УДК 519.614: 512.643.5

О СВОЙСТВЕ СУБПОЛОСНЫХ МАТРИЦ И ИХ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

С. В. ТУЯКОВ

Белгородский государственный университет

e-mail: student_pf@mail.ru

В работе рассматривается свойство подобия субполосных матриц. Выводится свойство собственных векторов подобных субполосных матриц.

Ключевые слова: субполосная матрица, собственный вектор, доля энергии.

Постановка задачи

Очевидно, что рассмотрение вычисления долей энергии отрезка (вектора) дискретизованных по аргументу значений исследуемых функций имеет самостоятельный интерес, особенно в связи с тем, что современные системы регистрации эмпирических данных предполагают использование дискретизации и компьютерных технологий для обработки эмпирических данных.

Вычисление точных значений долей энергии отрезка эмпирических данных в выбранных частотных интервалах

В монографии [1] приводится метод вычисления точных долей энергии отрезка эмпирических данных в выбранных частотных интервалах. Особенностью приведенного метода является то, что все вычисления производятся во временной области, без явного перехода в частотную область. В основе метода лежит применение матриц. В монографии предложено именовать данные матрицы субполосными.

Вычисление части энергии сигнала в заданном частотном интервале осуществляется по следующей формуле (1) [1]:

$$P_r = \vec{f}^{\,T} A_r \vec{f}\,, \tag{1}$$

где $\vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_N)^T$ – вектор эмпирических данных, T – знак транспонирования. $A_r = \{a^r_{i,k}\}$ с элементами вида (2):

$$a^r_{ik} = \frac{\sin[r\frac{\pi}{R}(i-k)] - \sin[(r-1)\frac{\pi}{R}(i-k)]}{\pi(i-k)}, \tag{2}$$

где $i,k = 1,...,N, r = 1,...,R$.

Используется нормированная область частот $\omega \in [0;\pi]$.Частотная область $[0;\pi]$ разбивается на R одинаковых частотных интервалов. A_r – субполосная матрица.

Вычисление приближенных значений долей энергии отрезка эмпирических данных в выбранных частотных интервалах

Субполосные матрицы являются симметричными и неотрицательно определенными. Поэтому каждая матрица обладает полной системой ортогонормальных собственных векторов, соответствующих неотрицательным собственным числам и удовлетворяющих соотношениям:

$$\lambda_{kr}\overrightarrow{q_{kr}} = A_r\overrightarrow{q_{kr}};$$
$$\left(\overrightarrow{q_{kr}}, \overrightarrow{q_{ir}}\right) = 1, i = k;$$
$$\left(\overrightarrow{q_{kr}}, \overrightarrow{q_{ir}}\right) = 0, i \neq k;$$

$$A_r = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{kr} \overrightarrow{q_{kr}}\, \overrightarrow{q_{kr}}^T = GLG^T ; \qquad (3)$$

$$G = \left\{ \overrightarrow{q_{kr}} \right\}, k = 1,...,N ; \qquad (4)$$

$$L = diag(\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, ..., \lambda_{Nr}) .$$

Значения собственных чисел находятся в диапазоне:

$$0 < \lambda_{kr} \le 1, k = 1,...,N .$$

Вычисления [1] показывают, что величина собственных чисел, индексы которых превосходят значение

$$J_r = 2[N / 2R_r] + 4 = M + 4,$$

пренебрежимо мала по сравнению с единицей (квадратные скобки означают целую часть числа). На основании данного результата представление (3) можно заменить следующей аппроксимацией

$$A_r \approx \sum_{k=1}^{J_r} \lambda_{kr} \overrightarrow{q_{kr}}\, \overrightarrow{q_{kr}}^T = G_{mr} L_{mr} G_{mr}^T . \qquad (5)$$

Здесь

$$L_{mr} = diag(\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, ..., \lambda_{J_r r}),$$

и соответствующим образом сокращено (исключено) количество столбцов в матрице из собственных векторов вида (4).

Подстановка правой части соотношения (5) в представление (1) позволяет получить формулу, пригодную для упрощения вычислений приближенных значений искомой части энергии исходного вектора, попадающей в выбранный частотный интервал

$$P_r \approx P_{Jr} = \sum_{k=1}^{J_r} \lambda_{kr} \alpha_{kr}^2 , \qquad (6)$$

где $\alpha_{kr} = \left(\vec{f}, \overrightarrow{q_{kr}}\right)$, то есть речь идет о соответствующих скалярных произведениях или проекциях на собственные векторы.

