УДК 517.927

О ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ

Ю.В. Покорный, **Н.Н. Рябцева**

Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия

Аннотация. Устанавливаются аналоги классической теоремы Якоби о положительной определённости второй вариации для функционала, заданного на функциях от ветвящегося аргумента из пространственной сети (геометрического графа). Функционал аналогичен функционалу из задачи Больца. Особенности соответствующего аналога уравнения Якоби (как и уравнения Эйлера) порождены процедурой интегрирования по частям, приводящей к дифференцированию по склеенным (состыкованным) мерам.

Ключевые слова: геометрический граф, вариации функционала, склеенные меры, положительная определённость.

При анализе задач вариационного происхождения для объектов сетеподобной структуры (типа геометрического графа) неизбежно столкновение с трудностями, порождаемыми неоднозначным толкованием используемых на сети интегралов, которые объединяют исходную систему в цельный объект. Дело в том, что в рамках основополагающей для вариационного подхода процедуры интегрирования по частям используемые интегралы, которые являются по существу интегралами Стильтьеса, меняют смысл, так как меняется характер порождающих их мер. Уже для функций скалярного аргумента на отрезке $[a;b]$ корректность равенства

$$\int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du = \big[uv\big]_a^b \qquad \big(= u(b)v(b) - u(a)v(a)\big) \tag{1}$$

зависит от гладкости u, v и от толкования интеграла. Если хотя бы одна из функций $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ непрерывна, а другая принадлежит $BV[a;b]$, т.е. имеет ограниченную вариацию, то равенство (1) верно при трактовке интегралов по Риману-Стилтьесу. Расширение понятия суммируемости с риманова до лебегова допускает разрывы одновременно у обеих функций.

Деликатность ситуации заключается в том, что оба интеграла слева в (1) могут оказаться различными по существу: если в первом из них $\int_a^b u\,dv$ функция $v(x)$ определяет меру, по которой происходит интегрирование, и в каждой точке $s \in (a;b)$ важны лишь значения левого и правого пределов $v(s-0)$ и $v(s+0)$, задающие меру любого сегмента $\mu[\alpha;\beta] = v(\beta+0) - v(\alpha-0)$, а собственное значение $v(s)$ в этой точке не играет никакой роли, то у интегрируемой функции $u(x)$ именно собственное значение в каждой точке играет определяющую роль. Во втором интеграле $\int_a^b v\,du$ функции $v(x)$ и $u(x)$ меняются ролями: $v(x)$ важна уже поточечными значениями, а $u(x)$ уже задаёт меру, как функцию множества. При этом осмысленность каждого слагаемого слева в равенстве (1) ещё не означает справедливости этого равенства в целом.

Как раз в важнейшем для нас случае, когда исследуемая физическая система состоит из двух смыкающихся одномерных континуумов, и есть потребность ассоциировать их с двумя смыкающимися отрезками $[a;\xi]$ и $[\xi;b]$ (при $a < \xi < b$), что связано со стыковкой в рамках каждого интеграла из (1) двух пар "соседствующих" мер, когда каждая из этих односторонних относительно точки ξ мер как бы наслаивается в точке ξ на соседку. Можно ли результат каждой такой стыковки объединять *единым интегралом на* $[a;b]$ так, чтобы для такого интеграла была верна в целом формула типа (1)?! Именно этот вопрос, в миниатюре, отражает проблемы интегрирования в вариационных задачах на геометрических графах, где во внутренних узлах может стыковаться более чем по два отрезка-ребра.

При обсуждении понятия интегрирования мы пользуемся общепринятой терминологией из [1-3]. Наиболее корректную версию классических вариационных фактов см. в [4]. Уравнения на геометрических графах мы обсуждаем в терминах [5], в основном напоминая их.

Общая природа трудностей, порождаемых обобщённым дифференцированием по "склеенным мерам", обсуждается в [6, 7]. Ниже, мы преодолеваем их стандартными средствами.

