



## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

**Е.Г. ЖИЛЯКОВ, А.И. СКАНДАКОВ  
Ю.А. КАЛАШНИКОВА, О.Н. ИВАНОВ**

*Белгородский государственный  
национальный исследовательский  
университет*

*e-mail: Zhilyakov@bsu.edu.ru*

В статье рассматривается метод представления решения через ядро для решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода, его распараллеливание с использованием технологий OpenMP и MPI.

Ключевые слова: параллельные вычисления, интегральные уравнения, эмпирические данные

Известно [1,2,3], что если  $K(\tau, t)$ ,  $\tau \in [c, d]$ ,  $t \in [a, b]$ , является аппаратной функцией линейной системы, то интегральное соотношение вида

$$u(\tau) = \int_a^b K(\tau, t) f(t) dt, \quad \tau \in [c, d], \quad (1)$$

с достаточной для практических задач точностью позволяет по значениям входного воздействия (сигнала)  $f(t)$  вычислить значения отклика  $u(\tau)$ , которые регистрируются на выходе системы.

Положение существенно осложняется, когда возникает необходимость решать так называемую обратную задачу вычисления значений входных воздействий по значениям откликов, которые регистрируются на выходе системы (восстановление сигналов).

Основные трудности построения вычислительных процедур связаны с математической некорректностью [4] обратной задачи, которая проявляется в невозможности построения ограниченного обратного оператора для уравнения (1). Поэтому в общем случае вычисления доступны только некоторые приближения (аппроксимации) входных воздействий, причем для устойчивости вычислительных процедур надо применять специальные приемы, которые реализуют те или иные априорные соображения [3,4,5].

В данной работе рассматривается численная реализация метода представления решения через ядро для решения уравнения (1), предложенного в [6].

### Характер информации о входном воздействии в эмпирических данных

Под эмпирическими данными будем понимать результаты регистрации с помощью аналого-цифрового преобразователя на выходе линейной системы реальных откликов, чему соответствует математическая модель

$$v_k = u_k + r_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где в соответствии с определением (1)

$$u_k = (\varphi_k, f) = \int_a^b K(\tau_k, t) f(t) dt; \quad (3)$$

$$\varphi_k(t) = K(\tau_k, t), \quad t \in [a, b]; \quad c = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N = d;$$

символ  $(\cdot)$  означает скалярное произведение в евклидовом пространстве;

$r_k$ ,  $k = 1, \dots, N$  – неизвестная (случайная) погрешность регистрации отклика на входной воздействие.

Непосредственно из (3) следует [7], что вектор  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_N)^T$ , а следовательно и вектор  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_N)^T = \vec{u} + \vec{r} = \vec{u} + (r_1, \dots, r_N)^T$ , где верхний индекс  $T$  означает транспонирование.



рование, не содержат компоненты  $f_2(t), t \in [a, b]$  ортогонального разложения искомого входного воздействия:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t), t \in [a, b], \tag{4}$$

где имеют место равенства

$$(\varphi_k, f_2) = 0, k = 1, \dots, N, \tag{5}$$

а другая компонента представима в виде линейной комбинации

$$f_1(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k(t). \tag{6}$$

Удовлетворяющие условиям (5) компоненты входных воздействий безвозвратно теряются, а восстановлению доступны только компоненты входного воздействия вида (6). Это в общем случае позволяет говорить лишь о возможности вычислений некоторых приближений к искомым сигналам даже при отсутствии погрешностей регистрации.

Использование представления вида (6) даёт возможность свести задачу к оцениванию параметров линейной формы.

### Устойчивые вычисления доступных восстановлению компонент

Очевидно, что с учётом равенств (4) и представления (6) на основе определений (2) вектор зарегистрированных значений можно представить в виде

$$\vec{v} = A\vec{\alpha} + \vec{r}, \tag{7}$$

где  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$ ;  $A = \{a_{ik}\}, i, k = 1, \dots, N$ ;

$$a_{ik} = (\varphi_i, \varphi_k). \tag{8}$$

Матрица в представлении (7) является симметричной и неотрицательно определённой. Поэтому [7], она обладает полным набором собственных ортонормальных векторов, соответствующих неотрицательным собственным числам и удовлетворяющих условиям

$$\lambda_i \vec{q}_i = A\vec{q}_i, i = 1, \dots, N, \tag{9}$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M > 0, \lambda_{M+k} = 0, k = 1, \dots, N - M;$$

$$(\vec{q}_i, \vec{q}_k) = \delta_{ik}, i, k = 1, \dots, N; \tag{10}$$

$$\vec{q}_i = (q_{1i}, \dots, q_{Ni})^T.$$

Здесь  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера, а  $M$  – ранг матрицы.

