УДК 511.512

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТАМИ

Л.Н. Куртова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: lmoskalenko@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассмотрена аддитивная задача теории чисел о числе решений диофантова уравнения,содержащего линейную комбинацию 4-х квадратов. Используя круговой метод, а также на основе оценки для суммы слагаемых в виде сумм Клостермана, получена асимптотическая формула для числа решений.

Ключевые слова: аддитивные задачи теории чисел, число решений, асимптотическая формула, суммы Клостермана.

Введение

В 1927 году А.Е. Ингам поставил и решил элементарным методом задачи получения асимптотических формул для числа решений уравнений:

$$x_1x_2 + x_3x_4 = n\,;$$

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1\,, \quad x_1x_2 \le n\,. \tag{1}$$

Эти задачи получили название аддитивные проблемы делителей.

В 1931 году Т. Эстерман [1] для числа решений $J(n)$ уравнения (1) круговым методом вывел асимптотическую формулу

$$J(n) = nP_2(\ln n) + R(n)\,,$$

где $P_2(t)$ – многочлен степени 2, а $R(n) = O(n^{11/12}\ln^{17/3} n)$.

Оценка остаточного члена этой формулы уточнялась многими авторами. Так в 1979 году Д.И. Исмоилов, развивая метод Т. Эстермана, доказал, что $R(n) = O(n^{5/6+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малая постоянная. Практически одновременно с Исмоиловым другим методом ту же оценку остатка получил Д.Р. Хиз-Браун.

В 1982 году Ж.-М. Дезуйе и Х. Иванец [2], использую оценку суммы сумм Клостермана, доказали, что $R(n) = O(n^{2/3+\varepsilon})$.

В настоящей статье решается задача, родственная проблеме делителей Ингама. Пусть

$$I(n,h) = \sum_{m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2=h} e^{-\frac{m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2}{n}}\,. \tag{2}$$

Основной результат изложен в теореме.

Теорема. *Пусть ε – произвольное положительное число, $n \in N$, h – натуральное число, такое, что $h \equiv 0 \pmod 4$, $h \ll n^{\varepsilon}$. Справедлива асимптотическая формула*

$$I(n,h) = \frac{\pi^2 n}{2} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} G^2(q,l,0) G^2(q,-l,0) + O(n^{7/12+\varepsilon})\,. \qquad (3)$$

Здесь $G(q,l,0) = \sum\limits_{s=1}^{q} \exp(2\pi i l s^2/q)$ *– сумма Гаусса. Сумма особого ряда асимтотической формулы положительна.*

В работе будут использоваться следующие обозначения:

$G(q,l,m) = \sum\limits_{s=1}^{q} \exp(2\pi i(ls^2+ms)/q)$ – сумма Гаусса;

$S(u,v,q) = \sum\limits_{\substack{1\le l\le q,\\(l,q)=1}} \exp(2\pi i(ul+vl^*)/q)$ – сумма Клостермана, где $ll^* \equiv 1 \pmod q$;

$d(n)$ – число представлений n в виде произведения двух множителей;

$\chi(m;\delta,0) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \equiv 0 \pmod \delta\,, \\ 0, & \text{в противном случае}\,; \end{cases}$

$N = [\sqrt{n}]$;

$\dfrac{l''}{q''} < \dfrac{l}{q} < \dfrac{l'}{q'}$ – соседние дроби Фарея, лежащие на отрезке $\left[-\dfrac{1}{N}, 1-\dfrac{1}{N}\right)$, $1 \le l$, $q \le N$, $q' \le N$, $q'' \le N$.

