УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ В ПОРОУПРУГИХ СРЕДАХ [11)]

А.М. Мейрманов, Р.Н. Зимин, О.В. Гальцева, О.А. Гальцев

Белгородский государственный университет,
ул.Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: reshat85@mail.ru

Аннотация. Настоящая работа посвящена получению новых корректных математических моделей, моделирующих процесс диффузии в пороупругой среде посредством усреднения и метода двухмасштабной сходимости Нгуетсенга.

Ключевые слова: усреднение, метод двухмасштабной сходимости.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \in R^3$ ограниченная связная область с липшицевой границей S, полученная периодическим повторением элементарной ячейки $\varepsilon\overline{Y}$, где $\varepsilon > 0$ малый параметр,

$$\overline{Y} = Y_f \cup Y_s \cup \gamma \cup \partial Y\,, \quad Y = (0,1) \times (0,1) \times (0,1), \quad \varepsilon Y = (0,\varepsilon) \times (0,\varepsilon) \times (0,\varepsilon),$$

и $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ – липшицева граница между множествами Y_f и Y_s. Область Y_f будем считать симметричной относительно поворотов на $\pi/2$ (рис 1.).

Через $\overline{\Omega}{}_f^{\varepsilon}$ обозначим периодическое повторение элементарной ячейки $\varepsilon\overline{Y}_f$, а через $\overline{\Omega}{}_s^{\varepsilon}$ – периодическое повторение $\varepsilon\overline{Y}_s$. Тогда

$$\Omega = \Omega_f^{\varepsilon} \cup \Omega_s^{\varepsilon} \cup \Gamma^{\varepsilon},$$

где $\Gamma^{\varepsilon} = \partial\Omega_f^{\varepsilon} \cap \partial\Omega_s^{\varepsilon}$ периодическое повторение границы $\varepsilon\gamma$.

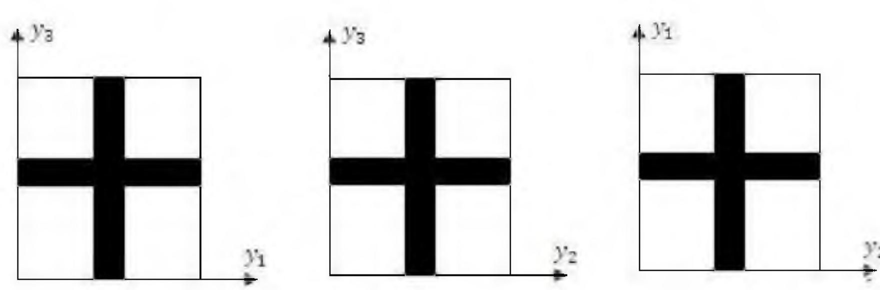

Рис. 1. Геометрия элементарной ячейки.

[11] Работа выполнена при поддержке Министерства образования Российской Федерации, соглашение №14.А18.21.0357

Мы рассмотрим две модели диффузии в пороупругой среде, состоящие из системы уравнений Стокса, которые описывают движение несжимаемой вязкой жидкости в поровом пространстве и системы уравнений Ламе, описывающих колебания несжимаемого твердого скелета. Рассматриваемая система дополняется конвективным уравнением диффузии для примеси в жидкости. Задача замыкается начальными и краевыми условиями. При этом считается, что плотность жидкости зависит от концентрации примеси.

Модель $\mathbb{PE}_1$.

$$\nabla\cdot\Big(\chi^{\varepsilon}\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)+(1-\chi^{\varepsilon})\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})-p^{\varepsilon}\mathbb{I}\Big)+\rho(c^{\varepsilon})\boldsymbol{F}=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\quad t>0\,;\tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}^{\varepsilon}=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\quad t>0\,;\tag{2}$$

$$\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\cdot\nabla c^{\varepsilon}=D_0\triangle c^{\varepsilon},\ \boldsymbol{x}\in\Omega^{\varepsilon}_f\,,\quad t>0\,.\tag{3}$$

Система уравнений дополняется следующими условиями:

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)=0\quad \text{при}\quad \boldsymbol{x}\in S=\partial\Omega,\tag{4}$$

$$\chi^{\varepsilon}\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=0\quad \text{при}\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\tag{5}$$

$$\int_{\Omega}p^{\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}=0\,,\tag{6}$$

$$\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{n}}=0\quad \text{при}\quad \boldsymbol{x}\in\Gamma^{\varepsilon}\cup S\,,\quad t>0\,,\tag{7}$$

$$c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=c_0(\boldsymbol{x}),\ \text{при}\ \boldsymbol{x}\in\Omega^{\varepsilon}_f\,,\tag{8}$$

где $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)=(w^{\varepsilon}_1(\boldsymbol{x},t),w^{\varepsilon}_2(\boldsymbol{x},t),w^{\varepsilon}_3(\boldsymbol{x},t))$ – перемещение сплошной среды, $p^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ - давление в сплошной среде, $c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ – концентрация примеси, $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v})$ – симметрическая часть градиента вектора $\boldsymbol{v}$ (тензор напряжений), $\mathbb{I}$ – единичная матрица, $\chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ – характеристическая функция порового пространства,

$$\rho(c^{\varepsilon})=\chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})\delta c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\,,$$

μ_0 – безразмерная вязкость жидкости, λ_0 – безразмерная постоянная Ламэ, δ – положительная постоянная, $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор внешней нормали к Γ^{ε}, D_0 – коэффициент диффузии.

