt{r+s+\beta\,(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4[r+s+\beta(t-\tau)]}} f(\xi,\tau)\, d\xi \right].$$

Таким образом, предполагая, что

1) решение $u\,(x,t)$ задачи Коши (1), (2) удовлетворяет дополнительному требованию непрерывности частных производных $u_x\,(x,t)$, $u_{xx}\,(x,t)$ при $t \in [0,T[$, и, значит, требуя принадлежность начальной функции $\varphi\,(x)$ и функций $d^k\varphi\,(x)\,/dx^k$, $k=1,2$ пространству $L_p\,(R^1)$;

2) свободный член $f\,(x,t)$ удовлетворяет условиям (17), (18);

получили представление в явном виде (21) решения уравнения, моделирующего эволюцию линии свободной поверхности при фильтрации грунтовых вод, и его оценку (20) в пространстве $L_p\,(R^1)$.

Теперь выясним, каким условиям достаточно подчинить начальную функцию $\varphi\,(x)$ и свободный член $f\,(x,t)$ уравнения (1), чтобы формула (21) давала решение задачи Коши (1), (2).

При выводе формулы (21) от функции $F\,(t)$, а значит, и от функции $f\,(x,t)$, не требовалось выполнение каких-либо дополнительных условий, кроме тех, что возникают в общей теории линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка в банаховом пространстве, в которых операторный коэффициент порождает аналитическую полугруппу класса C_0.

Поэтому рассмотрим функцию

$$u_0 = U\,(t; A+B)\,\varphi\,, \tag{22}$$

представляющую вклад начального условия (2) в формулу (19) для решения уравнения (1). Так как $U\,(t; A+B)$ является аналитической полугруппой класса C_0, то [3]–[6] функция (22) для любой функции φ из пространства $L_p\,(R^1)$:

1) непрерывна при $[0, T[$ по норме пространства $L_p(R^1)$ и для неё выполняется начальное условие (2);

2) при $t > 0$ непрерывно дифференцируема по норме пространства $L_p(R^1)$ и значения $U(t; A+B)\varphi$ принадлежат области определения оператора $A+B$, более того

$$\frac{d^k u_0}{dt^k} = (A+B)^k U(t; A+B)\varphi, \quad k = 1, 2, \dots ;$$

3) при $t > 0$

$$\left(\lambda I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u_0}{\partial t} = \left(\lambda I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(A+B)\,u_0 =$$

$$= \left(\lambda I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left\{\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\alpha - \beta\lambda)\left[I - \lambda\left(\lambda I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}\right]\right\}u_0 = \alpha\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4},$$

т.е. функция (22) удовлетворяет уравнению (1).

Отсюда следует, что функция (22) является решением задачи Коши (1), (2). Таким образом, имеет место

Теорема. *Пусть в задаче Коши (1), (2) для одномерного уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью начальное данное $\varphi(x)$ принадлежит пространству $L_p(R^1)$, $1 \le p < +\infty$, а свободный член $f(x,t)$ удовлетворяет условию (17) интегрируемости нормы в пространстве $L_p(R^1)$ по промежутку $[0, T[$ и локальному условию Гёльдера (18) по переменной t по норме пространства $L_p(R^1)$, тогда существует единственное решение этой задачи в пространстве $L_p(R^1)$, $1 \le p < +\infty$, которое представляется формулой (21) и для него справедлива оценка (20).*

Замечание. Из оценки (20) следует непрерывная зависимость решения от начального данного на любом конечном временном отрезке, причем если $\alpha - \beta\lambda \ge 0$, то норма решения однородного уравнения не более нормы начального данного на всем временном промежутке рассмотрения, если же $\alpha - \beta\lambda < 0$, то решение может расти как $e^{2|\alpha-\beta\lambda|t}$.

Литература

1. Дзекцер Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // ДАН СССР. -– 1972. -– 202;5. -– С.1031-1033.

2. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 736 с.

3. Butzer P. L., Berens H. Semi-Groups of Operators and Approximation / Grundlehren Math. Wiss., vol. 145 / New York: Springer-Verlag, 1967. — P. 318.

4. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, 1967. -– 464 с.

5. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / Appl. Math. Sci., vol. 44 / New York: Springer-Verlag, 1983. -– P.279.

6. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.: Наука, 1966. – 500 с.

EXPLICIT SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM TO THE ONE DIMENSIONAL EQUATION FOR GROUNDWATER MOTION WITH A FREE SURFACE

Kh.G. Umarov

Chechen State University,
Sheripov St., 32, 364037, Groznyi, Russia, e-mail: umarov50@mail.ru

Abstract. The linear partial differential equation modeling evolution of free surface curve of filtering liquid is under consideration. Explicit solution of the Cauchy problem is obtained by reduction of filtering problem to solution of the abstract Cauchy problem in the Banach space.

Key words: filtering liquid free surface, strongly continuous semi-groups of operators.