1. Отправным объектом обсуждения, далее, является рассмотренный в работе [8] функционал

$$\Phi(u) = \int_\Gamma F(x,u,u')\,dx \quad \left(= \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} F(x,u,u')\,dx \right) . \tag{2}$$

Здесь $u : \Gamma \to \mathbb{R}$, а Γ обозначает геометрический связный граф из $\mathbb{R}^n$, составленный из конечного набора $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ рёбер (интервалов) и совокупности $\mathcal{J}(\Gamma)$ внутренних вершин (узлов) – концов этих интервалов, где они смыкаются. Остальные концы этих интервалов, не вошедшие в $\mathcal{J}(\Gamma)$, мы называем граничными вершинами, обозначая их совокупность через $\partial\Gamma$ и предполагая, что $\partial\Gamma \neq \emptyset$. Мы считаем, что граф Γ ориентирован (это необходимо для придания смысла дифференцированию вдоль рёбер[3]). Начало ребра γ_i, в смысле заданной ориентации, обозначим через a_i а конец – через b_i. Подчеркнём, что каждое ребро Γ является открытым интервалом, т. е. не содержит концов.

Функция $F(x,u,u')$ трёх аргументов определена на $R(\Gamma)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, где $R(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{m}\gamma_i$. Это значит, что второй и третий аргументы F скалярны, изменяясь в $\mathbb{R}$, а первый

[3]Производная понимается в соответствии с [5], т. е. как производная по единичному направлению вдоль ребра от его начала к концу.

– ветвящийся, изменяясь в Γ. Последнее означает, что фактически мы имеем набор $\{F^{(\gamma_i)}(x,u,u')\}$ функций трёх скалярных аргументов, где через $F^{(\gamma_i)}$ мы обозначили сужение F на $\gamma_i\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Будем предполагать, что функция обладает свойством, которое мы назовем C-свойством. Будем говорить, что F обладает C-свойством, если для любого $i=\overline{1,m}$ функция $F^{(\gamma_i)}$ непрерывна на $\gamma_i\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и непрерывно доопределяема на $[\gamma_i]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, где $[\gamma_i]$ – замыкание ребра γ_i. Описанное предположение означает, что для любой равномерно непрерывной на каждом γ_i функции $u(x):\Gamma\to\mathbb{R}$ с аналогичной производной $u'(x)$ формальная запись (2) допускает корректную расшифровку, как сумма интегралов от сужений $F(x,u(x),u'(x))$ на рёбра γ_i.

Мы рассматриваем функционал (2) на функциях, каждая из которых непрерывна на Γ и непрерывно дифференцируема на замыкании $[\gamma_i]$ каждого ребра $\gamma_i\subseteq\Gamma$. Для каждого ребра γ_i рассматриваемое множество функций вполне аналогично стандартному $C^1[\gamma_i]$, так что функционал (2) может считаться определённым на прямой сумме этих пространств. Используя здесь в качестве нормы сумму (по i) обычных норм в $C^1[\gamma_i]$, мы рассматриваем этот функционал на сужении этого пространства, состоящем из непрерывных в целом на Γ функций. Обозначим это пространство через E. Оно оказывается банаховым, т. е. полным, ибо оно является сужением банахова пространства на пересечение гиперплоскостей непрерывных функционалов, порождаемых условиями непрерывных стыковок в $\mathcal{J}(\Gamma)$.

Аналогом классического условия закрепления концов у нас будет условие задания фиксированного набора значений

$$\{u(a)\}_{a\in\partial\Gamma}\ . \tag{3}$$

Множество функций из E с фиксированным набором (3) мы обозначаем далее через $\mathfrak{M}$. Очевидно, $\mathfrak{M}$ есть линейное многообразие в E.

Далее мы будем рассматривать функционал более общего вида, нежели (2), а именно, функционал

$$\Phi_1(u)=\Phi(u)+\sum_{a\in\mathcal{J}(\Gamma)}G_a(u(a))\,, \tag{4}$$

где $G_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $G_a\in C^2(\mathbb{R})$ для любой $a\in\mathcal{J}(\Gamma)$.