1. Вспомогательные леммы

Лемма 1 (Функциональное уравнение для тета-ряда). *Пусть* $\mathrm{Re}\,\tau > 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\theta(\tau,\alpha) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi\tau(n+\alpha)^2)$. *Тогда*

$$\theta(\tau^{-1},\alpha) = \sqrt{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi\tau n^2 + 2\pi i n\alpha\right).$$

□ Доказательство см. [3, глава I]. ■

Лемма 2. *Пусть h – натуральное число, такое, что $h \ll n^{\varepsilon}$. Тогда справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i h x}}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2}\,dx = \frac{n}{2} + O(n^{\varepsilon})\,.$$

□ Доказательство следует из ([4], глава VI) и условия $h \ll n^{\varepsilon}$. ■

Лемма 3 (Оценка суммы Клостермана). *Пусть* $S(u,v,q) = \sum\limits_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} \exp(2\pi i(ul+vl^*)/q)$ *– сумма Клостермана, где* $ll^* \equiv 1(\mod q)$. *Справедлива оценка*

$$|S(u,v,q)| \le d(q)q^{1/2}(u,v,q)^{1/2}.$$

□ Доказательство см. в [5]. ■

Лемма 4 (Явные формулы для суммы Гаусса).

1. Если $(q_1,q_2)=1$, *то*

$$G(q_1q_2,l,m) = G(q_1,lq_2,m)G(q_2,lq_1,m).$$

2. Если $(q,2l)=1$, *то*

$$G(q,l,m) = \exp\left(-\frac{2\pi i}{q}(4l)^*m^2\right)\left(\frac{l}{q}\right)G(q,1,0),$$

где $(4l)^*4l \equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$ *и* $\left(\frac{l}{q}\right)$ *– символ Якоби.*

3. Если $(q,2)=1$, *то*

$$G(q,1,0) = \begin{cases} \sqrt{q}, & \text{если } q \equiv 1(\mod 4), \\ i\sqrt{q}, & \text{если } q \equiv 3(\mod 4). \end{cases}$$

4.Если $(l,2)=1$, *то*

$$G(2^\alpha,l,0) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = 1, \\ 2^{\alpha/2}(1+i^l), & \text{если } \alpha \text{ – четное число}, \\ 2^{(\alpha+1)/2}\exp\left(\dfrac{2\pi i l}{8}\right), & \text{если } \alpha > 1 \text{ – нечетное число}. \end{cases}$$

5. Пусть A, B *– целые числа,* $(A,2)=1$. *Тогда*

$$G(2,A,B) = 2\chi(B;2,1);$$

$$G(2^\alpha,A,B) = \chi(B;2,0)\exp\left(-\frac{2\pi i}{2^\alpha}A^*\frac{B^2}{4}\right)G(2^\alpha,A,0),$$

где $\alpha \geqslant 2$, $A^*A \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2^\alpha)$.

□ Доказательство см. [6]. ■

Лемма 5 (Оценка суммы сумм Клостермана). *Пусть T, U, V, ε – положительные действительные числа, a_u и b_v – последовательности комплексных чисел, $S(u,v,q)$ – сумма Клостермана. Тогда*

$$\left|\sum_{U\leqslant u\leqslant 2U} a_u \sum_{V\leqslant v\leqslant 2V} b_v \sum_{\substack{q\leqslant T,\\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)}} \frac{1}{q} S(u,v,q)\right| \leqslant cT^{\varepsilon}\left(\frac{1}{p}(UV)^{1/2}+(UVT)^{1/6}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{U\leqslant u\leqslant 2U}|a_u|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{V\leqslant v\leqslant 2V}|b_v|^2\right)^{1/2}.$$

□ Доказательство см. в [7, с. 234]. ■

2. Доказательство теоремы

1. Запишем $I(n,h)$ в виде интеграла

$$I(n,h)=\int\limits_0^1 S_1(\alpha)S_2(\alpha)e^{-2\pi i\alpha h}d\alpha\,,$$

где

$$S_1(\alpha)=\sum_{m_1,\,m_2=-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i\alpha-n^{-1})(m_1^2+m_2^2)}\,,\qquad S_2(\alpha)=\sum_{k_1,\,k_2=-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi i\alpha+n^{-1})(k_1^2+k_2^2)}\,.$$