Уравнение (3) понимается в смысле следующего интегрального равенства

$$\int_0^T\int_{\Omega^{\varepsilon}_f}\Big(c^{\varepsilon}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}-(\nabla c^{\varepsilon})\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\psi-D_0\nabla c^{\varepsilon}\cdot\nabla\psi\Big)\,dxdt=-\int_{\Omega^{\varepsilon}_f}c_0(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x},0)dx$$

для произвольной гладкой функции $\psi(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю при $t=T$.

Модель $\mathbb{PE}_2$.

$$\nabla\cdot\Big(\chi^{\varepsilon}\mu_0\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)+(1-\chi^{\varepsilon})\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})-p^{\varepsilon}\mathbb{I}\Big)+\rho(\varphi(c^{\varepsilon}))\boldsymbol{F}=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\ \ t>0\,;\tag{9}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}^{\varepsilon}=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\ \ t>0\,;\tag{10}$$

$$\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial t}=\nabla\cdot\left(D_0\nabla\, c^{\varepsilon}-\,\varphi(c^{\varepsilon})\,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\quad \boldsymbol{x}\in\Omega_f^{\varepsilon}\,,\ t>0\,,\tag{11}$$

где функция $\varphi(c^{\varepsilon})\in\mathbb{C}^2(-\infty,\infty)$ такая, что

$$\varphi(c^{\varepsilon})=\begin{cases}-1/2 & ,\ c^{\varepsilon}<-1/2\,;\\ c^{\varepsilon} & ,\ 0\le c^{\varepsilon}\le 1\,;\\ 3/2 & ,\ c^{\varepsilon}>3/2\,.\end{cases}$$

Задача замыкается следующими условиями:

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)=0\quad\text{при}\ \ \boldsymbol{x}\in S=\partial\Omega\,,\ \ t>0\,;\tag{12}$$

$$\int_{\Omega}p^{\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}=0\,,\ \ t>0\,;\tag{13}$$

$$D_0\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{n}}-\varphi(c^{\varepsilon})\,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}=0\ \ \text{при}\ \ \boldsymbol{x}\in\Gamma^{\varepsilon},\ \ t>0\,,\tag{14}$$

$$\chi^{\varepsilon}\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=0\quad\text{при}\ \ \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\tag{15}$$

$$c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=c_0(\boldsymbol{x})\ \text{при}\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f^{\varepsilon}\,.\tag{16}$$

Уравнение (11) понимается в смысле теории распределения, то есть в смысле следующего интегрального равенства

$$\int_0^T\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}\left(c^{\varepsilon}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}+\varphi(c^{\varepsilon})\,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\cdot\nabla\,\psi-D_0\nabla c^{\varepsilon}\cdot\nabla\psi\right)dxdt=\,-\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}c_0(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x},0)dx\,,$$

для произвольной гладкой функции $\psi(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю при $t=T$.

2. Основной результат

Определение 1. *Тройка $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t),\,p^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t),\,c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\}$ называется обобщенным решением модели $\mathbb{PE}_1$ в области $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$, если*

1) $p^{\varepsilon}\in L^2(\Omega_T)$, $\ \boldsymbol{w}^{\varepsilon}\in W_2^{1,1}(\Omega_f^{\varepsilon}\times(0,T))\bigcap W_2^{1,0}(\Omega_s^{\varepsilon}\times(0,T))$, $c^{\varepsilon}\in L_\infty(\Omega_f^{\varepsilon}\times(0,T))\ \bigcap\ W_2^{1,0}(\Omega_f^{\varepsilon}\times(0,T))$;

2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение (2) и условие (6);

3) функции $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}$, p^{ε} и c^{ε} удовлетворяют интегральным равенствам

$$\int_{\Omega_T}\Big(\chi^{\varepsilon}\mu_0\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\phi})+(1-\chi^{\varepsilon})\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon}):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\phi})-p^{\varepsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}\Big)\,dxdt$$
$$=\int_{\Omega_T}\rho(c^{\varepsilon})\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\phi}\,dxdt\tag{1}$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю на границе S и при $t=T$, а также

$$\int_0^T\int_{\Omega_f^\varepsilon}\left(c^\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}-\nabla c^\varepsilon\cdot\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\psi-D_0\nabla c^\varepsilon\cdot\nabla\psi\right)dxdt=-\int_{\Omega_f^\varepsilon}c_0(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x},0)dx \qquad (2)$$

для произвольной гладкой функции $\psi(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю при $t=T$.

Здесь используется обозначение: $A:B\equiv\mathrm{tr}(AB^T)$, где A и B – квадратные матрицы.

