УДК 519.2+539.1

# ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ В ВОЗМУЩЁННОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

**А.С. Мазманишвили**

Сумской государственный университет,
г. Сумы, Украина, e-mail: mazmanishvili@gmail.com

**Аннотация.** Рассмотрено эволюционное уравнение Шредингера с параболическим потенциалом, центр которого произвольным образом изменяется во времени.

**Ключевые слова:** уравнение Шредингера, параболический потенциал.

## 1. Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается квантово-механическая задача о временнóй эволюции частицы в квадратичном потенциале, центр которого смещается произвольным образом во времени, описываемом посредством некоторая квадратично-интегрируемой функции $U(t)$. Такая постановка задачи возникает в физических задачах, например, в том случае, когда смещение $U(t)$ представляет собой траекторию случайного процесса, моделирующего искажения потенциала в процессе движения частицы. Такое положение реализуется, в частности, при изучении движения электрона достаточно большой энергии через кристалл вдоль одной из его кристаллических осей (см., например, [2, 3]). В этом случае роль времени $t$ в изучаемой нами задачи играет глубина проникновения частицы. Функция же $U(t)$, описывающая смещение центра потенциала описывает естественные случайные искажения кристаллической решётки.

Математическая постановка задачи состоит в следующем. Пусть $U(t)$ – квадратично-интегрируемая функция и

$$V(x,t) \;=\; \frac{1}{2}m\omega^2\left[x-U(t)\right]^2\,, \quad m,\omega=\mathrm{const} \tag{1}$$

– изменяющийся во времени потенциал. Пусть далее $\Psi=\Psi(x,t;x_0,t_0)$ – квадратично-интегрируемая на $L_2(\mathbb{R})$ функция, которая подчинена уравнению Шредингера [1]

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2\left[x-U(t)\right]^2\,, \tag{2}$$

где $\hbar$ – так называемая постоянная Планка, и удовлетворяет начальному условию

$$\Psi(x,t_0,x_0,t_0) \;=\delta(x-x_0)\,. \tag{3}$$

Функция $\Psi$ является функцией Грина для уравнения (2). С точки зрения квантовой механики эта функция представляет собой так называемую амплитуду перехода из состояния в момент $t=t_0$, характеризуемого координатой $x_0$, в состояние в момент $t$, характеризуемого координатой $x$.

## 2. Решение начально-краевой задачи

Будем искать решение уравнения (2) в виде

$$\Psi(x,t;x_0,t_0) \; = \; \exp\left(C_0(t)+C_2(t)x+C_2(t)x^2\right) \tag{4}$$

с некоторыми зависящими от времени функциями $C_0(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$ (см. [3]). Эти функции выбираются таким образом, чтобы удовлетворить уравнению Шредингера и начальному условию (3). В силу единственности решения начально-краевой задачи, построенная таким образом функция (4) будет искомым решением. Так как

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \Psi\left(\dot{C}_0(t)+x\dot{C}_1(t)+x^2\dot{C}_2(t)\right),$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \Psi\left(\dot{C}_1(t)+2x\dot{C}_2(t)\right),$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \Psi\left[\left(\dot{C}_1(t)+2x\dot{C}_2\right)^2+2C_2(t)\right],$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени $t$, то подстановка функции (4) в уравнение (2) приводит,

$$-i\hbar\left(\dot{C}_0+x\dot{C}_1+x^2\dot{C}_2(t)\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(C_1(t)+2xC_2(t)\right)^2+2C_2(t)\right]+\frac{1}{2}m\omega^2\left[x-U(t)\right]^2.$$

Вследствие требования тождественного совпадения получающихся в правой и левой частях уравнения квадратных трёхчленов, получаем следующую систему трёх обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $C_0(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$

$$\begin{aligned} -i\hbar\,\dot{C}_0 &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[2C_2+C_1^2\right]+\frac{1}{2}m\omega^2U^2(t)\,,\\ -i\hbar\,\dot{C}_1 &= -\frac{2\hbar^2}{m}\,C_1C_2-m\omega^2U(t)\,,\\ -i\hbar\,\dot{C}_2 &= -\frac{2\hbar^2}{m}\,C_2^2+\frac{1}{2}\,m\omega^2\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Начальное условие к этой системе уравнений находится сравнением Фурье-образов функции (3)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi(x,0)e^{-ikx}dx = e^{-ikx_0}$$

и предельного при $t\to+0$ выражения функции (4) (необходимо чтобы $C_2(t)<0$)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(C_0(t)+xC_1(t)+x^2C_2(t)\right)e^{-ikx}dx = \sqrt{\frac{\pi}{|\,C_2(t)|}}\,\exp\left(C_0(t)-\frac{(C_1(t)-ik)^2}{4|C_2(t)|}\right).$$

Отсюда получаем условие

$$\lim_{t\to+0}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{|C_2(t)|}\right)+C_0(t)-\frac{(C_1(t)-ik)^2}{4|C_2(t)|}\right]=-ikx_0\,.$$

