КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 511.3

О НУЛЯХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ ИЗ КЛАССА СЕЛЬБЕРГА, ЛЕЖАЩИХ НА КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Д.Б. Демидов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Demidovnext@yandex.ru

Аннотация. Получена нижняя оценка числа нулей на коротких промежутках критической прямой для ряда Дирихле из класса Сельберга степени 2.

Ключевые слова: ряды Дирихле, класс Сельберга, нули функций.

1. А. Сельберг в работе [2] определил класс S рядов Дирихле $F(s)$, удовлетворяющих условиям:

1) $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \Re\, s > 1$;

2) существует неотрицательное целое число m такое, что функция $(s-1)^m F(s)$ целая;

3) коэффициенты Дирихле $a(n)$ удовлетворяют неравенствам

$$a(n) \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon}$$

для любого положительного ε, причем $a(1) = 1$;

4) существует функция $\gamma_F(s)$ вида

$$\gamma_F(s) = \varepsilon_1 Q^s \prod_{l=1}^{k} \Gamma(\lambda_l s + \mu_l)\,, \tag{1}$$

где $|\varepsilon_1| = 1\,, \quad Q > 0\,, \lambda_l > 0\,, \mathrm{Re}\mu_l \geq 0$, и такая, что для функции $\Phi(s) = \gamma_F(s)F(s)$ справедливо тождество

$$\Phi(s) = \overline{\Phi(1-\overline{s})}\,;$$

5) при $\sigma > 1$ функция $F(s)$ раскладывается в эйлерово произведение

$$F(s) = \prod_p (1 + a(p)p^{-s} + a(p^2)p^{-2s} + \cdots)\,,$$

где p пробегает простые числа.

В статье [3] для функции $F(s)$ из класса Сельберга S определена следующая характеристика, которая называется ее степенью:

$$d_F = 2\sum_{l=1}^{k} \lambda_l\,.$$

Пусть $F(s)$ – функция из класса S. Нули функции $F(s)$, совпадающие с полюсами функции $\gamma_F(s)$, называются тривиальными, а остальные – нетривиальными. Известно, что нетривиальные нули находятся в полосе $1-A \leq \mathrm{Re}s \leq A,\ A = A(F) > 0$ (см. [2]). Одним из направлений исследований в теории рядов Дирихле является изучение распределения их нетривиальных нулей. В частности, это относится к распределению нулей дзета-функции Римана. Она является функцией из класса Сельберга степени 1.

Пусть $N_0(T)$ – число нулей $\zeta(1/2+it)$ на промежутке $(0,T\,]$. В 1921 году Харди и Литтлвуд [4] доказали, что

$$N_0(T) \gg T\,.$$

В 1942 году А. Сельберг [5] получил правильную по порядку оценку $N_0(T)$:

$$N_0(T) \gg T\ln T\,.$$

В 2010 году И.С. Резвякова в своей работе [6] рассмотрела задачу о нулях L-функций, соответствующих автоморфным параболическим формам. Была получена правильная по порядку нижняя оценка числа нулей на критической прямой следующего вида:

$$N_0(T,L_f) \gg T\log T\,,$$

где функция L_f при $\mathrm{Re}s>1$ определяется рядом Дирихле $L_f(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{r(n)}{n^s},\ \ r(n) = a(n)n^{\frac{1-k}{2}}$, $a(n)$ – коэффициенты параболической автоморфной формы $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}a(n)e^{2\pi inz}$, Re $z>0$ целого веса $k\geq 1$ относительно группы $\Gamma_0(D)$ с характером χ по модулю D, которая является собственной функцией всех операторов Гекке T_n, $n=1,2,\ldots$.

2. Пусть $F(s)$ – примитивная функция из класса Сельберга степени 2, то есть не представляется в виде $G_1(s)G_2(s)$, где $G_1(s)\in S$, $G_2(s)\in S$. Введем обозначение $N_0(T,F)$ – число нулей $F(1/2+it)$ на промежутке $(0,T\,]$. Предположим, что коэффициенты Дирихле функции $F(s)$ удовлетворяет трем гипотезам:

I). *При $Y\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{n\leq Y}|a(n)|^2 = A_FY + O\left(Y\ln^{-4}Y\right)\,,$$

где $A_F>0$ – постоянная, зависящая только от F.

II). *Пусть $\varepsilon>0$ – сколь угодно малое число, $Y>10$, a и b – натуральные числа, $1\leq a,b\leq Y^\varepsilon$, $(a,b)=1$, h – натуральное число, меньше Y. Тогда при $Y\to\infty$ справедлива оценка*

$$\sum_{\substack{an-bm=h\\ n\leq Y}} a(n)\overline{a}(m) \ll Y^{1-\delta}\,,\quad \delta>0\,.$$

III). *Пусть n_1 и n_2 – произвольные натуральные числа. Тогда*

$$|a(n_1n_2)| \leq |a(n_1)||a(n_2)|\,.$$

Сформулируем наш результат.

Теорема. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *– произвольно малое число,* δ *– число из условия I),* $T \geq T_0 > 0$, $T^{1-\delta/2+\varepsilon} \leqslant H \leqslant T$. *Пусть* $F(s)$ *– примитивная функция из класса Сельберга степени 2. Коэффициенты Дирихле* $F(s)$ *удовлетворяют условиям I)-III). Тогда справедлива оценка*

$$N_0(T+H,F) - N_0(T,F) \gg H\ln T\,.$$

□ Определим функцию $f(t)$ равенством

$$f(t) = \left(\rho_F\left(\frac{1}{2}+it\right)\right)^{-1/2} F\left(\frac{1}{2}+it\right), \quad \text{где} \quad \rho_F(\sigma+it) = \overline{\gamma}_F(1-\sigma-it)\gamma_F^{-1}(\sigma+it),$$

$\gamma_F(\sigma+it)$ определяется формулой (1). Функция $f(t)$ принимает вещественные значения при $t \in \mathbb{R}$. При этом нули нечетного порядка функции $f(t)$ являются нулями функции $F(s)$ на критической прямой.