Определение 2. *Тройка $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t),\,p^\varepsilon(\boldsymbol{x},t),\,c^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\}$ называется обобщенным решением модели $\mathbb{PE}_2$ в области $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$, если*

*1) $p^\varepsilon\in L^2(\Omega_T)$, $\quad\boldsymbol{w}^\varepsilon\in W_2^{1,1}(\Omega_f^\varepsilon\times(0,T))\bigcap W_2^{1,0}(\Omega_s^\varepsilon\times(0,T))$,
$c^\varepsilon\in L_\infty(\Omega_f^\varepsilon\times(0,T))\,\bigcap\,W_2^{1,0}(\Omega_f^\varepsilon\times(0,T))$;*

2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение (10) и условие (13);

3) функции $\boldsymbol{w}^\varepsilon$, p^ε и c^ε удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\int_{\Omega_T}\left(\chi^\varepsilon\mu_0\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\phi})+(1-\chi^\varepsilon)\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\phi})-p^\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}\right)dxdt$$
$$=\int_{\Omega_T}\rho(\varphi(c^\varepsilon))\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\phi}\,dxdt \qquad (3)$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю на границе S и при $t=T$ и

$$\int_0^T\int_{\Omega_f^\varepsilon}\left(c^\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}+\varphi(c^\varepsilon)\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\cdot\nabla\psi-D_0\nabla c^\varepsilon\cdot\nabla\psi\right)dxdt=-\int_{\Omega_f^\varepsilon}c_0(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x},0)dx \qquad (4)$$

для произвольной гладкой функции $\psi(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю при $t=T$.

Разрешимость модели $\mathbb{PE}_1$.

Теорема 1. *Пусть*

$$0\leqslant c_0(\boldsymbol{x})\leqslant 1\,,$$

$$\int_{\Omega_T}\left(|\boldsymbol{F}|^2+\left|\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}\right|^2\right)dxdt\leqslant F^2\,,\qquad|\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)|\leqslant F\,.$$

Тогда модель $\mathbb{PE}_1$ имеет хотя бы одно обобщенное решение и для него справедливы оценки:

$$\max_{0<t<T}\lambda_0\int_\Omega(1-\chi^\varepsilon)\,|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon)|^2\,dx+$$
$$\int_{\Omega_T}\left(\mu_0\chi^\varepsilon\left|\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right)\right|^2+|p^\varepsilon|^2\right)dxdt\leqslant MF^2\,, \qquad (5)$$

$$0 \leqslant c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t) \leqslant 1\,, \tag{6}$$

$$\int_0^T \int_{\Omega_f^{\varepsilon}} |\nabla c^{\varepsilon}|^2 dx dt \leqslant MF^2\,, \tag{7}$$

$$\max_{0<t<T} \int_{\Omega} \chi^{\varepsilon} \left|\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\right|^2 dx + \int_{\Omega_T} (1-\chi^{\varepsilon}) \left|\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\right|^2 dx dt \leqslant MF^2\,, \tag{8}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla \boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_1) - \nabla \boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_2)|^2 dx \leqslant C|t_1-t_2|^{1/2}\,, \tag{9}$$

где функция $\boldsymbol{v}^{\varepsilon} = \mathbb{E}_{\Omega_f^{\varepsilon}}(\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}/\partial t)$ описана ниже.

Доказательство разрешимости приведено в ([7]).

Разрешимость модели $\mathbb{PE}_2$.

Теорема 1. *Пусть*

$$0 \leqslant c_0(\boldsymbol{x}) \leqslant 1\,,$$

$$\int_{\Omega_T} |\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}|^2 dx dt \leqslant F^2\,, \quad \max_{\Omega_T} |\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)| \leqslant F\,.$$

Тогда модель $\mathbb{PE}_2$ имеет хотя бы одно обобщенное решение и для него справедливы оценки:

$$\max_{0<t<T} \lambda_0 \int_{\Omega} (1-\chi^{\varepsilon}) |\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})|^2 dx + \int_{\Omega_T} \left(\mu_0 \chi^{\varepsilon} \left|\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\right|^2 + |p^{\varepsilon}|^2\right) dx dt \leqslant MF^2\,, \tag{10}$$

$$\max_{0<t<T} \int_{\Omega_f^{\varepsilon}} |c^{\varepsilon}|^2 dx + D_0 \int_0^T \int_{\Omega_f^{\varepsilon}} |\nabla c^{\varepsilon}|^2 dx dt \leqslant MF^2. \tag{11}$$

Легко заметить, что вектор-функция $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}$ имеет различную гладкость в областях Ω_f^{ε} и Ω_s^{ε}. Поэтому мы воспользуемся известными теоремами о продолжении (см. [1]- [3]):

Существует линейный оператор

$$\mathbb{E}_{\Omega_f^{\varepsilon}} : W_2^1(\Omega_f^{\varepsilon}) \to W_2^1(\Omega), \quad \boldsymbol{v}^{\varepsilon} = \mathbb{E}_{\Omega_f^{\varepsilon}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right),$$

такой, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f^{\varepsilon}\,, \quad t \in (0,T)\,, \tag{12}$$

$$\int_{\Omega} |\boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)|^2\, dx \leqslant C_0 \int_{\Omega_f^{\varepsilon}} \left|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\right|^2 dx\,,$$

$$\int_{\Omega} |\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t))|^2 dx \leqslant C_0 \int_{\Omega_f^{\varepsilon}} \left|\mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t))\right|^2 dx\,, \quad t \in (0,T)\,, \tag{13}$$

где C_0 не зависит от ε и $t \in (0,T)$.