Рассмотрим задачу

$$\Phi\to\min_{\mathfrak{M}}\ .$$

Аналогом классической теоремы Эйлера-Лагранжа (см. [4], стр. 35) является следующий факт.

Теорема 1. *Пусть все производные второго порядка функции F обладают C-свойством. Пусть $u_0(x)$ из $\mathfrak{M}$ – точка минимума функционала (4). Пусть $u_0(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на каждом ребре γ_i. Тогда на каждом ребре γ_i для неё справедливо тождество*

$$F_u(x,u_0(x),u_0'(x))-\frac{d}{dx}F_{u'}(x,u_0(x),u_0'(x))=0\,, \tag{5}$$

а в каждой внутренней вершине $a \in \partial(\Gamma)$ справедливо условие

$$- \sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} æ_i(a) F_{u'}^{(\gamma_i)}\left(a, u_0(a), (u_0)'_i(a)\right) + (G_a)'\left(u_0(a)\right) = 0\,. \tag{6}$$

Здесь $\Gamma(a)$ обозначает набор примыкающих к a рёбер. Число $æ_i(a)$ равно 1, если ребро γ_i ориентировано "от a", и равно -1, если γ_i ориентировано "к a". Через $(u_0)'_i(a)$ обозначен предел $(u_0)'(x)$ при x стремящемся к a по ребру γ_i.

□ Пусть E_0 – совокупность таких функций из E, что

$$u\big|_{\partial\Gamma} = 0\,. \tag{7}$$

Рассматривая для любой фиксированной $h \in E_0$ функцию $\varphi(\lambda) = \Phi_1(u_0 + \lambda h)$ скалярного аргумента λ, получим: $\left.\dfrac{d\varphi}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma} \Big(F_u\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big)h(x) + F_{u'}\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big)h'(x)\Big)\, dx\, + \\ + (G_a)'\left(u_0(a)\right) h(a) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Проинтегрируем вторые слагаемые по частям вдоль каждого замыкания $[\gamma_i]$ ребра γ_i. В результате, пользуясь тем, что в граничных вершинах функция h удовлетворяет условиям (7), из (8) мы получим равенство

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\gamma_i} \left(F_u^{(\gamma_i)}\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big) - \frac{d}{dx} F_{u'}^{(\gamma_i)}\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big)\right) h_i(x)\, dx\, +$$

$$+ \sum_{a \in \partial(\Gamma)} \left(- \sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} æ_i(a) F_{u'}^{(\gamma_i)}\big(a, u_0(a), (u_0)'_i(a) + (G_a)\left(u_0(a)\right)'\big)\right) h(a) = 0\,.$$

Отсюда в силу произвола $h \in E_0$ естественно следует (5) и (6). ■

Замечание 1. Предположение о непрерывности второй производной у экстремали $u_0(x)$ нам потребовалось лишь для того, чтобы без помех проинтегрировать по частям (на каждом ребре) интеграл

$$\int\limits_{\gamma_i} F_{u'}^{(\gamma_i)}\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big)h'(x)\ dx = \int\limits_{\gamma_i} F_{u'}^{(\gamma_i)}\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big)\ dh(x)\,,$$

опираясь на дифференцируемость суперпозиции $F_{u'}^{(\gamma_i)}\big(x, u_0(x), u_0'(x)\big)$. (Даже и в этом, достаточно регулярном, случае мы получаем не чистый аналог формулы (1), так как помимо внеинтегральных членов на границе $\partial\Gamma$ у нас появляются внеинтегральные члены и внутри области интегрирования Γ). Если этой дифференцируемости у функции

$F_{u'}(x, u_0(x), u_0'(x))$ нет по причине недостаточной гладкости $u_0(x)$ (или в случае отсутствия непрерывности $F_{u'}$), то естественно использовать классические соображения Дюбуа-Реймона.

Здесь мы воочию сталкиваемся с проблемой интегрирования по частям в рамках интеграла Стильтьеса, когда в проблемных точках (здесь – во внутренних вершинах из $\mathfrak{J}(\Gamma)$) обнаруживаются атомы меры, приводящие к появлению внеинтегральных членов. И условия (6), являясь необходимыми для экстремума функционала, автоматически ликвидируют это малоприятное обстоятельство.