Пусть $N=[\sqrt{n}]$ и $\xi_{0,1}=\left[-\frac{1}{N},\frac{1}{N}\right)$. Разобьем промежуток $\left[-\frac{1}{N},1-\frac{1}{N}\right)$ числами ряда Фарея, отвечающего параметру N (см. [8, с. 22-23]). Пусть $\frac{l''}{q''}<\frac{l}{q}<\frac{l'}{q'}$ – соседние дроби Фарея, $1\le l,\ q\le N$. Определим промежутки

$$\xi_{l,q}=\left[\frac{l}{q}-\frac{1}{q(q+q'')},\frac{l}{q}+\frac{1}{q(q+q')}\right).$$

Из свойств дробей Фарея следует, что

$$\left[-\frac{1}{N},1-\frac{1}{N}\right)=\bigcup_{q=1}^{N}\ \bigcup_{\substack{l=0,\\ (l,\,q)=1}}^{q-1}\xi_{l,\,q}\,,$$

причем $\xi_{l,\,q}\cap\xi_{l',\,q'}=\varnothing$ при $(l,q)\neq(l',\,q')$.

Тогда

$$I(n,h)=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q}\int\limits_{\xi_{l,q}}S_1(\alpha)S_2(\alpha)e^{-2\pi i\alpha h}d\alpha= \tag{4}$$

$$=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi i\frac{hl}{q}}\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}S_1\left(\frac{l}{q}+x\right)S_2\left(\frac{l}{q}+x\right)e^{-2\pi ihx}dx\,.$$

2. Преобразуем сумму

$$S_1\left(\frac{l}{q}+x\right)=\sum_{m_1,\,m_2=-\infty}^{\infty}e^{(-n^{-1}+2\pi il/q+2\pi ix)(m_1^2+m_2^2)}\,.$$

Справедливы следующие равенства

$$\sum_{m_1,\,m_2=-\infty}^{\infty}e^{(-n^{-1}+2\pi il/q+2\pi ix)(m_1^2+m_2^2)}=\sum_{s_1=1}^{q}e^{2\pi ils_1^2/q}\sum_{\substack{m_1:\\m_1\equiv s_1(\mathrm{mod}\ q)}}e^{(-n^{-1}+2\pi ix)m_1^2}\times$$

$$\times\sum_{s_2=1}^{q}e^{2\pi ils_2^2/q}\sum_{\substack{m_2:\\m_2\equiv s_2(\mathrm{mod}\ q)}}e^{(-n^{-1}+2\pi ix)m_2^2}=$$

$$=\sum_{s_1=1}^{q}e^{2\pi ils_1^2/q}\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\exp((-n^{-1}+2\pi ix)q^2(m_1+s_1/q)^2)\times$$

$$\times\sum_{s_2=1}^{q}e^{2\pi ils_2^2/q}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\exp((-n^{-1}+2\pi ix)q^2(m_2+s_2/q)^2)=$$

$$=\sum_{s_1=1}^{q}e^{2\pi ils_1^2/q}\,\theta\left(\frac{q^2}{\pi}\left(\frac{1}{n}-2\pi ix\right),\frac{s_1}{q}\right)\sum_{s_2=1}^{q}e^{2\pi ils_2^2/q}\,\theta\left(\frac{q^2}{\pi}\left(\frac{1}{n}-2\pi ix\right),\frac{s_2}{q}\right).$$

Используя лемму 1, функции $\theta\left(\frac{q^2}{\pi}\left(\frac{1}{n}-2\pi ix\right),\frac{s_i}{q}\right)$, $i=1,2$ перепишем в виде:

$$\theta\left(\frac{q^2}{\pi}\left(\frac{1}{n}-2\pi ix\right),\frac{s_i}{q}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{q^2\left(n^{-1}-2\pi ix\right)}}\sum_{m_i=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_i^2}{n^{-1}-2\pi ix}+2\pi im_i\frac{s_i}{q}\right),\quad i=1,2\,.$$

Тогда для $S_1(l/q+x)$ справедливо равенство

$$S_1\left(\frac{l}{q}+x\right)=\frac{\pi}{q^2(n^{-1}-2\pi ix)}\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_1^2}{n^{-1}-2\pi ix}\right)\sum_{s_1=1}^{q}e^{2\pi i(ls_1^2+m_1s_1)/q}\times$$

$$\times \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_2^2}{n^{-1}-2\pi ix}\right) \sum_{s_2=1}^{q} e^{2\pi i(ls_2^2+m_2s_2)/q} .$$

