КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 004.932

ПОВЫШЕНИЕ ЧЕТКОСТИ МАСШТАБИРОВАННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Т.Н. БАЛАБАНОВА
О.Н. ИВАНОВ

Белгородский государственный университет

e-mail: sozonova@bsu.edu.ru

В работе изложен новый метод вычисления производных сигнала по его дискретным значениям, основанный на частотных представлениях, применение данного метода для градиентной обработки цифровых изображений с целью повышения их четкости.

Ключевые слова: дифференцирование, четкость изображения, частотные представления, вариационный принцип.

Одной из задач повышения визуального качества изображений является увеличение его размеров. Такие вопросы обработки изображений достаточно часто возникают при решении различных задач в науке и технике. В качестве примера можно упомянуть увеличение размеров космоснимков при формировании карт земной поверхности, при наблюдении за различными объектами в тех случаях, когда технические средства не позволяют получить изображения достаточно большого размера.

В таких случаях для увеличения размеров изображения используются различные методы интерполяции, наиболее распространенным среди которых является метод интерполяции кубическими сплайнами.

Одной из проблем при увеличении размеров цифровых изображений является недостаточная четкость получаемых масштабированных снимков, что проявляется в смазанных контурах объектов изображения, размытии мелких деталей изображения и т.д. Повысить визуальное качество изображений, в том числе и масштабированных, можно, используя градиентную обработку, которая заключается в комлексировании изображения с его оценками производных. Для оценки производных, как правило, используется дифференцирование с использованием тех или иных операторов над разностями значений функций. Недостатком таких операторов является чувствительность к воздействиям так называемых шумов измерений, что приводит к неустойчивостям получаемых оценок производных. Особенно ярко данный эффект наблюдается при повышении четкости увеличенных в размерах изображений. Таким образом, возникает необходимость разработки иных методов интерполяции и численного дифференцирования дискретных двумерных сигналов, к которым можно отнести цифровые изображения.

В данной работе предлагается иной подход к интерполяции и численному дифференцированию цифровых изображений. В основе таких методов предлагается использовать принцип минимизации евклидовых норм оценок первых производных из класса функций с финитными областями трансформант Фурье, при дополнительных условиях совпадения соответствующих определённых интегралов (формула Ньютона- Лейбница) с разностями зарегистрированных значений исходной функции. Использование таких принципов позволяет получить устойчивые оценки производных, осуществлять интерполяцию сигналов и использовать разработанные методы для масштабирования и увеличения четкости изображений.

Предлагаемый метод основан на использовании известной из математического анализа формулы, позволяющей выразить дифференцируемую функцию через производную (обозначения очевидны):

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x)dx, t > t_0 .$$

Понятно, что при известном начальном значении и известном способе вычисления производной искомая функция также может быть вычислена с любой заранее оговоренной точностью.

Пусть задан вектор $\vec{u} = (u_0, u_1, ..., u_N)^T$ отсчётов дискретного сигнала, где $u_i = u(i\Delta t), i = 1,..., N$, Δt – интервал дискретизации.

Обозначим $\vec{v} = (v_1,...,v_N)^T$, где

$$v_i = u_i - u_{i-1}, i = 1,..., N . \tag{1}$$

Введём частотные интервалы:

$$\Omega = (-\Omega_2, -\Omega_1) \cup [\Omega_1, \Omega_2), \tag{2}$$

$$\overline{\Omega} = [-\overline{\Omega}_2, -\overline{\Omega}_1) \cup [\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2).$$

$$\overline{\Omega}_1 = \Delta t * \Omega_1 = q_1 * \pi; \overline{\Omega}_2 = \Delta t * \Omega_2 = q_2 * \pi . \tag{3}$$

В основе дальнейших построений используется представление интерполирующей функций через производную

$$\hat{u}(t) = u_{i-1} + \int_{(i-1)\Delta t}^{t} f(\tau)d\tau \tag{4}$$

для $\Delta t(i-1) \le t \le i\Delta t$.

Тогда для первых разностей исходных данных должно выполняться равенство:

$$v_i = u_i - u_{i-1} = \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} f(\tau)d\tau , \tag{5}$$

$f(\tau)$- первая производная интерполирующей функции, которая является оценкой первой производной неизвестной функции $u(t)$, выборка из которой обрабатывается.

Для достижения устойчивости оценки первой производной используем представление

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} F(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \tag{6}$$

где $F(\omega)$ – трансформанта Фурье

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau .$$

В качестве области определения трансформанты Фурье предлагается использовать частотный интервал, в котором сосредоточена основная доля энергии сигнала.