Замечание 2. Условие типа (6) известно для задачи Штурма-Луивилля на графе, естественно возникая в физических задачах, как условие трансмиссии (см., например, [5, стр. 7-8]). В случае классической задачи на отрезке условие (6) (при $G_a = 0$ для всех $a \in \mathfrak{J}(\Gamma)$) в точности совпадает с условием Эрдмана-Вейерштрасса для ломаной экстремали [9, стр. 218], автоматически выполняясь во всех точках гладкости.

Если следовать концепции, разработанной в [5], то систему (5), (6) следует рассматривать как единое уравнение на Γ для функции $u_0(x)$. Поэтому резонно ввести следующие термины.

Определение 1. *Систему (5), (6) будем называть уравнением Эйлера для функционала (4).*

Определение 2. *Решение уравнения Эйлера для функционала (4) будем называть экстремалью этого функционала, а решение этого уравнения, принадлежащее $\mathfrak{M}$, будем называть допустимой экстремалью функционала (4).*

2. Вторая вариация функционала (4) имеет вид:

$$\delta^2\Phi_1(u_0)h = \int\limits_\Gamma \left[M(x)h^2(x) + 2Q(x)h(x)h'(x) + N(x)h'^2(x)\right]dx + \\ + \sum_{a\in\mathfrak{J}(\Gamma)} R_a h^2(a)\,, \tag{9}$$

где

$$M(x) = F_{u'u'}(x, u_o(x), u_0'(x))\,, \quad N(x) = F_{uu}(x, u_0(x), u_0'(x))\,,$$
$$Q(x) = F_{uu'}(x, u_0(x), u_0'(x))\,, \quad R_a = (G_a)''\,(u_0(a))\,.$$

Далее предполагается, что все производные третьего порядка функции F обладают С-свойством.

Теорема 2. *Пусть вторая вариация функционала (4) неотрицательна для всех $h \in E_0$. Тогда $M(x) \geq 0$ на $R(\Gamma) = \bigcup\limits_{i=1}^{m}\gamma_i$.*

□ Проинтегрируем по частям второе слагаемое в правой части (9):

$$\int\limits_\Gamma 2Qhh'dx = \sum_{i=1}^{m}\left[Q_i h^2\right]_{a_i}^{b_i} - \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\gamma_i} Q'h^2\,dx =$$

$$= -\sum_{a\in\partial(\Gamma)}\sum_{\gamma_i\in\Gamma(a)} æ_i(a)Q_i(a)h^2(a) - \int\limits_\Gamma Q'h^2dx\,.$$

Таким образом, равенство (9) примет вид:

$$\delta^2\Phi_1(u_0)h = \int\limits_\Gamma \left(Mh'^2 + (N-Q')h^2\right)dx - \\ - \sum_{a\in\partial(\Gamma)}\left[\sum_{\gamma_i\in\Gamma(a)} æ_i(a)Q_i(a) - R_a\right]h^2(a)\,. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь в (10) $h\in E_j$, где $E_j = \left\{h\in E_0 \,\middle|\; h|_{\Gamma\setminus\gamma_j}\equiv 0\right\}$. Для таких h (10) примет вид:

$$\delta^2\Phi_1(u_0)h = \int\limits_{\gamma_j}\left(M_jh_j'^2 + (N_j - Q'_j)h_j^2\right)dx\,; \tag{11}$$

здесь через h_j обозначено сужение h на γ_j. Таким образом, из неотрицательности функционала (9) для всех $h\in E_0$ вытекает, что

$$\int\limits_{\gamma_j}\left(M_jh_j'^2 + (N_j - Q'_j)h_j^2\right)dx \geq 0 \tag{12}$$

для всех $h_j\in C_0^1[\gamma_j]$, где $C_0^1[\gamma_j] = \{h_j\in C^1[\gamma_j] \mid\; h_j(a_j) = h_j(b_j) = 0\}$. Применяя теперь к неравенству (12) известный результат для квадратичного функционала на отрезке (см., например, [10], часть 1, п. 1.6.2), получим, что $M_j(x)\geq 0$. Поскольку j выбрано произвольно, то это и означает, что $M(x)\geq 0$ на $R(\Gamma)$. ■

Если u_0 – допустимая экстремаль функционала (4), то неравенство

$$F_{u'u'}(x, u_0(x), u_0'(x)) \geq 0\,,$$

выполненное при всех $x\in R(\Gamma)$, естественно называть условием Лежандра на u_0.