Для усреднения необходимо рассматривать функции в фиксированной области, но концентрация примеси c^ε определена только в области Ω_f^ε, которая зависит от малого параметра ε. Поэтому концентрацию примесей c^ε также продолжаем из Ω_f^ε в Ω (см. [1]):

$$\tilde{c}^{\,\varepsilon} = \tilde{\mathbb{E}}_{\Omega_f^\varepsilon}(c^{\,\varepsilon}), \tag{14}$$

такой, что

$$c^{\,\varepsilon} = \tilde{c}^{\,\varepsilon}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, \quad t \in (0,T)\,, \tag{15}$$

и

$$\int_\Omega |\tilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)|^2 dx \leqslant C_0 \int_{\Omega_f^\varepsilon} |c^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)|^2 dx,$$
$$\int_\Omega |\nabla\,\tilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)|^2 dx \leqslant C_0 \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\nabla\, c^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)|^2 dx\,, \quad t \in (0,T)\,, \tag{16}$$

где C_0 не зависит ε и $t \in (0,T)$.

Под усреднением мы будем понимать предельный переход в интегральных тождествах (1), (2), (3) и (4) при $\varepsilon \to 0$. Для этого воспользуемся понятием двухмасштабной сходимости ([5]). Напомним, что последовательность $\{u^{\varepsilon_k}\}$ ограниченная в $L_2(\Omega)$ сходится двухмасштабно к 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$:

$$\int_\Omega u^{\,\varepsilon_k}(\boldsymbol{x})\varphi\left(\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon_k}\right) dx \to \iint\limits_{\Omega\,Y} U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dydx$$

для любой 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. В частности, это верно для $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi_0(\boldsymbol{y})\cdot h(\boldsymbol{x})$, где $\varphi_0 \in L_2(Y)$ и $h \in L_\infty(\Omega)$.

Усреднение модели $\mathbb{PE}_1$. Верна следующая

Теорема 3. *Пусть тройка $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon, p^\varepsilon, c^\varepsilon\}$ является обобщенным решением модели $\mathbb{PE}_1$. Тогда*

1) последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\nabla\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$, $\{\nabla\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$, $\widetilde{c^\varepsilon}$ и $\nabla\widetilde{c^\varepsilon}$ сходятся слабо в $L_2(\Omega_T)$ к функциям $\boldsymbol{w}$, $\nabla\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial\boldsymbol{w}/\partial t)$, $\nabla\boldsymbol{v} = \nabla(\mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial\boldsymbol{w}/\partial t))$, p, c и ∇c соответственно;

2) Предельные функции являются решением усредненной системы уравнений в области Ω_T, состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla\cdot\,\boldsymbol{w} = 0\,, \tag{17}$$

усредненных уравнений баланса

$$\nabla\cdot\,\widehat{\mathbb{P}} + m\delta c\boldsymbol{F} = 0\,, \tag{18}$$

где

$$\widehat{\mathbb{P}} = -p\,\mathbb{I} + \mathfrak{N}_1 : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}) + \mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau))d\tau\,,$$

и усредненного конвективного уравнения диффузии

$$m\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbb{B}\boldsymbol{v} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (D_0 \mathbb{B} \nabla c)\,, \tag{19}$$

дополненных граничными

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in S, \quad t \in (0, T)\,,$$

$$\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{n}} = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in S\,, \quad t \in (0, T)\,,$$

и начальными условиями

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,,$$

$$c(\boldsymbol{x}, 0) = m\,c_0(\boldsymbol{x})\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,;$$

3) тензор 4-го ранга $\mathfrak{N}_1$ – симметричный и положительно определенный. Матрица $\mathbb{B}$ – симметричная и положительно определенная.

Усреднение модели $\mathbb{PE}_2$.

Теорема 4. *Пусть тройка $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon, p^\varepsilon, c^\varepsilon\}$ является обобщенным решением модели $\mathbb{PE}_2$. Тогда*

1) последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\nabla \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$, $\{\nabla \boldsymbol{v}^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$, $\widetilde{c}^\varepsilon$ и $\nabla\widetilde{c}^\varepsilon$ сходятся слабо в $L_2(\Omega_T)$ к функциям $\boldsymbol{w}$, $\nabla \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial \boldsymbol{w}/\partial t)$, $\nabla \boldsymbol{v} = \nabla(\mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial \boldsymbol{w}/\partial t))$, p, c и ∇c соответственно;

2) Предельные функции являются решением усредненной системы уравнений в области Ω_T, состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0\,, \tag{20}$$

усредненных уравнений баланса

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbb{P}} + m\delta\varphi(c)\boldsymbol{F} = 0\,, \tag{21}$$

где

$$\widehat{\mathbb{P}} = -p\,\mathbb{I} + \mathfrak{N}_1 : \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + \mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau))d\tau\,,$$

и усредненного конвективного уравнения диффузии

$$m\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D_0 \mathbb{B} \nabla c) - \nabla \cdot (\varphi(c)\mathbb{B}\boldsymbol{v}) \tag{22}$$

дополненных граничными

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in S\,, \quad t \in (0,T)\,,$$

$$\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{n}} = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in S\,, \quad t \in (0,T)\,, \tag{23}$$

и начальными условиями

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,,$$

$$c(\boldsymbol{x},0) = m\,c_0(\boldsymbol{x})\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,; \tag{24}$$

3) тензор 4-го ранга $\mathfrak{N}_1$ *– симметричный и положительно определенный. Матрица* $\mathbb{B}$ *– симметричная и положительно определенная.*

Так же верна следующая

Лемма 1. *Матрица* $\mathbb{B}$ *путем ортогонального преобразования координат приводима к виду* $\mathbb{B} = \lambda\mathbb{I}$.