Определим числа $\alpha(v)$ равенством

$$\sum_{v=1}^{+\infty}\frac{\alpha(v)}{v^s} = \prod_p\left(1-\frac{a(p)}{2p^s}\right),$$

где $a(p)$ – коэффициенты Дирихле функции $F(s)$, и положим

$$\beta(\nu) = \alpha(\nu)\max\left(1-\frac{\ln\nu}{\ln X},\ 0\right), \qquad X = T^{\varepsilon}.$$

Определим аналитическую функцию $\varphi(s)$ формулой

$$\varphi(s) = \sum_{\nu=1}^{+\infty}\beta(\nu)\nu^{-s}.$$

Пусть $h = c_1/\ln T$, $h_1 = h\sqrt{5\ln\ln T}$, c_1 – положительная постоянная. Рассмотрим два интеграла

$$j_1(t) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2}\left|f(t+u)\varphi^2\left(\frac{1}{2}+i(t+u)\right)\right|du\,,$$

$$j_2(t) = \left|\int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2}f(t+u)\left|\varphi^2\left(\frac{1}{2}+i(t+u)\right)\right|du\right|.$$

Положим E – множество точек $t \in (T,\ T+H)$ таких, что выполняется: $j_1(t) > j_2(t)$, $\mu(E)$ – мера множества E. Справедливо неравенство $I_3 \leq I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int_E j_1(t)dt\,, \quad I_2 = \int_T^{T+H} j_2(t)dt, \quad I_3 = \int_T^{T+H} j_1(t)dt\,.$$

Дословно повторяя соответствующее рассуждение из [1, §6.3], приходим к неравенству $I_3 \geq c_2hH$, $c_2 > 0$ – абсолютная постоянная.

Для получения верхних оценок интегралов I_1 и I_2 мы будем пользоваться следующим приближенным функциональным уравнением. Пусть $M \geq T$, $T < t \leq T + H$. Справедливо равенство

$$F\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi^2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| = \sum_{\lambda}\frac{A(\lambda)\lambda^{-it}e^{-\frac{\lambda}{M}}}{\sqrt{\lambda}} +$$

$$+\rho_F\left(\frac{1}{2}+it\right)\sum_{\lambda}\frac{\overline{A(\lambda)}\lambda^{it}}{\sqrt{\lambda}}\left(1-e^{-\frac{Q_1^2t^2}{M\lambda}}\right)+O\left(\frac{M^{1/4+\varepsilon}}{T^{3/4}}\right), \qquad (2)$$

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{\nu_1 n}{\nu_2}=\lambda}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)a(n)}{\nu_2}\,.$$

Доказательство последнего факта проводится аналогично тому, как было получено уравнение для $F(1/2+it)$ в работе [7]. Оценим I_1 сверху. Применяем к $F(1/2+it)$ уравнение (2) и пользуемся неравенством Коши. Затем выделяем «диагональные» и «недиагональные» слагаемые, которые оцениваем при условии справедливости гипотез I)-III), получим $I_1 \leq c_3\mu(E)^{1/2}hH^{1/2}$, $c_3 > 0$ – абсолютная постоянная. Интеграл I_2 состоит из «диагональной» и «недиагональной» частей. Пользуясь рассуждениями из [1, §6.3] с учетом гипотез I)-III), находим, что $I_3 \geq 2I_2$, $\mu(E) \gg H$. Поэтому число нулей нечетного порядка функции $f(t)$ и, следовательно, функции $F(1/2+it)$ на отрезке $T \leq t \leq T+H$ оценивается снизу величиной порядка

$$\mu(E)h^{-1} \gg H\ln T\,. \quad \blacksquare$$

Литература

1. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана / М.: Физматлит, 1994. – 376 с.
2. Selberg A. Old and new conjectures about class of Dirichlet series / Collected papers. – 1991. – 2. – P. 47-63 / Berlin: Springer-Verlag, 1991.
3. Conrey J.B., Ghosh A. On the Selberg Class of Dirichlet Series: small degrees // Duke Math. J. – 1993. – 72l;3. – P.673-695.
4. Hardy G.H., Littlewood J.E. The zeroes of Riemann's zeta-function on the critical line // Math. Z. – 1921. – 10. – P.283-317.
5. Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta-function // Skr. Norske Vid.Akad.Oslo. – 1942. – 10. – P.1-59.
6. Резвякова И.С. О нулях на критической прямой L-функций, соответствующих автоморфным параболическим формам // Математические заметки – 2010. – 88;3. – С.456-474.
7. Гриценко С.А. О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга // Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 1996. – 60;4.

ON ZEROS OF LINEAR COMBINATIONS OF DIRICHLET's SERIES OF SELBERG's CLASS BEING ON SHORT INTERVALS OF CRITICAL LINE

D.B. Demidov

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Demidovnext@yandex.ru

Abstract. New estimate from below for the number of zeros on short intervals on the critical line connected with Dirichlet's series of Selberg's class with the power 2 is found.

Key words: Dirichlet's series, Selberg's class, zeros of functions.