3. Далее нас интересуют условия минимума Φ_1 в терминах второй вариации, которая имеет вид квадратичного функционала (9). Нам предстоит построить более глубокий, чем выше, аналог формулы интегрирования по частям.

Необходимое условие минимума $\delta^2\Phi_1(u_0)h \geqslant 0$ (на всех допустимых $h\in E_0$) аналогично классической ситуации приводит нас (см. теорему 2) к неравенству $M(x)\geqslant 0$ на каждом ребре (аналог условия Лежандра). Строгое на $R(\Gamma)$ неравенство $M(x) > \varepsilon > 0$ (где ε – некоторое число) согласно даже скалярной теории недостаточно для неотрицательности квадратичного функционала (9). Желаемое для нас свойство

$$\delta^2\Phi_1(u_0)h > 0 \quad (h\not\equiv 0,\;\; h\in E_0)$$

мы обеспечим вполне аналогично классической теореме Якоби.

Введём в рассмотрение уравнение

$$(Mz')' - 2Qz' + \left(\frac{Q^2}{M} - N\right) z = 0\,, \tag{13}$$

предполагая функции Q, M, N равномерно непрерывными на каждом ребре, причём $\inf M > 0$. Уравнение (13) мы трактуем обычным образом на каждом ребре Γ, а в каждой из внутренних вершин $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$ мы предполагаем непрерывность решения $z : \Gamma \to \mathbb{R}$, а также выполнение следующих условий:

$$\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} æ_i(a) M_i(a) z_i'(a) - R_a z(a) = 0\,. \tag{14}$$

В случае, когда $Q(x) \equiv 0$ и $R_a = 0$ (для всех $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$), т. е. когда функционал (9) имеет самосопряжённый вид

$$\delta^2\Phi_1(u_0)h = \int\limits_\Gamma (Mh'^2 + Nh^2)\,dx\,,$$

как это рассматривается в классической теории при $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$, т. е. в пространстве функций скалярного аргумента, уравнение (13) совпадает со стандартным уравнением Якоби

$$(Mz')' - Nz = 0\,. \tag{15}$$

Определение 3. *Скажем, что функционал (9) удовлетворяет условию Якоби, если уравнение (13) имеет при условиях (14) хотя бы одно строго положительное на $\Gamma \cup \partial\Gamma$ решение.*

Это условие для скалярной (на отрезке) задачи эквивалентно классическому условию Якоби об отсутствии на рассматриваемом отрезке сопряженных к левому концу точек. Для случая общего графа и двучленного уравнения (15) аналогичное условие детально изучено в [5, Гл. 4]. Условие (14) вполне аналогично вводившемуся выше условию трансмиссии (6).

Теорема 3. *Если*
1) $\inf\limits_{x \in R(\Gamma)} M(x) > 0$ *и* $R_a \geqslant 0$ *для всех* $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$,
2) для функционала (9) выполняется условие Якоби,
то функционал (9) строго положителен для любой $h \not\equiv 0$ *из* E_0.

Сформулированная теорема является точным аналогом классической теоремы Якоби, совпадая с ней, если Γ имеет только одно ребро, т. е. является интервалом из $\mathbb{R}^1$.