Полагая

$$p_k = (\vec{\alpha}, \vec{q}_k); \gamma_k = (\vec{v}, \vec{q}_k); \varepsilon_k = (\vec{r}, \vec{q}_k), k = 1, \dots, N; \tag{11}$$

$$\gamma_k = (\vec{u}, \vec{q}_k), k = 1, \dots, N;$$

на основании представления (7) нетрудно получить соотношения между этими проекциями

$$\gamma_k = \lambda_k p_k + \varepsilon_k, k = 1, \dots, N; \tag{12}$$

Заметим, что ввиду первого из условий (10) при отсутствии погрешностей регистрации должны выполняться равенства

$$\gamma_k = 0, k = M + 1, \dots, N, \tag{13}$$

и компонента входного воздействия вида (6) при любом значении ранга матрицы восстанавливается точно (если пренебречь влиянием погрешностей вычислений) с использованием соотношений

$$p_k = \gamma_k / \lambda_k, k = 1, \dots, M, \tag{14}$$

а вектор параметров в представлении (6), очевидно, может быть вычислен на основе представления



$$\vec{\alpha} = \sum_{k=1}^M p_k \vec{q}_k. \quad (15)$$

При этом норма компоненты (6) с учётом определений (8), (11) и условий (10) может быть представлена в виде

$$\|f_1\|^2 = \sum_{k=1}^M p_k^2 \lambda_k = \sum_{k=1}^M \gamma_k^2 / \lambda_k. \quad (16)$$

Для достижения устойчивости вычислений восстанавливаемой компоненты (6) представляется естественным использовать формулируемый на основе представлений (12) и (16) вариационный принцип

$$\|f_1\|^2 = \sum_{k=1}^M p_k^2 \lambda_k = \min, \forall \vec{p} \in R^M, \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^M (\gamma_k - p_k \lambda_k)^2 = s^2. \quad (18)$$

Очевидно, что в правой части условия (18) должна использоваться оценка квадрата евклидовой нормы неизвестного вектора погрешностей регистрации отклика  $\vec{r} = (r_1, \dots, r_N)^T$ . Способ вычисления такой оценки будет рассмотрен позже, а сейчас только заметим, что для автоматического получения равенств вида (14) при отсутствии погрешностей необходимо, чтобы используемая оценка удовлетворяла следующему требованию

$$\|\vec{r}\|^2 = \|\vec{\varepsilon}\|^2 = 0 \Rightarrow s^2 = 0 \quad (29)$$

Легко показать, что формальное решение вариационной задачи (17), (18) определяются соотношениями

$$\hat{p}_k = \mu \gamma_k / (1 + \mu \lambda_k), k = 1, \dots, M, \quad (20)$$

где  $\mu$  – положительный множитель Лагранжа, который должен удовлетворять получаемому в соответствии с условием (18) уравнению

$$F(\mu) = \sum_{k=1}^M \gamma_k^2 / (1 + \mu \lambda_k)^2 = s^2. \quad (21)$$

$$\sum_{k=1}^M \gamma_k^2 / (1 + \mu \lambda_k)^2 = s^2$$

Для получения оценки квадрата евклидовой нормы неизвестного вектора погрешностей регистрации отклика, прежде всего, отметим, что невыполнение равенств (13) может быть обусловлено только наличием погрешностей регистрации. Поэтому эти проекции вектора погрешностей на собственные векторы и предлагается использовать для оценивания квадрата его евклидовой нормы на основе соотношения

$$\|\vec{r}\|^2 = \|\vec{\varepsilon}\|^2 \approx s^2 = N / (N - M) * \{ \|\mathbf{v}\|^2 - \sum_{k=1}^M \gamma_k^2 \}. \quad (22)$$

$$s^2 = M / (N - M) * \{ \|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{k=1}^M \gamma_k^2 \}$$

Тогда согласно представлениям (20) получаемое аналогично (17) приближение доступной компоненты выглядит следующим образом:

$$\hat{f}_1(t) = \sum_{k=1}^N \hat{\alpha}_k \varphi_k(t), \quad (23)$$

где

$$\hat{\vec{\alpha}} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_N)^T = \sum_{k=1}^M \hat{p}_k \vec{q}_k.$$

### Разработка последовательного алгоритма

Словесное описание алгоритма method



Для решения интегральных уравнений методом представления решения через ядро разработан алгоритм, словесное описание которого состоит в следующем.