Соотношение для интерполирующей функции на основе трансформанты Фурье производной можно получить путем подстановки представления (6) в правую часть (4).

$$\hat{u}(t) = u_{i-1} + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega\in\Omega} F(\omega)(\exp(j\omega t) - \exp(j\omega\Delta t(i-1)))d\omega / j\omega, \qquad (7)$$

так что интерполирующие равенства представимы в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\omega\in\Omega} F(\omega)\frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\omega\Delta t/2}\exp(j\omega\Delta t(i-0{,}5))d\omega = v_i/\Delta t. \qquad (8)$$

Ясно, что такие интерполирующие функции тоже относятся к классу целых. Вместе с тем имеется возможность использовать дополнительные ограничения.

Можно привести достаточно много аргументов использования вариационного принципа

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega\in\Omega}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega = \min.$$

Один из аргументов заключается в целесообразности построения функции с наименьшей в смысле евклидовой нормы производной скорости изменения значений.

Другим важным соображением может служить необходимость повышения устойчивости вычислений к воздействиям случайных ошибок измерений (регуляризация).

Искомое решение вариационной задачи (8),(7) представимо в виде

$$F(\omega) \equiv \sum_{i=1}^{N}\beta_i\frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\omega\Delta t/2}\exp(-j\omega\Delta t(i-0{,}5)). \qquad (9)$$

когда $\omega\in\Omega$, и $F(\omega)\equiv 0$ в противном случае.

Общую формулу для вычисления оценки производной получаем при подстановке по следнего представления в соотношение (6)

$$f(\tau) = \sum_{k=1}^{N}\beta_k * \frac{1}{\pi}\int_{\bar{\Omega}_1}^{\bar{\Omega}_2}\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\cos\left(x\left(\frac{\tau}{\Delta t} - k + 0.5\right)\right)dx. \qquad (10)$$

Коэффициенты β должны удовлетворять системе уравнений (8), на основании чего получаем

$$A\vec{\beta} = \vec{v},$$

где $A = \{a_{ik}\}$ – матрица учета исходных данных (УИД), элементы которой определяются из соотношения

$$a_{ik} = \frac{\Delta t}{\pi}\int_{\bar{\Omega}_1}^{\bar{\Omega}_2}\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\cos(x(i-k))dx; i,k = 1,\ldots,N. \qquad (11)$$

В общем случае матрица УИД может быть особенной, так что для нахождения коэффициентов β необходимо использовать псевдообращение

$$\vec{\beta} = A^{++}\vec{v}, \qquad (12)$$

$$A^{++} = G_1 L_1^{-1} G_2^T, \qquad (13)$$

где G – матрица собственных векторов.

$$AG = GL; G = (\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N),$$

$$L = diag(\lambda_1,...,\lambda_N);$$

$$L_1 = diag(\lambda_1,...,\lambda_P), \quad (14)$$

если

$$\lambda_{P+1} \cong \lambda_{P+2} \cong ... \cong \lambda_N \cong 0, \quad (15)$$

где P – оценка ранга матрицы УИД.

$$G = (\vec{q}_1,...,\vec{q}_P). \quad (16)$$

Если заранее выбрать точки в виде

$$\tau_i = (i-0.5)\Delta t, i = 1,...,N, \quad (17)$$

области определения, где необходимо вычислять оценку производной то из (10) получим

$$f_i = f(\tau_i) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \cos(x(i-k))dx. \quad (18)$$

Или для вектора $\vec{f} = (f_1,..., f_N)^T, f_i = f(\tau_i)$,

$$\vec{f} = B_1 A^{++}\vec{v}, \quad (19)$$

где $B_1 = \{b_{ik}^1\}$,

$$b_{ik}^1 = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \cos(x(i-k))dx. \quad (20)$$

Старшие производные в тех же точках вычисляются на основе дифференцирования выражения (10)

$$\frac{df(\tau)}{d\tau} = f^{(2)}(\tau) = -\sum \beta_k \frac{1}{\pi\Delta t} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} x \sin(x(\frac{\tau}{\Delta t} - k + 0.5))dx. \quad (21)$$

В тех же точках области определения получим

$$B_2 = \{b_{ik}^1\} : b_{ik}^2 = -\frac{1}{\pi\Delta t} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} x \sin(x(i-k))dx. \quad (22)$$

Вектор оценок вторых производных вычисляется на основе соотношения

$$\vec{f}^{(1)} = (f_1^{(1)},..., f_N^{(1)})^T = B_2 A^{++}\vec{v} = B_2\vec{\beta}. \quad (23)$$

В рамках данной работы предлагается использовать новый вариационный метод оценки производных для увеличения четкости масштабированных изображений.

В качестве экспериментальных данных использовались изображения небольшого размера N×M (N, M от 100 до 200 пикселей), содержащие оттенки серого, полученные при помощи цифровой техники. Выбор изображений, содержащих оттенки серого, обусловлен простотой реализации алгоритма для данного вида изображений. При повышении четкости цветных изображений обработке подвергается каждая из отдельных изображений-компонент (RGB).

