МАТЕМАТИКА

УДК 511

ПРИЛОЖЕНИЕ ВЕСОВОГО РЕШЕТА К ОЦЕНКЕ НАИМЕНЬШЕГО ПОЧТИ ПРОСТОГО ЧИСЛА ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОТ ПРОСТОГО АРГУМЕНТА

Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова

Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: algebraist@yandex.ru

Аннотация. В работе получена оценка наименьшего почти простого числа в полиномиальной последовательности от простого аргумента.

Ключевые слова: метод, решето, веса, число, последовательность, оценка.

Введение. Рассмотрим задачу об оценке наименьшего почти простого числа в конечной последовательности A значений неприводимого полинома $\Phi(p)$:

$$A = \{\Phi(p) | p \le x\}, \tag{1}$$

где p – положительное простое число, x – достаточно большое фиксированное положительное число, $\Phi(p) = k^g p^g + l^g$, $g, k, l \in \mathbf{N}$.

Пусть P_r – целое число, имеющее в разложении r положительных простых множителей с учетом их кратности ($r \in \mathbf{N}, r \ge 2$). Такое число называется r-почти простым. Обозначим посредством P_r^* наименьшее r-почти простое число в последовательности A. Для последовательности A, определяемой (1), соответствующее ей число P_r^* является функцией от параметров k, l и g. В настоящей работе нас будет интересовать верхняя оценка числа P_r^* для последовательности (1) при достаточно больших значениях k. Первый результат такого рода был получен в 1965 году Левиным Б.В. ([1], теорема 4) для частного случая рассматриваемой задачи при $g = 2, l = 1$, а именно, было доказано, что для $\Phi(p) = k^2p^2 + 1$, $k \in \mathbf{N}$ имеет место оценка:

$$P_7^* \le k^{7,6},$$

и, если справедлива расширенная гипотеза Римана, то $P_5^* \le k^{31,4}$. В настоящей работе показывается, что при $g \in \mathbf{N}, 2 \le g \le 8$ также имеет место оценка такого же типа $P_r^* \le k^B$, где B – постоянная, не зависящая от k. Для решения этой задачи применяется метод одномерного решета Сельберга с весами. При этом мы используем веса нового типа, изученные первым автором в работе [3]. Эти веса аналогичны весам Бухштаба А.А., которые он ввел в [2], когда в 1985 г. анонсировал новый тип весового решета. Заметим, что для получения оценки наименьшего почти простого числа можно также применять и метод решета Бруна с весами Бухштаба нового типа, рассмотренный первым автором в монографии [4] (гл. 6).

Получаемая в нашей работе оценка является следствием оценки снизу числа r-почти простых чисел в последовательности A. Она получается из следующего утверждения, которое составляет основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(p) = k^g p^g + l^g$ *– неприводимый полином,* $k, l \in \mathbf{N}$, p *– положительное простое число,* $g \in \mathbf{N}, 2 \le g \le 8, \rho(p)$ *– число решений сравнения* $\Phi(n) \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$ *для* $n \in \mathbf{N}$, $\rho(p) < p$ *для всех* p, *а* k *и* l *такие, что* $\rho(p) \ne 0$, *если* $p \nmid \Phi(p)$ *и* $\rho(p) \ne 1$, *если* $p | \Phi(p)$. *Тогда наименьшее значение* $\Phi(p)$, *имеющее не более* $2g+1$ *простых множителей с учетом их кратности, не превосходит* k^B, *где*

$$B = g + \frac{12g^2}{5,5797 - 0,6g} \, .$$

В частности, наименьшее значение $\Phi(p) = k^2p^2 + 1$, *имеющее не более пяти простых множителей с учетом пх кратности, не превосходит* $k^{12,96}$.

Очевидно, что Теорема 1 дает оценки для поставленной выше задачи при всех g, удовлетворяющих неравенству $2 \le g \le 8$.

1. Вспомогательные сведения. Будем, далее, рассматривать последовательности A, удовлетворяющие следующим условиям.

1). Существует постоянная $C_1 \ge 1$ такая, что

$$1 \le \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} \le C_1$$

для любого простого числа p, где $\omega(p)$ – мультипликативная функция такая, что $\dfrac{\omega(d)}{d}X$ является приближением числа $|A_d|$, $|A_d| = |\{a_n \in A | a_n \equiv 0 (\operatorname{mod} d)\}|$, d, $n \in \mathbf{N}$ и $\mu(d) \ne 0$ ($\mu(n)$ – функция Мёбиуса), где число $X > 1$ зависит от x.