□ Покажем существование такой функции $g(x)$, что функционал (9) может быть представлен в виде

$$\int\limits_\Gamma M\,(h' + gh)^2\,dx\,. \tag{16}$$

Неотрицательность всех значений последнего функционала очевидна, а равенство его нулю возможно лишь для функции $h_0(x)$, удовлетворяющей тождеству

$$h_0'(x) + g(x)h_0(x) = 0\,.$$

Последнее означает, что h_0 оказывается на каждом ребре Γ решением линейного однородного уравнения, и в силу нулевых значений на $\partial\Gamma$ оказывается тождественным нулём как на ребрах, примыкающих к $\partial\Gamma$, так и, рекуррентно рассуждая, на всех остальных.

Возможность представить (9) в виде (16) у нас появится, если положить

$$g = \frac{Q+\varphi}{M}\,, \tag{17}$$

а в качестве φ взять функцию

$$\varphi = -\frac{Mz'}{z}\,, \tag{18}$$

где z – существующее по условию Якоби строго положительное решение уравнения (13), удовлетворяющее условиям (14). Покажем это.

Вычтя из правой части (9) интеграл, полученный из (16) после замены (17), будем иметь

$$-\int\limits_\Gamma \varphi(h^2)'\,dx + \int\limits_\Gamma (N - Mg^2)h^2dx + \sum_{a\in\,\mathcal{J}(\Gamma)} R_a h^2(a)\,. \tag{19}$$

Проинтегрируем по частям первый из последних двух интегралов (напомним, a_i – начало ребра γ_i, b_i – конец ребра γ_i, в смысле его ориентации):

$$\int\limits_\Gamma \varphi(h^2)'dx = \sum_{i=1}^{m}\left[\varphi_i h^2\right]_{a_i}^{b_i} - \int\limits_\Gamma \varphi' h^2 dx =$$

$$= -\sum_{a\in\,\mathcal{J}(\Gamma)}\ \sum_{\gamma_i\in\,\Gamma(a)} æ_i(a)\varphi_i(a)h^2(a) - \int\limits_\Gamma \varphi' h^2 dx\,.$$

Пользуясь (18), получим отсюда

$$\int\limits_\Gamma \varphi(h^2)'dx = \sum_{a\in\,\mathcal{J}(\Gamma)}\ \sum_{\gamma_i\in\,\Gamma(a)} æ_i(a)\frac{M_i(a)z_i'(a)}{z(a)}h^2(a) - \int\limits_\Gamma \varphi' h^2 dx =$$

$$= \sum_{a\in\,\mathcal{J}(\Gamma)} \frac{h^2(a)}{z(a)} \sum_{\gamma_i\in\,\Gamma(a)} æ_i(a)M_i(a)z_i'(a) - \int\limits_\Gamma \varphi' h^2 dx\,.$$

С учетом условий (14) отсюда получаем

$$\int\limits_\Gamma \varphi(h^2)'dx = \sum_{a\in\,\mathcal{J}(\Gamma)} \frac{h^2(a)}{z(a)}\, R_a z(a) - \int\limits_\Gamma \varphi' h^2 dx =$$

$$= \sum_{a\in \partial(\Gamma)} R_a h^2(a) - \int\limits_{\Gamma} \varphi' h^2 dx\,.$$

Таким образом, выражение (19) принимает вид

$$\int\limits_{\Gamma} (\varphi' + N - Mg^2) h^2\, dx\,.$$

Выражение, стоящее здесь множителем при h^2, после окончательной замены g на выражение (17) примет вид

$$\varphi' + N - \frac{(Q+\varphi)^2}{M},$$

что с учетом (18) может быть записано в виде

$$-\frac{(Mz')'}{z} + 2Q\frac{z'}{z} - \frac{Q^2}{M} + N\,.$$

Это, с точностью до множителя, совпадает с левой частью уравнения (13), оказываясь, стало быть, тождественным нулем. ■

Допустим теперь, что Q' существует и обладает C-свойством, и обратимся к аналогу уравнения Якоби, отличному от (13): к уравнению

$$(Mz')' - (N - Q')z = 0 \tag{20}$$

(на $R(\Gamma)$) при условиях трансмиссии

$$\sum_{\gamma_i\in \Gamma(a)} æ_i(a) M_i(a) z_i'(a) + \left[\sum_{\gamma_i\in \Gamma(a)} æ_i(a) Q_i(a) - R_a \right] z(a) = 0, \quad a \in \partial(\Gamma)\,. \tag{21}$$

