УДК 621.397

МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ КВАЗИЦИКЛИЧЕСКИХ КОМПОНЕНТ ИЗОБРАЖЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЕГО ЭНЕРГИЕЙ В ЗАДАННЫХ ЧАСТОТНЫХ СУБИНТЕРВАЛАХ

А.А. ЧЕРНОМОРЕЦ
О.Н. ИВАНОВ

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

e-mail:
Chernomorets@bsu.edu.ru

В работе изложен метод выделения квазициклических компонент изображения, оптимальный в смысле аппроксимации спектральной энергии в заданном частотном субинтервале и вне его, с учетом различной значимости составляющих используемого функционала.

Ключевые слова: изображение, трансформанты Фурье, частотный субинтервал, квазициклические компоненты, оптимальная фильтрация.

В процессе создания систем обработки и анализа изображений в различных сферах хозяйственной деятельности человека, например, мониторинг земной поверхности, анализ рентгеновских снимков, одной из основных задач является выявление различных характеристик объектов, отображенных на изображениях.

Для задачи выделения различных характеристик на изображениях большую значимость имеет решение проблемы фильтрации квазициклических компонент изображения, которые характеризуются повышенной концентрацией спектральной энергии [1] изображения в отдельных частотных интервалах. В данной работе предложен новый метод фильтрации изображений, который позволяет выделять такие компоненты, что их спектр имеет наименьшее среднеквадратическое отклонение, с учетом некоторой значимости данной аппроксимации, от спектра исходного изображения в заданном двумерном частотном интервале, а вне этого интервала имеет наименьшее отклонение от нуля, также с учетом некоторой значимости указанной аппроксимации.

Рассмотрим математические основы метода решения задачи разделения изображений в цифровой форме на аддитивные составляющие (квазициклические компоненты) с использованием частотных представлений (линейной частотной фильтрации). Задача выделения квазициклических компонент изображений, которые полностью определяются энергией исходного изображения в заданном частотном интервале, рассматривается в данной работе в следующей общей формулировке. Пусть $\Phi=(f_{ik})$, $i=1,2,...,M$, $k=1,2,...,N$, – изображение, заданное в виде матрицы, элементы f_{ik} которой представляют собой значения яркости в точках (i,k) некоторой пространственной области. Трансформанта Фурье $F^{\Phi}(u,v)$ данного изображения согласно определению [2] имеет вид

$$F^{\Phi}(u,v)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} f_{ik}e^{-ju(i-1)}e^{-jv(k-1)}. \qquad (1)$$

Задача заключается в разделении изображения на аддитивные компоненты

$$\Phi = Y + \Phi_0,$$

так, что первая компонента Y обладает трансформантой Фурье

$$F^{Y}(u,v)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} y_{ik}e^{-ju(i-1)}e^{-jv(k-1)}, \qquad (2)$$

которая в идеальном случае должна удовлетворять условиям

$$F^{Y}(u,v)=F^{\Phi}(u,v),\ \ (u,v)\in\Omega, \qquad (3)$$

$$F^Y(u,v)=0,\ (u,v)\notin\Omega, \tag{4}$$

где Ω – частотный субинтервал, определенный следующим соотношением,

$$\Omega:\{\Omega(u,v)\,|\,(u\in[\alpha_1,\alpha_2],v\in[\beta_1,\beta_2])\cup(u\in[\alpha_1,\alpha_2],v\in[-\beta_2,-\beta_1])\cup$$
$$(u\in[-\alpha_2,-\alpha_1],v\in[-\beta_2,-\beta_1])\cup(u\in[-\alpha_2,-\alpha_1],v\in[\beta_1,\beta_2])\ \}, \tag{5}$$
$$0\le\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\le\pi.$$

Известно [3], что отрезки конечной длины не могут иметь трансформанты Фурье с финитными областями определения, то есть удовлетворить условиям «идеальной» частотной фильтрации (3), (4) не представляется возможным. Вместе с тем можно предложить вариант оптимального решения сформулированной задачи разделения изображения на аддитивные составляющие (частотной фильтрации).