Тогда, с учетом данной леммы усредненное конвективное уравнение диффузии (37) примет вид

$$m\frac{\partial c}{\partial t} + \lambda\nabla\left(\varphi(c)\right)\cdot\boldsymbol{v} = \lambda\nabla\cdot\left(D_0\nabla c\right), \tag{25}$$

дополненное граничными и начальными условиями (23) и (24).

Для указанной задачи, согласно ([4]), справедлив принцип максимума.

Учитывая все вышесказанное система (37)-(33) примет вид

$$\nabla\cdot\widehat{\mathbb{P}} + m\delta c\boldsymbol{F} = 0\,, \tag{26}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w} = 0\,, \tag{27}$$

$$m\frac{\partial c}{\partial t} + \lambda\nabla c\cdot\boldsymbol{v} = \lambda\nabla\cdot\left(D_0\nabla c\right). \tag{28}$$

3. Доказательство Теоремы 3

Сначала перепишем интегральные уравнения (1) и (2) для продолженных функций

$$\int_0^T\int_\Omega \chi^\varepsilon\Big(-\tilde{c}^{\,\varepsilon}\,\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\,\varepsilon}}{\partial t}\cdot\nabla\,\tilde{c}^{\,\varepsilon} + D_0\,\nabla\,\tilde{c}^{\,\varepsilon}\cdot\nabla\,\psi\Big)dxdt =$$
$$\int_\Omega \chi^\varepsilon\,c_0(\boldsymbol{x})\,\psi(\boldsymbol{x},0)\,dx\,, \tag{1}$$

$$\int_0^T\int_\Omega \Big(\chi^\varepsilon\mu_0\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}^{\,\varepsilon}) + (1-\chi^\varepsilon)\lambda_0\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\,\varepsilon}) - p^{\,\varepsilon}\mathbb{I}\Big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\phi})dxdt =$$
$$\int_0^T\int_\Omega \chi^\varepsilon\delta\,\tilde{c}^{\,\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\phi}\,dxdt\,, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{v}^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}\big(\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t\big)$ и $\tilde{c}^\varepsilon = \tilde{\mathbb{E}}_{\Omega_f^\varepsilon}(c^\varepsilon)$.

Также запишем уравнение неразрывности (2) в виде интегрального уравнения

$$\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{w}^\varepsilon \cdot \nabla \xi \, dxdt = 0 \,, \tag{3}$$

для произвольной гладкой функции ξ.

Согласно оценкам (5)-(9), имеем

$$c,\, p,\, \nabla c, \quad \boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}, \quad \nabla \boldsymbol{v} \in L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)\,,$$

$$C,\, P,\, \nabla_y C,\, \boldsymbol{V}, \quad \nabla_y \boldsymbol{V} \in L_2\big((0,T); L_2(\Omega \times Y)\big)\,.$$

Поэтому, с точностью до подпоследовательностей,

$$\tilde{c}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \rightharpoonup c(\boldsymbol{x},t) \text{ слабо в } L_2\big((0,T); W_2^1(\Omega)\big)\,,$$

$$\tilde{c}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \to c(\boldsymbol{x},t) \text{ двухмасштабно в } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)\,,$$

$$\nabla \tilde{c}^\varepsilon \to \nabla c + \nabla_y C \text{ двухмасштабно в } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big),$$

$$p^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \rightharpoonup p(\boldsymbol{x},t) \text{ слабо в } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)\,,$$

$$p^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \to P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) \text{ двухмасштабно в } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big),$$

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \rightharpoonup \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) \text{ слабо в } L_2\big((0,T); \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big),$$

$$\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon\big) \to \mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}\big) + \mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{W}\big) \text{ двухмасштабно в } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big),$$

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \rightharpoonup \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \text{ слабо в } L_2\big((0,T); \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big),$$

$$\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{v}^\varepsilon\big) \to \mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{v}\big) + \mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{V}\big) \text{ двухмасштабно в } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big),$$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t),$$

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \to \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \text{ сильно в } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Лемма 2. *Предельные функции удовлетворяют в области Ω при $t > 0$ системе макроскопических уравнений*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0\,, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbb{P}} + m\delta c\, \boldsymbol{F} = 0\,, \tag{5}$$

$$\widehat{\mathbb{P}} = \mu_0\Big(m\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}) + \Big\langle \mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)\Big\rangle_{Y_f}\Big) + \lambda_0\big((1-m)\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) + \langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})\rangle_{Y_s}\big) - p\,\mathbb{I}\,,$$

$$m\,\frac{\partial c}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\big(m\nabla c + \langle \nabla_y C\rangle_{Y_f}\big) = D_0 \nabla\cdot\big(m\nabla c + \langle \nabla_y C\rangle_{Y_f}\big). \tag{6}$$

Для доказательства леммы перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в интегральном тождестве (1) с пробной функцией $\psi = \psi(\boldsymbol{x}, t)$, в (2) с пробной функцией $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}, t)$, и в (3) с пробной функцией $\xi = \xi(\boldsymbol{x}, t)$.