1) Ввод исходных данных:

$u(y)$  – вектор отклика,  
 $a, b$  – пределы интегрирования,  
 $c, d$  – пределы изменения  $y$ ,  
 $x[N]$  и  $y[N]$  – вектора,  
 $R(y,x)$  – ядро.

2) Насчитать матрицу  $A$  по формуле:

$$A = \{a_{ij}\} \quad a_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$$

$$\varphi_i(x) = K(y_i, x)$$

3) Найти все собственные числа  $\lambda_i$ , упорядоченные по убыванию и удовлетворяющие условию  $\frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^N \lambda_j} \geq \varepsilon$ , и соответствующие им собственные вектора  $q_i$  матрицы  $A$ . Пере-

менной  $gan$  присвоить количество  $\lambda_i$ .

4) Для всех  $M$  ( $M=gan, (gan-1), \dots, 1$ ):

4.1) Найти проекции отклика на собственные вектора  $\gamma_i$  по формуле:

$$\gamma_i = (\vec{u}, \vec{q}_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

4.2) При условии, что  $\lambda_M$  удовлетворяет требованию

$$\left| \frac{\frac{\sum_{i=1}^M \gamma_i^2}{\sum_{i=1}^M \lambda_i^2} - \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_i^2}{\sum_{i=1}^N \lambda_i^2}}{\frac{\sum_{i=1}^N \gamma_i^2}{\sum_{i=1}^N \lambda_i^2}} \right| \leq \lambda_M,$$

перейти к пункту 5.

4.2) Уменьшить  $M$  на 1 ( $M=M-1$ ).

5) Найти оценку шума  $s^2$ :

$$s^2 = \frac{M}{N-M} \left( \sum_{i=1}^N u_i^2 - \sum_{i=1}^M \gamma_i^2 \right)$$

6) Решая следующее нелинейное уравнение найти  $\mu$ .

$$\sum_{k=1}^M \frac{\gamma_k^2}{(1 + \mu \lambda_k)^2} = s^2$$

7) Найти коэффициенты  $\hat{p}_i$ :

$$\hat{p}_i = \frac{\mu \gamma_i}{1 + \mu \lambda_i}, \quad i = 1, \dots, M$$

8) Найти коэффициенты  $b_k$  по формуле:

$$\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^M \hat{p}_i \vec{q}_i$$



9) Входной сигнал найти, используя:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x)$$

10) Вывод  $f_1(x)$ .

11) Конец.

При обработке с помощью приведенного выше алгоритма векторов отклика большой размерности возникает необходимость работы с матрицами большой размерности, поэтому целесообразно использовать параллельные вычисления.

Распределим алгоритм `method` по потокам следующим образом: все циклы `for`, которые можно параллелить, распределяются между потоками с помощью специальных директив.

Результаты работы параллельного алгоритма `method`:

Тестовые данные:

Входное воздействие:

$$f(x) = \cos\left(\frac{20x}{|x|+0.1}\right)$$

Ядро:

$$R(y, x) = \sqrt{\frac{59.9}{\pi}} e^{-\frac{59.9(y-x)^2}{1+y^2}},$$

$$a=c=-0.85; b=d=0.85; n=100; z=0.01$$

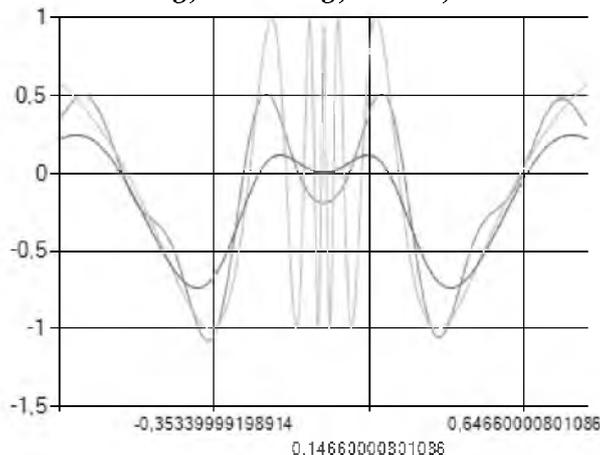


Рис. 1. Результаты восстановления входного воздействия

На рис. 1 использованы следующие обозначения:

	Входное воздействие
	Отклик
	Результат восстановления

Результаты экспериментов сведены в следующей табл. 1:

Таблица 1

Количество потоков	1	2	4
Время выполнения, с	54	34	18
Ускорение $S_p$	1	1.59	4

Где ускорение считалось по формуле:

$$S_p = \frac{T_1}{T_p}, \tag{24}$$

где  $T_p$  — время вычисления задачи на  $p$  процессорах.

В случае с изображениями (двумерный случай) задачей является решение уравнения (1) для каждой строки изображения.

Словесное описание параллельного алгоритма `method_im`:

На вход программа получает изображение, сохраненное в виде матрицы в файл `csv`.

Матрица обрабатывается построчно. Каждая строка обрабатывается по алгоритму `method`, описанному и распараллеленному выше.

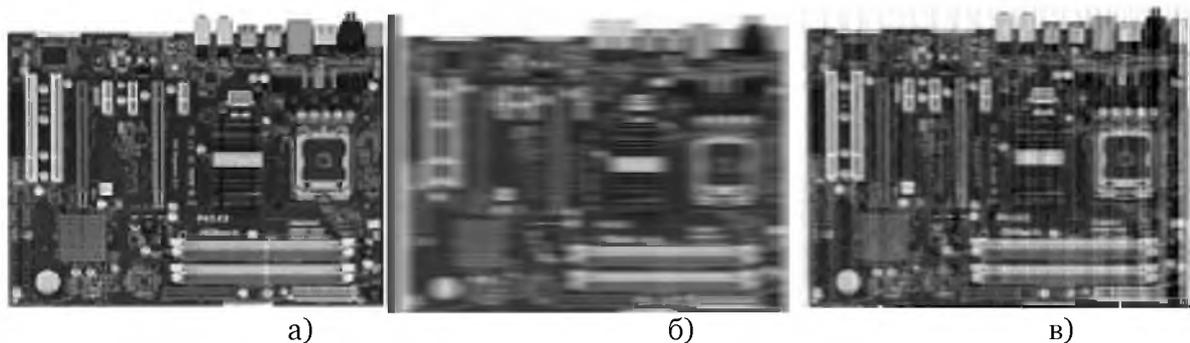
Распределим задачу по процессам следующим образом: матрица делится на блоки строк размером равным количеству процессов. В каждый момент времени обрабатывается один блок.

Результаты работы параллельного алгоритма `method_im`:

Для эксперимента бралось изображение размером 150x200 (рисунок 1а). Смазывание моделировалось с ядром:

$$k(x) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{при } x \in [-\Delta, 0] \\ 0 & \text{при } x \notin [-\Delta, 0] \end{cases}$$

где  $\Delta$  – величина смаза (в данном примере  $\Delta = 10$ ).



а) Исходное изображение; б) Смазанное изображение; в) Восстановленное изображение

Результаты экспериментов сведены в следующей табл. 2:

Таблица 2

Количество потоков	1	2	4	8	16	32
Время выполнения, с	305	162	85	43	23	11
Ускорение $S_p$	1	1.9	3.6	7.09	13.3	27.7

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, гос. контракт № 14.740.11.0390.

### Список литературы

1. Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов. М.: Советское радио, 1979.
2. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Фinitные функции в физике и технике. М., Наука, 1971.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1978.
4. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения. Киев: Наукова думка, 1986.
5. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике. М.: Мир, 1984.
6. Жилияков Е.Г. Информационные технологии и вычислительные системы, 2007, №2



- 
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.  
8. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978.

## **PARALLEL COMPUTING APPROXIMATE SOLVING FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS FIRST KIND**

**E.G. ZHILYAKOV, A.I. SKANDAKOV  
J. A. KALASHNIKOVA, O.N. IVANOV**

*Belgorod National Research  
University*

*e-mail: Zhilyakov@bsu.edu.ru*

In the article the method of presenting solutions through the kernel to solve Fredholm integral equations of the first kind, its parallelization using OpenMP technology and MPI.

Key words: parallel computing, integral equations, the empirical data.