Выделим слагаемое $m_1=0, m_2=0$. Тогда $S_1(l/q+x)$ можно записать в виде

$$S_1\left(\frac{l}{q}+x\right)=\varphi_1+\Phi_1 ,$$

где

$$\varphi_1=\frac{\pi}{q^2(n^{-1}-2\pi ix)}\, G^2(q,l,0)$$

и

$$\Phi_1=\frac{\pi}{q^2(n^{-1}-2\pi ix)} \sum_{\substack{m_1=-\infty,\\ m_1\neq 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_1^2}{n^{-1}-2\pi ix}\right) G(q,l,m_1)\times$$

$$\times \sum_{\substack{m_2=-\infty,\\ m_2\neq 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_2^2}{n^{-1}-2\pi ix}\right) G(q,l,m_2) ,$$

$G(q,l,m_i), i=1,2$ – сумма Гаусса. Аналогично получаем равенство для $S_2(l/q+x)$:

$$S_2\left(\frac{l}{q}+x\right)=\varphi_2+\Phi_2 ,$$

где

$$\varphi_2=\frac{\pi}{q^2(n^{-1}+2\pi ix)}\, G^2(q,-l,0)$$

и

$$\Phi_2=\frac{\pi}{q^2(n^{-1}+2\pi ix)} \sum_{\substack{k_1=-\infty,\\ k_1\neq 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{k_1^2}{n^{-1}+2\pi ix}\right) G(q,-l,k_1)\times$$

$$\times \sum_{\substack{k_2=-\infty,\\ k_2\neq 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{k_2^2}{n^{-1}+2\pi ix}\right) G(q,-l,k_2) .$$

3. Ввиду (4) и представлений для функций $S_1(l/q+x)$ и $S_2(l/q+x)$, имеем

$$I(n,h)=I_1+I_2+I_3+I_4 ,$$

где

$$I_1=\pi^2\sum_{q\le N}\frac{1}{q^4}\sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi ihl/q}\, G^2(q,l,0)\, G^2(q,-l,0) \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi ihx}dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2} ,$$

$$I_2=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi ihl/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_1\,\Phi_2\, e^{-2\pi ihx}dx ,$$

$$I_3 = \sum_{q \le N} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_2 \, \Phi_1 \, e^{-2\pi i h x} dx \,,$$

$$I_4 = \sum_{q \le N} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1 \, \Phi_2 \, e^{-2\pi i h x} dx \,.$$

Интеграл I_1 вычислим асимптотически, а интегралы I_2, I_3, I_4 оценим сверху.

4. Начнем с I_1. Разобьем интеграл $\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}$ на разность интегралов

$$\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q'')]^{-1}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{-[q(q+q'')]^{-1}} - \int\limits_{[q(q+q'')]^{-1}}^{\infty} \,.$$

Соответственно этому разбиению получаем

$$I_1 = I_{1,1} - I_{1,2} - I_{1,3} \,.$$

Вычислим асимптотически $I_{1,1}$. В силу леммы 2 имеем

$$I_{1,1} = \pi^2 \sum_{q \le N} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} G^2(q,l,0) \, G^2(q,-l,0) \, (n/2 + O(n^{\varepsilon})) =$$

$$= \Sigma_1 + O(\Sigma_2) \,.$$

Оценим вклад остатка Σ_2. Для этого запишем произведение квадратов сумм Гаусса $G^2(q,l,0)G^2(q,-l,0)$ в явном виде. Используя равенства из леммы 4 и учитывая, что $(l,q)=1$, имеем:

1) если $(q,2)=1$, то

$$G(q,l,0) = C_1(q) \left(\frac{l}{q}\right) \sqrt{q} \,,$$

где

$$C_1(q) = \begin{cases} 1, & \text{если } q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4) \,, \\ i, & \text{если } q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4) \,; \end{cases}$$