2). Существуют постоянная $C_2 \ge 1$ и параметр L такие, что

$$-L \le \sum_{u \le p < v} \frac{\omega(p)}{p} \ln p - \ln \frac{v}{u} \le C_2 \, ,$$

где $L \ge 1$ и не зависит от u и v, $2 \le u \le v$.

3). Существуют постоянные α $(0 < \alpha \le 1), C_0 \ge 1, C_3 \ge 1$ такие, что

$$\sum_{d < X^\alpha / \ln^{C_0} X} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,d)| \le C_3 \frac{X}{\ln^C X} \, ,$$

где $X \ge 2, C_3 = C_3(C), R(X,d) = |A_d| - \dfrac{\omega(d)}{d}X$, $\nu(d)$ – число простых множителей в разложении d с учетом их кратности.

Для доказательства основного результат нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть A – конечная последовательность значений неприводимого полинома от простого аргумента p, $p \leq x$, для которой выполнены условия 1) – 3) и a, b, c g' – действительные числа, причем, $\alpha a - c \leq g'$, $1 \leq b < c < \alpha a$, $g' + 1 \leq \alpha a \leq 2g' + 2$, $(r+1)c - Ma = 2c - b - 1$, $2c - b - 1 > 0$. Тогда имеет место следующая оценка:*

$$\sum_{\substack{a_n \in A, \\ \nu(a_n) \leq r}} 1 \geq \frac{ae^{-\gamma}}{2}\Big(f(\alpha a) - B(\alpha, a, b, c, g')\Big) \times$$

$$\times \prod_{p \nmid \Phi(0)} \frac{1 - \dfrac{\rho(p)}{p-1}}{1 - \dfrac{1}{p}} \prod_{p | \Phi(0)} \frac{1 - \dfrac{\rho(p)-1}{p-1}}{1 - \dfrac{1}{p}} \frac{x}{\ln^2 x} \tag{2}$$

для достаточно больших x, где функция $B(\alpha, a, b, c, g')$ определена равенством:

$$B(\alpha, a, b, c, g') = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a - 1} \frac{F(z)dz}{\alpha a - z} + \frac{1}{2c - b - 1} \times$$

$$\times \Bigg\{ (c-b) \int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}} \frac{F(z)dz}{\alpha a - z} + \int\limits_{\alpha a - c}^{g'} F(z)\frac{z - (\alpha a - c)}{\alpha a - z} dz + \int\limits_{\frac{g'^2 \alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a} \Big(\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a}v} F(z)\frac{dz}{v-z}\Big)\frac{dv}{v} +$$

$$+ \frac{g'}{2\alpha a} \int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a - 1}}^{\alpha a - 1} F(g')\frac{(b+1)z - (2\alpha a - b - 1)}{z(1+z)} dz +$$

$$+ \frac{g'}{\alpha a} \int\limits_{\frac{g'}{\alpha a - g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a - 1}} F(g')\frac{(b + 1 - \frac{\alpha a}{g'})z - (\alpha a - b - 1)}{z(1+z)} dz \Bigg\}, \tag{3}$$

γ – постоянная Эйлера ($\gamma = 0,57...$), а постоянная M определяется из выполнимости оценки выполнимости оценки $|a_n| \leq X^M$ для всех $a_n \in A$, где $f(u)$, $F(u)$ – функции решета.

Заметим, что о свойствах функций решета можно узнать из монографии [5], гл. 6 и 7.

Теорема 2 доказана в работе [4] (теорема 5) при $g' = 3$. В общем случае доказательство проводится аналогично.

2. Тождества для $B(\alpha, a, b, c, g')$. Докажем два тождества.

Лемма 1. *Пусть функция $B(\alpha,a,b,c,g')$ определена равенством (3). Тогда имеет место равенство:*

$$B(\alpha,a,b,c,g') = \frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b)\int\limits_{g'}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a - z} +$$

$$+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z} + \int\limits_{\alpha a-c}^{g'}F(z)\frac{z-(\alpha a-c)}{\alpha a-z}dz +$$

$$+\int\limits_{\frac{g'^2\alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a}\left(\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\right)\frac{dv}{v} + D_1\Bigg\}, \qquad (4)$$