В работе предлагается использовать следующий вариационный принцип – спектр $|F^Y(u,v)|$ результата преобразования должен наилучшим образом аппроксимировать спектр исходного изображения в смысле минимума некоторого функционала.

В качестве предварительных исследований приведем процесс [4] выделения квазициклической компоненты $\vec{y}$ вектора $\vec{x}$ (отрезка сигнала) конечной длины M (одномерная оптимальная линейная фильтрация),

$$\vec{x}=\vec{y}+\vec{x}_0,$$

где $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_M)^T$, $\vec{y}=(y_1,y_2,...,y_M)^T$, $\vec{x}_0=(x_{01},x_{02},...,x_{0M})^T$ – векторы длины M.

Введем квадратичный функционал

$$S_\gamma^2(\vec{x},\vec{y})=(1-\gamma)\int\limits_{\omega\in V_r}|F^x(\omega)-F^y(\omega)|^2\,d\omega+\gamma\int\limits_{\omega\notin V_r}|F^y(\omega)|^2\,d\omega, \tag{6}$$

где $F^x(\omega)$ и $F^y(\omega)$ - трансформанты Фурье векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

$$F^x(u)=\sum_{i=1}^{M}x_i e^{-ju(i-1)}, \tag{7}$$

и

$$F^y(v)=\sum_{i=1}^{M}y_i e^{-ju(i-1)}, \tag{8}$$

γ – параметр, определяющий относительную важность составляющих функционала (6), удовлетворяет неравенству

$$0<\gamma<1, \tag{9}$$

V_r – интервал, задаваемый соотношением

$$V_r=[-v_{r+1},-v_r)\cup[v_r,v_{r+1}), \tag{10}$$
$$0=v_0\le v_r<v_{r+1}\le\pi,\ r=1,..,R.$$

Параметр γ указывает на возможную различную важность составляющих функционала (6). Функционал $S_\gamma^2(\vec{x},\vec{y})$ может служить мерой погрешности выполнения условий (3), (4). Поэтому использование вариационного принципа

$$S_\gamma^2(\vec{x},\vec{y})\Rightarrow\min_{\vec{y}}S_\gamma^2(\vec{x},\vec{y}), \tag{11}$$

где поиск минимума осуществляется по компонентам $\vec{y}$, позволяет получить оптимальное (в смысле вариационного принципа (11)) решение задачи аддитивного разделения вектора на основе частотных представлений.

Подстановка определений (7) и (8) в функционал (11) позволяет легко преобразовать его к виду

$$S_\gamma^2(\vec{x},\vec{y})=(1-\gamma)\vec{x}^TA_r\vec{x}-2(1-\gamma)\vec{y}^TA_r\vec{x}+\vec{y}^T(\gamma I+(1-2\gamma)A_r)\vec{y}, \tag{12}$$

где A_r – субполосная матрица [5], соответствующая частотному интервалу V_r.

Поскольку субполосная матрица A_r является неотрицательно-определенной и имеет место неравенство (9), то матрица

$$C_\gamma = (\gamma I + (1-2\gamma)A_r) \tag{13}$$

будет неособенной. Поэтому, справедливо следующее представление для вектора, удовлетворяющего требованию (11),

$$\vec{y} = (1-\gamma)(\gamma I + (1-2\gamma)A_r)^{-1} A_r \vec{x}. \tag{14}$$

Используя определения элементов субполосных матриц, для компонент вектора

$$\vec{z} = (z_1,..,z_N)^T = A_r \vec{x}$$

нетрудно получить равенства

$$z_k = \int_{\omega \in V_r} F^x(\omega) \exp(j\omega(k-1)) d\omega / 2\pi, k = 1,..,N.$$

Таким образом, вектор $\vec{z}$, а, следовательно, вся правая часть соотношения (14) и вектор $\vec{y}$ определяются только энергией исходного вектора в заданном частотном интервале V_r.