Свойство субполосных матриц и их собственных векторов

Для вычисления долей энергии вектора во всех частотных интервалах потребуется произвести расчеты по формуле (6) для каждого частотного интервала.

Было установлено, что определенные субполосные матрицы являются подобными. Данное свойство позволяет уменьшить количество операций умножения в расчетах.

Для определенности будем считать, что мы разделили частотную полосу на четное количество частотных интервалов:

$$R = 2n, n \in N .$$

Теперь рассмотрим выражения для элементов субполосных матриц, равноудаленных от оси $\omega = \pi / 2$:

$$a_{ik}^p = \frac{\sin[p\frac{\pi}{R}(i-k)] - \sin[(p-1)\frac{\pi}{R}(i-k)]}{\pi(i-k)},$$

$$a_{ik}^{R-(p-1)} = \frac{\sin[(R-(p-1))\frac{\pi}{R}(i-k)] - \sin[(R-p)\frac{\pi}{R}(i-k)]}{\pi(i-k)}, \qquad (7)$$

где $p = 1,...,n$.

Выражение (7) можно преобразовать к следующему виду:

$$a_{ik}^{R-(p-1)} = \cos\left[\pi\left(i-k\right)\right]\frac{\sin[p\frac{\pi}{R}(i-k)]-\sin[(p-1)\frac{\pi}{R}(i-k)]}{\pi(i-k)}.$$

Очевидно, что

$$\cos\left[\pi\left(i-k\right)\right]=\left(-1\right)^{|i-k|}.$$

Последнее равенство позволяет записать следующее соотношение

$$A_p = B^{-1}A_{R-(p-1)}B, \tag{8}$$

где

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{N-1} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\det(B)=(-1)^N \neq 0,$$

$$B^{-1}=B,$$

$$B^{-1}B=I, \tag{10}$$

где I – единичная матрица.

Соотношение (8) говорит о том, что матрицы A_p и $A_{R-(p-1)}$ – подобны. Известно [2], что у подобных матриц собственные значения совпадают.

Свойство подобия субполосных матриц A_p и $A_{R-(p-1)}$ позволяет определить очень интересное свойство собственных векторов данных матриц, соответствующих одному и тому же собственному числу.

Пусть нам даны субполосные матрицы A_p и $A_{R-(p-1)}$. Кроме того дан собственный вектор $\overrightarrow{q_{kp}}$ матрицы A_p, соответствующий собственному числу λ_{kp}:

$$\lambda_{kp}\overrightarrow{q_{kp}} = A_p\overrightarrow{q_{kp}}. \tag{11}$$

Умножим обе части равенства (11) слева на матрицу B вида (9):

$$B\lambda_{kp}\overrightarrow{q_{kp}} = BA_p\overrightarrow{q_{kp}}.$$

Учитывая свойство (10), получим

$$\lambda_{kp}B\overrightarrow{q_{kp}} = A_{R-(p-1)}B\overrightarrow{q_{kp}}.$$

Обозначим через

$$\overrightarrow{q_{k\,R-(p-1)}} = B\overrightarrow{q_{kp}}$$

и окончательно получаем

$$\lambda_{kp}\overrightarrow{q_{kR-(p-1)}} = A_{R-(p-1)}\overrightarrow{q_{kR-(p-1)}}. \tag{12}$$

Последнее равенство (12) говорит о том, что $\overrightarrow{q_{k\,R-(p-1)}}$ является собственным вектором субполосной матрицы $A_{R-(p-1)}$, соответствующий тому же собственному числу λ_{kp}, что и собственный вектор $\overrightarrow{q_{kp}}$ субполосной матрицы A_p.

Остается заметить, что значения собственных векторов $\overrightarrow{q_{kR-(p-1)}}$ и $\overrightarrow{q_{kp}}$ субполосных матриц $A_{R-(p-1)}$ и A_p соответственно, соответствующие одному и тому же собственному числу λ_{kp}, отличаются только знаком при четном индексе:

$$q_{kR-(p-1)}(i) = (-1)^{i-1} q_{kp}(i), i = 1,...,N. \tag{13}$$

Данное свойство (13) позволяет уменьшить количество требуемых операций умножения в расчетах.

Кроме того свойство (13) позволяет определять собственные векторы субполосных матриц с параметром $p = n+1,...,2n$ на основе собственных векторов субполосных матриц с параметром $p = 1,...,n$. Другими словами мы может не находить и не хранить непосредственно собственные векторы и собственные числа субполосных матриц с параметром $p = n+1,...,2n$.