где

$$D_1 = \frac{g'}{\alpha a}F(g')\Bigg\{-\alpha a\frac{g'-1}{g'}\ln(\alpha a-1) + \frac{b+1}{2}\ln\Big(\alpha a(g'-1)+1\Big) +$$

$$+\left(\alpha a\frac{g'-1}{g'} - b - 1\right)\ln g' + \left(b+1-\frac{\alpha a}{g'}\right)\ln(\alpha a - g')\Bigg\}. \qquad (5)$$

$\square$ Преобразуем первые два интеграла из равенства (3), отделив общий множитель $1/(2c-b-1)$. Тогда для суммы интегралов J_1+J_2 получим следующее равенство:

$$J_1 + J_2 = (c-b)\int\limits_{g'}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z} + \frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}\,. \qquad (6)$$

Преобразуя пятый и шестой интегралы из равенства (3), получим соответственно:

$$J_5 = \frac{g'}{2\alpha a}F(g')\left\{-(2\alpha a-b-1)\ln\frac{(\alpha a-1)^2}{\alpha a(g'-1)+1} + 2\alpha a\ln\frac{\alpha a-1}{g'}\right\}, \qquad (7)$$

$$J_6 = \frac{g'}{\alpha a}F(g')\left\{-(\alpha a-b-1)\ln\frac{(\alpha a(g'-1)+1)(\alpha a-g')}{(\alpha a-1)g'} + \alpha a\frac{g'-1}{g'}\ln\frac{(\alpha a-g')g'}{(\alpha a-1)}\right\}. \qquad (8)$$

Тогда для суммы этих интегралов находим:

$$J_5 + J_6 =$$

$$= \frac{g'}{\alpha a}F(g')\Bigg\{-\alpha a\frac{g'-1}{g'}\ln(\alpha a-1) + \frac{b+1}{2}\ln\Big(\alpha a(g'-1)+1\Big) +$$

$$+\left(\alpha a\frac{g'-1}{g'}-b-1\right)\ln g'+\left(b+1-\frac{\alpha a}{g'}\right)\ln(\alpha a-g')\Big\}. \tag{9}$$

Таким образом, для суммы интегралов из равенства (3), на основе (6) и (9), получается выражение:

$$B(\alpha,a,b,c,g')=$$

$$=\frac{1}{2c-b-1}\Big\{(c-b)\int\limits_{g'}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+$$

$$+\int\limits_{\alpha a-c}^{g'}F(z)\frac{z-(\alpha a-c)}{\alpha a-z}dz+\int\limits_{\frac{g'^2\alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a}\left(\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\right)\frac{dv}{v}+$$

$$+\frac{g'}{\alpha a}F(g')\Big\{-\alpha a\frac{g'-1}{g'}\ln(\alpha a-1)+\frac{b+1}{2}\ln\Big(\alpha a(g'-1)+1\Big)+$$

$$+\left(\alpha a\frac{g'-1}{g'}-b-1\right)\ln g'+\left(b+1-\frac{\alpha a}{g'}\right)\ln(\alpha a-g')\Big\}\Big\}. \tag{10}$$

Учитывая определение (5) величины D_1 из (10) следует (4). ■

Лемма 2. *Пусть функция $B(\alpha,a,b,c,g')$ определена равенством (3) и $g'=3$. Тогда имеет место равенство:*

$$B(\alpha,a,b,c,3)=\frac{1}{2c-b-1}\Big\{(c-b)\int\limits_{3}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+$$

$$+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{2\alpha a+1}{3}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+\int\limits_{\frac{9\alpha a}{2\alpha a+1}}^{\alpha a}\left(\int\limits_{3}^{\frac{2\alpha a+1}{3\alpha a}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\right)\frac{dv}{v}+D_2\Big\}, \tag{11}$$

где

$$D_2=\frac{2e^{\gamma}}{\alpha a}\Big\{c\ln c+(\alpha a-c)\ln(\alpha a-c)-\frac{2\alpha a}{3}\ln(\alpha a-1)+$$

$$+\frac{b+1}{2}\ln(2\alpha a+1)+\left(b+1-c-\frac{\alpha a}{3}\right)\ln(\alpha a-3)+\left(c-b-1-\frac{\alpha a}{3}\right)\ln 3\Big\}. \tag{12}$$