Лемма 3. *Предельные функции удовлетворяют, в области Y для всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и $t > 0$, системе микроскопических уравнений*

$$\nabla_y \cdot \boldsymbol{W} = 0\,, \tag{7}$$

$$\nabla_y \cdot \tilde{\mathbb{P}} = 0\,, \tag{8}$$

$$\tilde{\mathbb{P}} = \mu_0 \chi(\boldsymbol{y})\Big(\mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}) + \mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\right)\Big) + \lambda_0\big(1 - \chi(\boldsymbol{y})\big)\big(\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W})\big) - P\,\mathbb{I}\,,$$

$$\nabla_y \cdot \Big(\chi(\boldsymbol{y})\big(\nabla c + \nabla_y C\big)\Big) = 0\,. \tag{9}$$

Для доказательства леммы перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в интегральном равенстве (1) с пробной функцией $\psi = \varepsilon\psi_0(\boldsymbol{x}, t)\psi_1(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, в (2) – с пробной функцией $\boldsymbol{\phi} = \varepsilon\boldsymbol{\phi}_0(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, и в (4) – с пробной функцией $\xi = \varepsilon\xi_0(\boldsymbol{x}, t)\xi_1(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$.

Лемма 4. *1-периодические решения $\{\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t),\ P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)\}$ периодической начально-краевой задачи (7), (8), дополненной начальным условием*

$$\chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 0) = 0\,, \tag{10}$$

имеет вид

$$\boldsymbol{W} = \sum_{i,j=1}^{3} \int_0^t \boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y}, t - \tau) Z_{ij}(\boldsymbol{x}, \tau) d\tau\,,$$

$$P = \chi(\boldsymbol{y}) \sum_{i,j=1}^{3} P_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}) Z_{ij}(\boldsymbol{x}, t) + \sum_{i,j=1}^{3} \int_0^t P^{(ij)}(\boldsymbol{y}, t - \tau) Z_{ij}(\boldsymbol{x}, \tau) d\tau\,,$$

где

$$\mathbb{Z}(\boldsymbol{x}, t) = \mu_0 \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}) - \lambda_0 \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) = \sum_{i,j=1}^{3} Z_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\mathbb{J}^{(ij)},$$

и $\{\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y}, t),\ P^{(ij)}(\boldsymbol{y}, t)\}$, $\{\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}),\ P_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\}$, $i, j = 1, 2, 3$ являются решениями периодических задач

$$\left.\begin{aligned} \nabla_y \cdot \Big(\chi\,\mu_0\,\mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}\right) + \lambda_0\,(1 - \chi)\mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}^{(ij)}) - P^{(ij)}\,\mathbb{I}\Big) = 0,\\ \nabla_y \cdot \boldsymbol{W}^{(ij)} = 0,\\ \chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y}, 0) = \boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}); \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla_y\cdot\Big(\chi\left(\mu_0\,\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}_0^{(ij)})+\mathbb{J}^{(ij)}-P_0^{(ij)}\,\mathbb{I}\right)\Big)=0,\\ \nabla_y\cdot\,\boldsymbol{W}_0^{(ij)}=0,\quad \int_Y\chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})dy=0, \end{aligned}\right\}\tag{12}$$

в области Y. *Здесь*

$$\mathbb{J}^{ij}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i),$$

где $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ *вектора декартова базиса.*

Простые вычисления показывают, что

$$\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})=\mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})+\int_0^t\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},t-\tau):\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau)\big)d\tau\,,\tag{13}$$

где

$$\mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y})=\mu_0\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\big)\otimes\mathbb{J}^{(ij)}\tag{14}$$

и

$$\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},t)=\sum_{i,j=1}^{3}\left(\mu_0\,\mathbb{D}\left(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\right)-\lambda_0\,\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t)\big)\right)\otimes\mathbb{J}^{(ij)}.\tag{15}$$

Из равенств (13) – (15) следует, что

$$\mathbb{D}\left(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}\right)=\mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}):\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\right)+\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},0):\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)\big)+ \int_0^t\frac{\partial\mathfrak{A}_1}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau):\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau)\big)d\tau\,.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{N}_1=\mu_0\,m\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{J}^{(ij)}\otimes\mathbb{J}^{(ij)}+\mu_0\,\langle\mathfrak{A}_0\rangle_{Y_f}\,,\\ \mathfrak{N}_2=\lambda_0\,(1-m)\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{J}^{(ij)}\otimes\mathbb{J}^{(ij)}+\lambda_0\,\langle\mathfrak{A}_0\rangle_{Y_s}+\mu_0\,\langle\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},0)\rangle_{Y_f}\,,\\ \mathfrak{N}_3(t)=\mu_0\left\langle\frac{\partial\mathfrak{A}_1}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\right\rangle_{Y_f}+\lambda_0\,\langle\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},t)\rangle_{Y_s}\,. \end{aligned}\right\}\tag{16}$$

Лемма 5. *1-периодическое решение* $C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ *периодической начально-краевой задачи (9) имеет вид*

$$C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=\sum_{i=1}^{3}C^{(i)}(\boldsymbol{y})\frac{\partial c}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t),$$

где $C^{(i)}(\boldsymbol{y})$, $i=1,2,3$ *является решением краевой задачи*

$$\nabla_y\cdot\big(\chi(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{e}_i+\nabla_y C^{(i)})\big)=0\tag{17}$$

в области Y.