Определение 4. *Скажем, что функционал (9) удовлетворяет условию Якоби второго типа, если уравнение (20) при условиях трансмиссии (21) имеет решение без нулей на $\Gamma \cup \partial\Gamma$.*

Теорема 4. *Пусть $\partial\Gamma \neq \emptyset$. Пусть M, Q и N удовлетворяют условиям теоремы 3 и, к тому же, Q' существует и обладает C -свойством. Тогда если функционал (9) удовлетворяет условию Якоби второго типа, то значение этого функционала строго положительно для любой $h \not\equiv 0$ из E_0.*

□ Проинтегрируем в правой части (9) по частям второе слагаемое:

$$\int\limits_{\Gamma} 2Qhh'dx = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\gamma_i} Q(h^2)'dx = \sum_{i=1}^{m} \left[Qh^2 \right]_{a_i}^{b_i} - \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\gamma_i} Q'h^2 dx =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\gamma_i} Q'h^2 dx - \sum_{a\in \partial(\Gamma)} \sum_{\gamma_i\in \Gamma(a)} æ_i(a) Q_i(a) h^2(a)\,;$$

здесь мы учли, что в граничных вершинах функция h равна нулю, так как $h \in E_0$. Таким образом, (9) примет вид:

$$\delta^2\Phi_1(u_0)h = \int\limits_{\Gamma} \left(Mh'^2 + (N - Q')h^2\right) dx +$$

$$+ \sum_{a \in \partial(\Gamma)} \left[R_a - \sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} æ_i(a) Q_i(a) \right] h^2(a)\,.$$

Применим теперь к этому функционалу теорему 3. Уравнение (13) (из теоремы 3) в нашем случае примет вид (20), а условия (14) – вид (21). ■

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М.: ИЛ, 1962.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976.

3. Садовничий В.А. Теория операторов / В.А. Садовничий. – М.: Высшая школа, 1999.

4. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению / Л. Янг. – М.: Мир, 1974.

5. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный. – М.: Физматлит, 2004.

6. Покорный Ю.В. Интеграл Стильтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. РАН. – 1999. – 364;2. – С.167-169.

7. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Об одном классе обобщённых задач Штурма-Лиувилля с разрывными решениями // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы: Тезисы докладов Международной конференции, посвящённой 103-летию со дня рождения И.Г. Петровского (XXI совместное заседание ММО и семинара им. И.Г. Петровского). – , М.: Изд-во МГУ, 2004. – С.166-167.

8. Покорный Ю.В., Покорная И.Ю., Прядиев В.Л., Рябцева Н.Н. Об интегрировании в вариационных неравенствах на пространственных сетях // Математические заметки. – 2007. – 81;6. – С.904-911.

9. Лаврентьев М., Люстерник Л. Основы вариационного исчисления. Т.1, ч. II / М. Лаврентьев, Л. Люстерник. – М.-Л.: ОНТИ, 1935.

10. 10 Покорный Ю.В. Краткий курс математической теории оптимальных задач / Ю.В. Покорный – Воронеж: ОАО "Центрально-черноземное книжное издательство 2007.

ON THE INTEGRATION IN VARIATION INEQUALITIES ON SPATIAL NETWORKS

Yu.V. Pokornyi, N.N. Ryabtseva

Voronezh State University,
Universistetskaya Pl., 1, Voronezh, 494006, Russia

Abstract. The analogue of classical Jacobi theorem about positive definiteness of the second variation for the functional is established. The functional is determined on functions of the ramified argument that has values on a spatial network (geometrical graph). The specific features of the corresponding Euler equation and the Jacobi equation are generated by the procedure of integration by parts. This procedure leads to differentiation in the sense of a agglutinate (snap-together) measures.

Key words: spatial network, differentiation on measure, integral functional, second variation, Euler equation, Jacobi equation, Jacobi theorem.