Чтобы продемонстрировать выигрыш в расчетах на основе свойства (13) собственных векторов, рассмотрим для определенности расчет долей энергии вектора в первом и последнем частотном интервалах:

$$P_1 \approx P_{J_1} = \sum_{k=1}^{J_1} \lambda_{k1} \alpha_{k1}^2,$$

где

$$\alpha_{k1} = \left(\vec{f}, \overrightarrow{q_{k1}}\right)$$

и

$$P_R \approx P_{J_R} = \sum_{k=1}^{J_R} \lambda_{kR} \alpha_{kR}^2,$$

где

$$\alpha_{kR} = \left(\vec{f}, \overrightarrow{q_{kR}}\right).$$

Очевидно, что $\overrightarrow{q_{k1}}$ и $\overrightarrow{q_{kR}}$ для $k = 1,...,J_1 = J_R$ удовлетворяют свойству (13). Поэтому, достаточно исходный вектор $\vec{f}$ разделить на два подвектора, один из которых состоит из значений исходного вектора с нечетными индексами, а другой – с четными. Пусть размерность исходного вектора N – есть четное число. Тогда

$$\vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_N) = \overrightarrow{{}_1 f} + \overrightarrow{{}_2 f},$$

где

$$\overrightarrow{{}_1 f} = (f_1, 0, f_3, 0, f_5, 0, ..., 0, f_{N-1}, 0),$$

$$\overrightarrow{{}_2 f} = (0, f_2, 0, f_4, 0, f_6, 0, ..., 0, f_N).$$

Аналогично с собственными векторами $\overrightarrow{q_{k1}}, k = 1,...,J_1$:

$$\overrightarrow{q_{k1}} = (q_{k1,1}, q_{k1,2}, q_{k1,3}, ..., q_{k1,N}) = \overrightarrow{{}_1 q_{k1}} + \overrightarrow{{}_2 q_{k1}},$$

где

$$\overrightarrow{{}_1 q_{k1}} = (q_{k1,1}, 0, q_{k1,3}, 0, ..., 0, q_{k1,N-1}, 0),$$

$$\overrightarrow{{}_2 q_{k1}} = (0, q_{k1,2}, 0, q_{k1,4}, 0, ..., 0, q_{k1,N}),$$

$$k = 1,...,J_1.$$

Запишем формулу для коэффициентов α_{k1}:

$$\alpha_{k1} = \left(\vec{f}, \overrightarrow{q_{k1}}\right) = \left(\overrightarrow{{}_1 f}, \overrightarrow{{}_1 q_{k1}}\right) + \left(\overrightarrow{{}_2 f}, \overrightarrow{{}_2 q_{k1}}\right). \tag{14}$$

Выражение для коэффициентов для α_{kR}:

$$\alpha_{kR} = \left(\vec{f}, \overrightarrow{q_{kR}}\right) = \left(\overrightarrow{{}_1f}, \overrightarrow{{}_1q_{k1}}\right) - \left(\overrightarrow{{}_2f}, \overrightarrow{{}_2q_{k1}}\right). \qquad (15)$$

Формулы (14) и (15) собственно и демонстрируют выигрыш в расчетах. Теперь вместо вычисления $2NJ_1$ операций умножения потребуется NJ_1 операций умножения.

Заключение

Таким образом, свойство подобия субполосных матриц позволило выявить очень интересное свойство их собственных векторов. Данное свойство собственных векторов позволяет уменьшить вычислительную сложность алгоритма вычисления приближенных значений долей энергии отрезка эмпирических данных во всей частотной оси в два раза. Кроме того, нет необходимости находить и хранить непосредственно собственные векторы и собственные числа субполосных матриц из второй половины частотной оси.

Литература

1. Е.Г. Жиляков. Вариационные методы анализа и построения функций по эмпирическим данным [Текст]: монография / Е.Г. Жиляков. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2007. – 160 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц [Текст] / Гантмахер Ф.Р. – 5-е изд. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2004. – 560 с. – ISBN 5-9221-0524-8.

ON THE PROPERTY SUBBAND MATRIXES AND THEIR EIGENVECTORS

S. V. TUYAKOV

Belgorod State University

e-mail: student_pf@mail.ru

In work property of similarity of subband matrixes is considered. Property of eigenvectors of similar subband matrixes is deduced.

Key words: subband matrix, eigenvector, part of power.