На основании указанного результата в данной работе разработан вариационный принцип выделения квазициклических компонент изображений, которые полностью определяются энергией исходного изображения в заданном частотном субинтервале Ω (5), заключающийся в последовательном применении вариационного принципа (11) оптимальной линейной фильтрации одномерных дискретных сигналов, сначала к столбцам исходного изображения, затем к строкам результата первого преобразования.

Для описания метода выделения квазициклических компонент изображений введем следующие обозначения:

- $\Phi_1 = (f_{1,ik})$, $\Phi_2 = (f_{2,ik})$, $\Phi_3 = (f_{3,ik})$, $i = 1,2,...,M$, $k = 1,2,...,N$, – изображения размерности MxN, заданные соответствующими матрицами яркости;
- Φ_{1k}, Φ_{2k}, $k = 1,2,...,N$ – k-тый столбец матриц Φ_1 и Φ_2;
- $F_{1k}(\omega)$, $F_{2k}(\omega)$ – трансформанты Фурье, соответствующие указанным столбцам,

$$F_{1k}(\omega) = \sum_{i=1}^{M} f_{1,ik} e^{-j\omega(i-1)},$$

$$F_{2k}(\omega) = \sum_{i=1}^{M} f_{2,ik} e^{-j\omega(i-1)};$$

- Φ_2^i, Φ_3^i, $i = 1,2,...,M$ – i-тая строка матриц Φ_2 и Φ_3;
- $F_2^i(\omega)$, $F_3^i(\omega)$ – трансформанты Фурье, соответствующие указанным строкам;

$$F_2^i(\omega) = \sum_{k=1}^{N} f_{2,ik} e^{-j\omega(k-1)},$$

$$F_3^i(\omega) = \sum_{k=1}^{N} f_{3,ik} e^{-j\omega(k-1)};$$

- Ω_u, Ω_v – проекции частотного субинтервала Ω (5) на координатные оси OU и OV частотной области соответственно.

В процессе выделения квазициклических компонент изображений, соответствующих заданному частотному субинтервалу Ω (5), предлагается на основании применения вариационного принципа (11) к изображению Φ_1 последовательно построить некоторые изображения Φ_2 и Φ_3 следующим образом:

1) Вариационный принцип (11), примененный к отдельным столбцам Φ_{1k}, $k=1,2,...,N_2$, исходного изображения Φ_1 в частотной области Ω_u, и позволяющий найти оптимальный результат фильтрации в том смысле, что спектр получаемых в результате фильтрации столбцов имеет наименьшее среднеквадратическое отклонение от спектра фильтруемых столбцов в частотном интервале Ω_u, а вне этого интервала имеет наименьшее отклонение от нуля, то есть

$$S_{\gamma_1}(\Phi_{1k},\Phi_{2k})=(1-\gamma_1)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega\in\Omega_u}\left|F_{1k}(\omega)-F_{2k}(\omega)\right|^2 d\omega+\gamma_1\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega\notin\Omega_u}\left|F_{2k}(\omega)\right|^2 d\omega=\min_{\Phi_{2k}}, \quad (15)$$

$$0<\gamma_1<1,$$

определяет столбцы Φ_{2k}, $k=1,2,...,N$, изображения Φ_2. Очевидно, что определенное таким способом изображение Φ_2 представляет собой результат оптимальной линейной фильтрации столбцов исходного изображения Φ_1 в частотной области Ω_u. Параметр γ_1 определяет относительную важность составляющих функционала (15).