На первом этапе эксперимента проводилось увеличение размера изображения при помощи вариационного алгоритма интерполяции в K=2, 3, 5 раз [1]. В результате чего изображение получало большие размеры, однако контуры объектов на масштабированном изображении оказывались нечеткими.

На втором этапе эксперимента осуществлялось повышение четкости масштабированного изображения:

Осуществлялось вычисление матриц $B_x = \{b_{ki}\};\ k = 1,...,N;\ i = 1,...,N$ и $B_y = \{b_{ki}\};\ k = 1,...,M;\ i = 1,...,M$ с элементами вида (20) и осуществлялось вычисление второй смешанной производной по выражению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = B_x A^{-1} \cdot f \cdot B_y A^{-1},$$

где $A_y = \{a_{ij}\}$ – матрица с элементами вида (11), f – исходное изображение.

Затем к исходному изображению добавлялось значение второй смешанной производной, то есть

$$\hat{f} = f + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

что позволило получить более четкие, в смысле субъективного восприятия, изображения. Результаты эксперимента представлены на рисунках 1 – 2.

Рис. 1. Исходное изображение

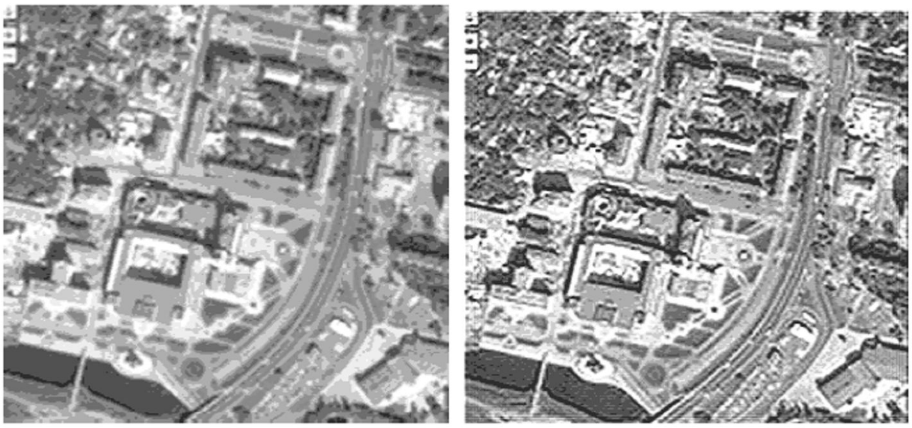

Рис. 2. Масштабированное изображение (слева) и изображение после градиентной обработки (справа)

Рис. 3. Исходное изображение

Рис. 4. Масштабированное изображение

Рис. 5. Масштабированное изображение с повышенной четкостью

По результатам эксперимента видно, что предлагаемый метод повышения визуального качества масштабированных изображений, в частности повышения четкости цифровых изображений, позволяет получить изображения, в которых более четко наблюдаются границы перехода от одного объекта к другому. Так же следует отметить, что повышение четкости масштабированных изображений позволяет увидеть объекты небольшого размера.

Работа выполнена в рамках государственного контракта П2613 Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг.

Литература

1. Жиляков, Е.Г. Вариационный метод оценивания производных и интерполяции сигналов по эмпирическим данным / Т.Н. Созонова, И.Ю. Мисливец// «Вестник ВГУ», сер. Системный анализ и информационные технологии, 2006, № 2. – С. 70-73.

2. К. Де Бор Практическое руководство по сплайнам [Текст]: – М.: Радио и связь, 1985.– 304 с.

3. Ланцош, К. Практические методы прикладного анализа [Текст] : справ. рук. / К. Ланцош ; пер. с англ. М. З. Кайнера. – М. : Физматгиз, 1961. – 524 с.

4. Созонова, Т.Н. Применение вариационных алгоритмов интерполяции и оценки первой производной для некоторых аспектов обработки изображений [Текст]/ Т.Н. Созонова, Н.С. Титова, Н.В. Щербинина // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2008. – № 10 (50). Вып. 8/1. – С. 4 – 12.

5. Хургин, Я. И. Финитные функции в физике и технике [Текст] / Я.И. Хургин, В.П. Яковлев. – М. : Наука, 1971. – 408 с. : ил.

SCALED IMAGES SHARPNESS ENHANCEMENT WITH VARIATIONAL APPROACH TO NUMERICAL DIFFERENTIATION

T.N. BALABANOVA
O.N. IVANOV

Belgorod State University

e-mail:
sozonova@bsu.edu.ru

The paper describes a new method for signal derivatives calculation from its discrete values, based on frequency representations. An application of the method to gradient processing of digital images aimed at increasing sharpness is covered.

Key words: differentiation, image sharpness, frequency representations, variational principle.