Задача (17) является уравнением Лапласа в области Y_f, дополненное краевым условием

$$(\boldsymbol{e}_i + \nabla_y C^{(i)}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

на границе γ, где $\boldsymbol{n}$ вектор нормали к γ. Тогда

$$m \nabla c + \langle \nabla_y C \rangle_{Y_f} = \mathbb{B}^{(c)} \nabla c = \left(m\mathbb{I} + \Big(\sum_{i=1}^{3} \langle \nabla_y C^{(i)}(\boldsymbol{y}) \rangle_{Y_f} \otimes \boldsymbol{e}_i \Big) \right) \nabla c \,,$$

и

$$\mathbb{B}^{(c)} = m\mathbb{I} + \Big(\sum_{i=1}^{3} \langle \nabla_y C^{(i)}(\boldsymbol{y}) \rangle_{Y_f} \otimes \boldsymbol{e}_i \Big) = m\mathbb{I} + \mathbb{B}_0 \,. \tag{18}$$

4. Доказательства утверждений

Доказательство Теоремы 4 аналогично доказательству Теоремы 3.

Доказательство Леммы 1. Матрица $\mathbb{B}$ – симметричная и положительно определенная. Действительно, умножим уравнение (17) на $C^{(j)}(\boldsymbol{y})$ и проинтегрируем по области Y_f

$$\int_{Y_f} (\nabla C^{(i)} \cdot \nabla C^{(j)} + \boldsymbol{e}_i \cdot \nabla C^{(j)}) dy = 0 \,. \tag{1}$$

Пусть $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta} \in R^3$. Рассмотрим следующее выражение

$$(\mathbb{B}\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\eta} = D_0 m \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} + D_0 \sum_{i=1}^{3} \int_{Y_f} \nabla C^{(i)} \xi_i \cdot \boldsymbol{\eta} dy = D_0 \int_Y \chi (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} + \nabla \varphi_\xi \cdot \boldsymbol{\eta}) dy \,, \tag{2}$$

где

$$\varphi_\xi = \sum_{i=1}^{3} C^{(i)} \xi_i \,, \quad \varphi_\eta = \sum_{j=1}^{3} C^{(j)} \eta_j \,.$$

Умножим (1) на $D_0 \eta_j \xi_i$ и просуммируем по индексам i и j. В итоге, получим

$$\int_Y \chi (\nabla \varphi_\xi \cdot \nabla \varphi_\eta + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \varphi_\eta) dy = 0. \tag{3}$$

Прибавим теперь к выражению (2) равенство (3). Имеем

$$(\mathbb{B}\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\eta} = D_0 \int_Y \chi (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} + \nabla \varphi_\xi \cdot \boldsymbol{\eta} + \nabla \varphi_\xi \cdot \nabla \varphi_\eta + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \varphi_\eta) dy$$

или

$$(\mathbb{B}\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\eta} = D_0 \int_Y \chi (\boldsymbol{\xi} + \nabla \varphi_\xi) \cdot (\boldsymbol{\eta} + \nabla \varphi_\eta) dy \,.$$

Очевидно, что $(\mathbb{B}\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{\eta} = (\mathbb{B}\boldsymbol{\eta})\cdot\boldsymbol{\xi}$, что, в свою очередь, и означает симметричность матрицы $\mathbb{B}$, и

$$(\mathbb{B}\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{\xi} = D_0\int_Y \chi(\boldsymbol{\xi}+\nabla\varphi_\xi)^2 dy \geqslant 0\,.$$

Более того

$$I(\boldsymbol{\xi}) = D_0\int_Y \chi(\boldsymbol{\xi}+\nabla\varphi_\xi)^2 dy \geqslant \alpha_0 > 0$$

для $|\boldsymbol{\xi}|=1$.

В самом деле, пусть последовательность $\{\boldsymbol{\xi}^n\}$ такая, что $I(\boldsymbol{\xi}) \to 0$ при $n\mapsto\infty$. Можно считать, что $\boldsymbol{\xi}^n\to\boldsymbol{\xi}^0$ при $n\mapsto\infty$. Тогда, в силу непрерывности $I(\boldsymbol{\xi})$, следует, что

$$I(\boldsymbol{\xi}^0)=0,$$

то есть

$$\boldsymbol{\xi}^0+\nabla\varphi^0_\xi = 0$$

или

$$\varphi^0_\xi = -\boldsymbol{\xi}^0\cdot\boldsymbol{y} + \mathrm{const}\,. \tag{4}$$

Функция $\varphi^0_\xi = C^{(1)}\xi^0_1 + C^{(2)}\xi^0_2 + C^{(3)}\xi^0_3$ является 1-периодической по $\boldsymbol{y}$, так как функции $C^{(i)}(\boldsymbol{y})$ – 1-периодические по $\boldsymbol{y}$.

Так как поровое пространство является связным, то (4) имеет смысл только для $\boldsymbol{\xi}^0=0$, но $|\boldsymbol{\xi}^0|=1$. Получили противоречие.

Пусть $\mathbb{T}_2$ – поворот на угол $\pi/2$ вокруг оси y_3, направленной по вектору $\boldsymbol{e}_3$, такой что $\mathbb{T}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1$. Здесь $\{\boldsymbol{e}_1,\,\boldsymbol{e}_2,\,\boldsymbol{e}_3\}$ декартов базис. Если $\boldsymbol{z}=\mathbb{T}_2\cdot\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}\in Y$, то $\mathbb{T}_2 : Y_f\to Y_f$ и $\chi(\boldsymbol{y})=\chi(\boldsymbol{z})$, так как поровое пространство симметрично относительно поворотов на $\pi/2$ относительно любой оси координат.