2) Вариационный принцип (11), примененный к отдельным строкам Φ_2^i, $i=1,2,...,M$, изображения Φ_2 в частотной области Ω_v, и позволяющий найти оптимальный результат фильтрации в том смысле, что спектр получаемых в результате фильтрации строк имеет наименьшее среднеквадратическое отклонение от спектра фильтруемых строк в частотном интервале Ω_v, а вне этого интервала имеет наименьшее отклонение от нуля, то есть

$$S_{\gamma_2}(\Phi_2^i,\Phi_3^i)=(1-\gamma_2)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega\in\Omega_v}\left|F_2^i(\omega)-F_3^i(\omega)\right|^2 d\omega+\gamma_2\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega\notin\Omega_v}\left|F_3^i(\omega)\right|^2 d\omega=\min_{\Phi_3^i}, \quad (16)$$

$$0<\gamma_2<1,$$

определяет строки Φ_3^i, $i=1,2,...,M$, изображения Φ_3. Очевидно, что определенное таким способом изображение Φ_3 представляет собой результат оптимальной линейной фильтрации строк изображения Φ_2 в частотной области Ω_v. Параметр γ_2 определяет относительную важность составляющих функционала (16).

Вариационный принцип (15), определяет метод оптимальной линейной фильтрации столбцов исследуемого изображения Φ_1, который на основании выражения (14), позволяет получить изображение Φ_2 (столбцы изображения Φ_2 являются результатом (14) оптимальной линейной фильтрации (11) столбцов изображения Φ_1) на основании соотношения

$$\Phi_2=(1-\gamma_1)(\gamma_1 I+(1-2\gamma_1)A_\alpha)^{-1}A_\alpha\Phi_1, \quad (17)$$

где A_α – субполосная матрица, соответствующая проекции Ω_u частотного субинтервал Ω (5).

Аналогично, вариационный принцип (16), определяет метод оптимальной линейной фильтрации строк изображения Φ_2, который на основании выражения (14), позволяет получить изображение Φ_3 (строки изображения Φ_3 являются результатом (14) оптимальной линейной фильтрации (11) строк изображения Φ_1) на основании соотношения

$$\Phi_3=\Phi_2 A_\beta(\gamma_2 I+(1-2\gamma_2)A_\beta)^{-1}(1-\gamma_2), \quad (18)$$

где A_β – субполосная матрица, соответствующая проекции Ω_v частотного субинтервал Ω (5).

Подстановка выражения (17) в выражение (18) дает соотношение, определяющее вариационный метод выделения квазициклической компоненты Y изображения Φ (оптимальная фильтрация), которая полностью определяется энергией исходного изображения в заданном частотном субинтервале Ω,

$$Y = (1-\gamma_1)(\gamma_1 I + (1-2\gamma_1)A_\alpha)^{-1} A_\alpha \Phi A_\beta (\gamma_2 I + (1-2\gamma_2)A_\beta)^{-1}(1-\gamma_2). \qquad (19)$$

$$0 < \gamma_1 < 1,$$

$$0 < \gamma_2 < 1,$$

где A_α, A_β – субполосные матрицы $A_\alpha = (a^\alpha{}_{i_1 i_2})$ и $A_\beta = (a^\beta{}_{k_1 k_2})$, соответствующие частотному субинтервалу Ω (5), значения элементов которых задаются соотношениями (20), (21),

$$a^\alpha{}_{i_1 i_2} = \begin{cases} \dfrac{2Cos\dfrac{(\alpha_2+\alpha_1)((i_1-i_2))}{2}Sin\dfrac{(\alpha_2-\alpha_1)((i_1-i_2))}{2}}{\pi(i_1-i_2)}, & i_1 \neq i_2, \\ \dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\pi}, & i_1 = i_2, \end{cases} \qquad (20)$$

$$a^\beta{}_{k_1 k_2} = \begin{cases} \dfrac{2Cos\dfrac{(\beta_2+\beta_1)((k_1-k_2))}{2}Sin\dfrac{(\beta_2-\beta_1)((k_1-k_2))}{2}}{\pi(k_1-k_2)}, & k_1 \neq k_2, \\ \dfrac{\beta_2-\beta_1}{\pi}, & k_1 = k_2. \end{cases} \qquad (21)$$

В частном случае, при значениях

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5,$$

что соответствует одинаковой важности составляющих функционалов в (15) и (16), имеем

$$Y = A_\alpha \Phi A_\beta, \qquad (22)$$

тем самым, результат, полученный в [6], является частным случаем предлагаемого метода.