Система уравнений (5) элементарно решается виду того, что допускает расцепление искомых функций – сначала решается уравнение для $C_2(t)$ разделением переменных, затем решается линейное уравнение для $C_1(t)$ с уже найденной функцией $C_2$ и, наконец, интегрированием на основе найденных функций $C_1$ и $C_2$ вычисляется $C_0$. В результате, такой процедуры решения получаем следующее решение уравнения (2)

$$\begin{aligned}\Psi(x,t;x_0,0) \;=\; &\left(\frac{me^{i\omega t}}{\pi\hbar(e^{2i\omega t}-1)}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2-x_0^2)\right)\times\\ &\times\exp\left(-\frac{im\omega^2}{2\hbar}\int_0^t U^2(\tau)\,d\tau+\frac{i\hbar}{2m}\int_0^t Z^2(\tau)\,d\tau+xZ(t)\right)\times\\ &\times\exp\left(-\frac{im\omega}{\hbar(e^{2i\omega t}-1)}\left[x-x_0e^{i\omega t}-\frac{\hbar}{m}\int_0^t Z(\tau)\,\exp(i\omega(t-\tau))\,d\tau\right]^2\right)\,,\end{aligned}\tag{6}$$

где

$$Z(\tau)\;=\;\frac{im\omega^2}{\hbar}\int_0^\tau U(\tau')\,\exp\left(-i\omega(\tau-\tau')\right)\,d\tau'\,.\tag{7}$$

Решение $\psi(x,t)$ уравнения (2) с произвольным начальным условием $\psi(x_0,0)$ в момент $t=0$, находится на основе найденной функции Грина по формуле

$$\psi(x,t)\;=\;\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x_0,0)\,\Psi(x,t;x_0,0)\,dx_0\,,\tag{8}$$

аналогичным соотношению Смолуховского-Коломогорова-Чепмена [4, 5]. В частности, вычисляя интеграл (8) с ядром $\Psi(x,t;x_0,0)$ (6) и начальной волновой функцией

$$\psi(x_0,0)\;=\;\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)^{1/2}\,,\tag{9}$$

получим

$$\psi(x,t)\;=\;\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-i\frac{m\omega^2}{2\hbar}J+\frac{m\omega}{2\hbar}\left[x-\omega\int_0^t U(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau\right]^2\right)\,,\tag{10}$$

где $J$ – набег фазы результирующей волновой функции

$$J\;=\;\int_0^t U^2(\tau)\,d\tau+\frac{\hbar t}{m\omega}-2x\int_0^t U(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau\,+$$

$$+ \int_0^t U(\tau_1)\, \sin\omega(\tau_1 - t)\, d\tau_1 \int_0^t U(\tau_2)\, \cos\omega(\tau_2 - t)\, d\tau_2 \,.$$

Если при $t = 0$ частица находилась в состоянии с волновой функцией (9), то к моменту времени $t$ для плотности вероятностей $p(x,t)$ найдем

$$p(x,t) \;=\; \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0\, \psi(x_0, 0)\, \Psi(x, t; x_0, 0) \right|^2 \;= \tag{11}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{m\omega}{\hbar} \left[ x - \omega \int_0^t U(\tau)\, \sin(\omega(t-\tau))\, d\tau \right]^2 \right\}.$$

## 3. Заключение

Для того чтобы понять в чём существенно проявляется действие смещения $U(t)$ центра потенциала на временну́ю эволюцию частицы, вычислим квантовомеханическое среднее значение координаты и её дисперсии. Первый момент плотности распределения вероятностей $p(x,t)$ имеет вид

$$\langle x(t) \rangle \;=\; \omega \int_0^t U(\tau) \sin(\omega(t-\tau))\, d\tau \,, \tag{12}$$

а соответствующая ему дисперсия –

$$\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \;=\; \frac{\hbar}{2m} \,. \tag{13}$$

Формула (13) показывает, что смещение центра потенциала не оказывает влияние на расплывание волнового пакета, дисперсия волнового пакета остаётся постоянной и независящей от $U(t)$. С другой стороны, из формулы (12) видно, что, как и в классической механике, возможно явление резонанса. Достаточно выбрать сделать функцию $U(t)$ периодической с частотой, совпадающей с собственной частотой $\omega$, связанной с потенциалом и произойдёт линейное по времени нарастание амплитуды колебаний среднего смещения частицы. Например, при $U(t) \sim \sin\omega t$ имеем

$$\int_0^t \sin\omega\tau \sin(t-\tau)\omega\, d\tau = \frac{1}{2}(\sin\omega t - t\cos\omega t) \,.$$

То же самое происходит в общем случае, наличие гармоники с частотой $\omega$ в функции $U(t)$ приводит к неограниченному нарастанию размаха колебаний.

## Литература


1. Соколов А.А., Лоскутов Ю.И., Тернов И.М. Квантовая механика / А.А. Соколов, Ю.И. Лоскутов, И.М. Тернов. – М.: Наука, 1962. – 591 с.

2. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе / А.И. Ахиезер, Н.Ф. Шульга. – М.: Наука, 1993. – 344 с.

3. Барышевский В.Г. Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях / В.Г. Барышевский. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

4. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач / А.С. Мазманишвили. – К.: Наукова думка, 1987. – 224 с.

5. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику / С.М. Рытов. – М.: Наука, 1979. – 404 с.

6. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.


## WAVE FUNCTIONS IN THE PERTURBED PARABOLIC POTENTIAL

**Mazmanishvili A.S.**

Sumy State University,
Sumy, Ukraine, e-mail: mazmanishvili@gmail.com

**Abstract.** The evolution Schrödinger equation with the parabolic potential is studied. The center of the potential is varied in time by an arbitrary way.

**Key words:** Schrödinger's equation, parabolic potential.