□ Для $B(\alpha,a,b,c,g')$ выполнено равенство (4) леммы 1. Поэтому при значении параметра $g'=3$ получим:

$$B(\alpha,a,b,c,3)=$$

$$=\frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b)\int\limits_{3}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{2\alpha a+1}{3}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+$$

$$+\int\limits_{\alpha a-c}^{3}F(z)\frac{z-(\alpha a-c)}{\alpha a-z}dz+\int\limits_{\frac{9\alpha a}{2\alpha a+1}}^{\alpha a}\Bigg(\int\limits_{3}^{\frac{2\alpha a+1}{3\alpha a}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\Bigg)\frac{dv}{v}+$$

$$+\frac{3}{\alpha a}F(3)\Bigg\{-\frac{2}{3}\alpha a\ln(\alpha a-1)+\frac{b+1}{2}\ln(2\alpha a+1)+$$

$$+\left(\frac{2}{3}\alpha a-b-1\right)\ln 3+\left(b+1-\frac{\alpha a}{3}\right)\ln(\alpha a-3)\Bigg\}\Bigg\}.$$

Так как $F(u)=2e^{\gamma}/u$ при $u\le 3$, то $F(3)=2e^{\gamma}/3$, и поэтому третий интеграл в этой формуле можно преобразовать следующим образом:

$$J_3=\int\limits_{\alpha a-c}^{3}F(z)\frac{z-(\alpha a-c)}{\alpha a-z}dz=2e^{\gamma}\left\{\left(\frac{c}{\alpha a}-1\right)\ln\frac{3}{\alpha a-c}-\frac{c}{\alpha a}\ln\frac{\alpha a-3}{c}\right\}. \qquad (13)$$

Следовательно, учитывая это равенство, получим

$$B(\alpha,a,b,c,3)=\frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b)\int\limits_{3}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+$$

$$+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{2\alpha a+1}{3}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+\int\limits_{\frac{9\alpha a}{2\alpha a+1}}^{\alpha a}\Bigg(\int\limits_{3}^{\frac{2\alpha a+1}{3\alpha a}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\Bigg)\frac{dv}{v}+D_2\Bigg\}, \qquad (14)$$

где

$$D_2=\frac{3}{\alpha a}\frac{2e^{\gamma}}{3}\Bigg\{-\frac{2}{3}\alpha a\ln(\alpha a-1)+\frac{b+1}{2}\ln(2\alpha a+1)+$$

$$+\left(\frac{2}{3}\alpha a-b-1\right)\ln 3+\left(b+1-\frac{\alpha a}{3}\right)\ln(\alpha a-3)\Bigg\}+$$

$$+2e^{\gamma}\left\{\left(\frac{c}{\alpha a}-1\right)\ln\frac{3}{\alpha a-c}-\frac{c}{\alpha a}\ln\frac{\alpha a-3}{c}\right\}.$$

Это выражение для D_2, очевидным образом, преобразуется к виду (12). ■

Следствие. *Для функции $B(\alpha, a, b, c, g')$ при $g' = 3$, $\alpha a = 6$. на основании Леммы 2, после элементарных преобразований, получается формула:*

$$B(\alpha, a, b, c, 3) = \frac{1}{2c-b-1}\left\{(c-b)\int\limits_{3}^{5}\frac{F(z)dz}{6-z}+\right.$$

$$\left.+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{13}{3}}^{5}\frac{F(z)dz}{6-z}+\int\limits_{\frac{54}{13}}^{6}\left(\int\limits_{3}^{\frac{13}{18}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\right)\frac{dv}{v}+D_2'\right\}, \qquad (15)$$

$$D_2' = \frac{e^{\gamma}}{3}\left\{c\ln c + (6-c)\ln(6-c) - 4\ln 5 + \frac{b+1}{2}\ln 13 - 4\ln 3\right\}. \qquad (16)$$

3. Доказательство теоремы 2. Оно основано на результатах работы первого автора [3]. Для последовательности A, определенной равенством (1), выполнены все условия, накладываемые на последовательность в случае одномерного решета. Согласно теореме 2 для числа элементов a_n из последовательности A , имеющих в своем разложении не более r простых множителей с учетом их кратности, имеем следующую оценку:

$$\sum_{a_n\in A,\,\nu(a_n)\le r} 1 \ge \frac{ae^{-\gamma}}{2}(f(\alpha a) - B(\alpha, a, b, c, g'))\times$$

$$\times\prod_{p\nmid\Phi(0)}\frac{1-\frac{\rho(p)}{p-1}}{1-\frac{1}{p}}\prod_{p|\Phi(0)}\frac{1-\frac{\rho(p)-1}{p-1}}{1-\frac{1}{p}}\frac{x}{\ln^2 x}$$

для достаточно больших x.