Вариационный принцип (15), (16) обеспечивает построение такой аппроксимации трансформант Фурье исходного изображения, при которой спектр $|F^Y(u,v)|$ полученного изображения в области Ω практически совпадает со спектром $|F^\Phi(u,v)|$ исходного изображения, а вне области Ω близок к нулю в смысле минимума указанных функционалов.

Очевидно, что такой подход соответствует постановке задачи оптимальной частотной фильтрации изображений в заданной частотной области. Определенный таким образом спектр не допускает растекания энергии изображения за пределы частотного субинтервала Ω. Следовательно, выражение (19) определяет метод оптимальной фильтрации изображений на основе частотных представлений и позволяет для нахождения квазициклических компонент изображений, которые полностью определяются энергией исходного изображения в заданном частотном субинтервале, построить вычислительную процедуру, не вычисляя при этом трансформанты Фурье.

Известно [7], что субполосные матрицы также можно представить в виде разложения по их собственным векторам,

$$A_\alpha = Q_\alpha \cdot L_\alpha \cdot Q_\alpha^T, \tag{23}$$

$$A_\beta = Q_\beta \cdot L_\beta \cdot Q_\beta^T, \tag{24}$$

где столбцы матриц Q^α и Q^β составлены из значений собственных векторов матриц A_α и A_β соответственно,

$$Q_\alpha = (\vec{q}_1^{\,\alpha}, \vec{q}_2^{\,\alpha}, \ldots, \vec{q}_M^{\,\alpha}), \qquad Q_\beta = (\vec{q}_1^{\,\beta}, \vec{q}_2^{\,\beta}, \ldots, \vec{q}_M^{\,\beta}),$$

матрицы L_α и L_β – квадратные матрицы, на главной диагонали которых расположены значения их собственных чисел,

$$L_\alpha = diag(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha, \ldots, \lambda_M^\alpha), \qquad L_\beta = diag(\lambda_1^\beta, \lambda_2^\beta, \ldots, \lambda_M^\beta).$$

Будем в дальнейшем считать, что значения собственных чисел упорядочены по убыванию,

$$\lambda_1^\alpha \ge \lambda_2^\alpha \ge \ldots \ge \lambda_M^\alpha, \qquad \lambda_1^\beta \ge \lambda_2^\beta \ge \ldots \ge \lambda_M^\beta.$$

На основании свойств субполосных матриц [7], будем считать, что некоторые величины J_1 и J_2 определяют количество ненулевых собственных чисел субполосных матриц A_α и A_β. Следовательно, для данных матриц можно использовать следующее разложение по собственным векторам,

$$A_\alpha \approx Q_1^\alpha L_1^\alpha Q_1^{\alpha T},$$

$$A_\beta \approx Q_1^\beta L_1^\beta Q_1^{\beta T},$$

где

$$Q_{\alpha 1} = (\vec{q}_1^{\,\alpha}, \vec{q}_2^{\,\alpha}, \ldots, \vec{q}_{J_1}^{\,\alpha}), \qquad Q_{\beta 1} = (\vec{q}_1^{\,\beta}, \vec{q}_2^{\,\beta}, \ldots, \vec{q}_{J_2}^{\,\beta}),$$

$$L_{\alpha 1} = diag(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha, \ldots, \lambda_{J_1}^\alpha), \qquad L_{\beta 1} = diag(\lambda_1^\beta, \lambda_2^\beta, \ldots, \lambda_{J_2}^\beta).$$

С учетом ненулевых собственных чисел субполосных матриц A_α и A_β выражение для определения результата оптимальной фильтрации принимает вид

$$Y = (1-\gamma_1)(\gamma_1 I + (1-2\gamma_1)Q_{1\alpha}L_{1\alpha}Q_{1\alpha}^T)^{-1}Q_{1\alpha} \cdot L_{1\alpha}Q_{1\alpha}^T \Phi Q_{1\beta}L_{1\beta} \cdot$$
$$\cdot Q_{1\beta}^T(\gamma_2 I + (1-2\gamma_2)Q_{1\beta}L_{1\beta}Q_{1\beta}^T)^{-1}(1-\gamma_2), \tag{25}$$