Функция $\widetilde{C}^{(2)}(\boldsymbol{z}) = C^{(2)}(\boldsymbol{y})$ является решением следующей периодической начально-краевой задачи

$$\nabla_z\cdot\big(\chi(\boldsymbol{z})(\mathbb{T}_2\cdot\boldsymbol{e}_2+\mathbb{T}_2\cdot\mathbb{T}_2^*\cdot\nabla_z\widetilde{C}^{(2)})\big) = \nabla_z\cdot\big(\chi(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{e}_1+\nabla_z\widetilde{C}^{(2)})\big)=0 \tag{5}$$

в единичном кубе $Z=Y$.

Задача (5) совпадает с задачей (17) и, в силу единственности решения задачи (17), имеем

$$C^{(2)}(\boldsymbol{y}) = \widetilde{C}^{(2)}(\boldsymbol{z}) = C^{(1)}(\boldsymbol{z}) = C^{(1)}(\mathbb{T}_2\cdot\boldsymbol{y})\,. \tag{6}$$

Аналогично получаем

$$C^{(3)}(\boldsymbol{y}) = \widetilde{C}^{(3)}(\boldsymbol{z}) = C^{(1)}(\boldsymbol{z}) = C^{(1)}(\mathbb{T}_3\cdot\boldsymbol{y}), \tag{7}$$

где $\mathbb{T}_3$ поворот вокруг оси y_2, такой что $\mathbb{T}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1$.

Для нахождения матрицы $\mathbb{B}_0$ положим, что

$$\boldsymbol{a}_1 = \langle\nabla_y C^{(1)}(\boldsymbol{y})\rangle_{Y_f}\,,$$

и вычислим

$$\boldsymbol{a}_2 = \langle \nabla_y C^{(2)}(\boldsymbol{y}) \rangle_{Y_f} = \mathbb{T}_2^* \langle \nabla_z C^{(1)}(\boldsymbol{z}) \rangle_{Y_f} = \mathbb{T}_2^* \cdot \boldsymbol{a}_1 \,,$$

и

$$\boldsymbol{a}_3 = \langle \nabla_y C^{(3)}(\boldsymbol{y}) \rangle_{Y_f} = \mathbb{T}_3^* \langle \nabla_z C^{(1)}(\boldsymbol{z}) \rangle_{Y_f} = \mathbb{T}_3^* \cdot \boldsymbol{a}_1 \,.$$

Пусть $\boldsymbol{a}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3$. Тогда

$$\boldsymbol{a}_2 = \alpha_1 \mathbb{T}_2^* \cdot \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \mathbb{T}_2^* \cdot \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \mathbb{T}_2^* \cdot \boldsymbol{e}_3 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_2 - \alpha_2 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

$$\boldsymbol{a}_3 = \alpha_1 \mathbb{T}_3^* \cdot \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \mathbb{T}_3^* \cdot \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \mathbb{T}_3^* \cdot \boldsymbol{e}_3 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_3 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 - \alpha_3 \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Здесь мы воспользовались очевидными свойствами преобразований $\mathbb{T}_2$ и $\mathbb{T}_3$:

$$\mathbb{T}_2^* \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2, \;\; \mathbb{T}_2^* \cdot \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1, \;\; \mathbb{T}_2^* \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \,,$$

и

$$\mathbb{T}_3^* \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3, \;\; \mathbb{T}_3^* \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2, \;\; \mathbb{T}_3^* \cdot \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Учитывая введенные выше обозначения, матрица $\mathbb{B}_0$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}_0 = \boldsymbol{a}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{a}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{a}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3 = \\
\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \alpha_1 \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \alpha_1 \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 - \alpha_2 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \\
\alpha_3 \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1 - \alpha_3 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 = \\
\alpha_1 (\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3) \,,
\end{aligned}$$

где $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ силу симметричности матрицы $\mathbb{B}_0$.

Литература

1. Acerbi E., Chiado Piat V., Dal Maso G. and Percivale D. An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains // Nonlinear Anal. – 1992. – 18. – P.481-496.
2. Nguetseng G. Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics // SIAM J. Math. Anal. – 1990. – 21.– P.1394-1414.
3. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // Math. Pures et Appl. – 1985. – 64. – P.31-75.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического вида / М.: Мир, 1967. – 736 с.
5. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – 20. – P.608-623.
6. Мейрманов А.М., Зимин Р.Н., Гальцева О.В., Гальцев О.А. Корректная разрешимость задачи о нелинейной диффузии в несжимаемой пороупругой среде на микроскопическом уровне / Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2012. – 5№124;26.

MATHEMATICAL MODELS OF DIFFUSION IN POROUS ELASTIC MEDIA

A.M. Meirmanov R.N. Zimin, O.V. Galtseva, O.A. Galtsev

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: reshat85@mail.ru

Abstract. The paper is devoted to obtaining of some new correct mathematical models of diffusion process in porous media. They are derived on the basis of the averaging and Nguetseng's method of two-scale convergence.

Key words: homogenization, two-scale convergence.