Заметим, что если в теореме 1 величина $f(\alpha a) - B(\alpha, a, b, c, g') > 0$, то существуют числа P_r в последовательности A. Кроме того, в методе решета наименьший положительный простой делитель числа P_r будет больше x1/a и выполнено условие $Ma = b + (r-1)c + 1$ или, в эквивалентной форме $(r+1)c - Ma = 2c - b - 1$.

Осуществим теперь выбор параметров одномерного решета Сельберга с весами Бухштаба нового типа. Выберем a из условия $\alpha a = 6, \alpha = 1/2, r = 2g+1$. Введем функцию $H(b,c) = 3e^{-\gamma}(f(6) - B(\alpha, a, b, c, 3))$. Для оценки этой функции воспользуемся равенством (15) и числовыми оценками входящих в эту формулу определенных интегралов, связанных с функциями решета $J_1 \le 1,1343644$, $J_2 \le 0,5132943$, $J_3 \le 0,1373497$ и приближениями для числовых коэффициентов в выражении для D_2'. Тогда для D_2' получим формулу с избытком

$$D_2' = \frac{e^{\gamma}}{3}\left\{c\ln c + (6-c)\ln(6-c) + 1,282475\,b - 9,549725\right\}$$

и, в соответствии с ней и указанными числовыми оценками интегралов, – следующее неравенство:

$$B(\alpha, a, b, c, 3) \leq \frac{1}{2c-b-1}\frac{e^{\gamma}}{3}\Big\{c\ln c + (6-c)\ln(6-c) +$$

$$+ 1,9107007\, c - 0,1959345\, b - 9,7508227\Big\},$$

верное при $b > c$ и $c > 1$. Следовательно, при тех же условиях, для $H(b, c)$ имеет место неравенство

$$H(b, c) \geq \frac{1}{2c-b-1}\{1,4576291c - 1,4882304b + 8,0666578-$$

$$-c\ln c - (6-c)\ln(6-c)\},$$

где мы воспользовались $f(6) \geq 0,99987229$ и $3e^{-\gamma} = 1,68438$ с избытком.

Выберем параметры b и c так, чтобы функция $H(b, c)$ была возможно меньше, оставаясь положительной. При $c = 5,7$ имеем

$$H(b; 5,7) \geq \frac{1}{10,4-b}\{6,815678315 - 1,4882305b\} > 0.$$

Тогда при $b = 4,5797$ выполняется неравенство: $H(b, c) \geq 0,000005452 > 0$.

Потребуем теперь выполнимости связи $(r+1)c - Ma = 2c - b - 1$, $P_r^* \leq k^B$, $P_r^* \leq x^M$, $P_r^* = k^g p^g + l^g$, $r = 2g + 1$. Откуда следует $B = g + ag^2/(1 + b - (a - 2c)g)$. Таким образом, для P_r^* будем иметь оценку: $P_{2g+1}^* \leq k^B$, где $B = g + 12g^2/(5,5797 - 0,6g)$, если $2 \leq g \leq 8$. ■

В частности, для $\Phi(p) = k^2p^2 + 1$ имеем $B \leq 12,9597 \leq 12,96$, и поэтому $P_5^* \leq k^{12,96}$ (ср. с результатом Б.В. Левина).

Литература

1. Левин Б.В. О наименьшем почти простом числе арифметической прогрессии и последовательности $k^2x^2 + 1$ // УМН. – 20;4(124). – С.158-162.
2. Бухштаб А.А. Новый тип весового решета // Всесоюз. конф. «Теория чисел и ее приложения». Тез. докл / Тбилиси, 1985. – С.22-24.
3. Вахитова Е.В. Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа // Математические заметки. – 1999. – 66;1. – С.38-49.
4. Вахитова Е.В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения. / М.: Изд-во МПГУ Прометей, 2002. – 268 с.
(РЖ Матем. – 2003. – 03.11 – 13А.115К).
5. Halberstam H., Richert H.E. Sieve methods / London: Acad. Press., 1974. – 364 p.

APPLICATION OF SIEVE WEIGHTS TO ESTIMATION OF MOST SMALLER ALMOST-PRIME NUMBER IN POLYNOMIAL SEQUENCE OF PRIME ARGUMENT

E.V. Vakhitova, S.R. Vakhitova

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: algebraist@yandex.ru

Abstract. The estimate of most smaller, almost-prime number in polynomial sequence on prime argument is obtained.

Key words: method, sieve, weights, number, sequence, estimation.