или

$$Y = C_1 \Phi C_2, \tag{26}$$

где

$$C_1 = (1-\gamma_1)(\gamma_1 I + (1-2\gamma_1)Q_{1\alpha}L_{1\alpha}Q_{1\alpha}^T)^{-1}Q_{1\alpha}L_{1\alpha}Q_{1\alpha}^T, \tag{27}$$

$$C_2 = Q_{1\beta}L_{1\beta}Q_{1\beta}^T(\gamma_2 I + (1-2\gamma_2)Q_{1\beta}L_{1\beta}Q_{1\beta}^T)^{-1}(1-\gamma_2). \tag{28}$$

В случае, когда частотная область разбита на $R_1 x R_2$ равновеликих частотных субинтервалов, то результат оптимальной фильтрации в частотном субинтервале $\Omega_{r_1 r_2}$ [7] имеет вид

$$Y = C_{r_1} \Phi C_{r_2}, \tag{29}$$

где

$$C_{r_1} = (1-\gamma_1)(\gamma_1 I + (1-2\gamma_1)Q_{1r_1}L_{1r_1}Q_{1r_1}^T)^{-1}Q_{1r_1}L_{1r_1}Q_{1r_1}^T, \tag{30}$$

$$C_{r_2} = Q_{1r_2}L_{1r_2}Q_{1r_2}^T(\gamma_2 I + (1-2\gamma_2)Q_{1r_2}L_{1r_2}Q_{1r_2}^T)^{-1}(1-\gamma_2). \tag{31}$$

Выражения (19) и (25) определяют новый инструмент выделения квазициклических компонент изображений, которые полностью определяются энергией исходного изображения в заданном частотном субинтервале, на основе частотных представлений, не использующий прямое и обратное преобразования Фурье.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры для инновационной России» на 2009-2013 годы, гос. контракт № 14.740.11.0390 и гранта РФФИ 10-07-00266.

Литература

1. Сойфер, В. А. Методы компьютерной обработки изображений [Текст] / В. А. Сойфер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 784 с.
2. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений [Текст] / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2006. – 1072 с.
3. Рабинер, Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов [Текст] / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – М.: Мир, 1978. – 327 с.
4. Жиляков, Е. Г. Методы анализа и построения функций по эмпирическим данным на основе частотных представлений [Текст] / Е. Г. Жиляков. – Белгород: изд-во БелГУ, 2007. – 160 с.
5. Жиляков, Е.Г. Вариационные методы анализа сигналов на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жиляков, С.П. Белов, А.А. Черноморец // Вопросы радиоэлектроники, Сер. ЭВТ. - 2010. - Вып. 1. - С. 10-25.
6. Жиляков, Е.Г. Оптимальная фильтрация изображений на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жиляков, А.А. Черноморец // Вопросы радиоэлектроники, , Сер. ЭВТ. - 2008. - Вып. 1. - С. 118-131.
7. Черноморец, А.А. О свойствах собственных векторов субполосных матриц [Текст] / А.А. Черноморец, Е.И. Прохоренко, В.А. Голощапова // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2009. – № 7 (62). – Вып. 10/1. – С. 122-128.

METHOD OF IMAGE QUASICYCLIC COMPONENTS FILTERING BASED ON ITS ENERGY IN GIVEN FREQUENCY SUBINTERVALS

A. A. CHERNOMORETS
O. N. IVANOV

Belgorod National Research University

e-mail: chernomorets@bsu.edu.ru

In this work we propose the method of image quasicyclic components filtering which is optimal in terms of spectral approximation with adaptively weighted componets of the functional.

Key words: image, Furier transformants, frequency subinterval, quasicyclic components, optimal filtration.