2) если $(q,2)=2$, $q = 2^{\alpha} r_2$, $(2^{\alpha}, r_2) = 1$, то

$$G(q,l,0) = C_1(r_2) C_2(\alpha, l r_2) \left(\frac{2^{\alpha} l}{r_2}\right) \sqrt{q} \,,$$

где

$$C_2(\alpha, lr_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = 1, \\ (1 + i^{lr_2}), & \text{если } \alpha \text{ – четное число}, \\ \sqrt{2}\,\exp(2\pi i l r_2/8), & \text{если } \alpha > 1 \text{ – нечетное число}. \end{cases}$$

Можно утверждать, что имеет место соотношение

$$G^2(q, l, 0) G^2(q, -l, 0) = C_3(q) q^2\,,$$

где

$$C_3(q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)\,, \\ 1, & \text{если } (q, 2) = 1\,, \\ 4, & \text{если } q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)\,. \end{cases}$$

Тогда

$$\Sigma_2 \ll n^{\varepsilon} \sum_{q \le N} \frac{1}{q^2} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} = n^{\varepsilon} \sum_{q \le N} \frac{1}{q^2} \sum_{s|(q,h)} s\mu\left(\frac{q}{s}\right) \ll n^{\varepsilon}\,.$$

Прежде чем вычислять вклад $I_{1,3}$, заметим, что

$$\left| \int\limits_{[q(q+q')]^{-1}}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i h x}\,dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \right| \ll \int\limits_{[qq']^{-1}}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \ll qq' \ll qN\,,$$

так как $q' \leqslant N$. Учитывая явную формулу для произведения квадратов сумм Гаусса, будем иметь

$$I_{1,3} \ll N^{1+\varepsilon} \sum_{q \le N} \frac{1}{q} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} = N^{1+\varepsilon} \sum_{q \le N} \frac{1}{q} \sum_{s|(q,h)} s\mu\left(\frac{q}{s}\right) \ll N^{1+\varepsilon}\,.$$

Интеграл $I_{1,2}$ оценивается аналогично.

Проведем оценку для суммы

$$R = n \sum_{q > N} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q}\, G^2(q, l, 0)\, G^2(q, -l, 0)\,.$$

Имеем

$$R \ll n^{1+\varepsilon} \sum_{q > N} \frac{1}{q^2} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} = n^{1+\varepsilon} \sum_{q > N} \frac{1}{q^2} \sum_{s|(q,h)} s\mu\left(\frac{q}{s}\right) \ll n^{1/2+\varepsilon}\,.$$

Таким образом,

$$I_1 = \frac{\pi^2 n}{2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^4}\sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q}\, G^2(q,l,0)\; G^2(q,-l,0) + O(n^{1/2+\varepsilon})\,.$$

5. Оценка I_2, I_3, I_4 проводится одинаково. Приведём полное доказательство для I_4.

$$I_4 = \sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q}\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1\,\Phi_2\, e^{-2\pi i h x}dx\,.$$

Вместо Φ_1, Φ_2 подставим их значения, полученные в пункте 2. В результате имеем

$$I_4 = \pi^2 \sum_{\substack{m_1=-\infty,\\m_1\neq 0}}^{\infty}\;\sum_{\substack{m_2=-\infty,\\m_2\neq 0}}^{\infty}\;\sum_{\substack{k_1=-\infty,\\k_1\neq 0}}^{\infty}\;\sum_{\substack{k_2=-\infty,\\k_2\neq 0}}^{\infty}\;\sum_{q\le N} q^{-4}\,\times$$

$$\times \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} G(q,l,m_1)\, G(q,l,m_2)\, G(q,-l,k_1)\, G(q,-l,k_2)\;\times$$

$$\times \int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{\exp\left(-2\pi i h x\right)\,\exp\left(-\dfrac{\pi^2}{q^2}\cdot\dfrac{m_1^2+m_2^2}{n^{-1}-2\pi i x}\right)\exp\left(-\dfrac{\pi^2}{q^2}\cdot\dfrac{k_1^2+k_2^2}{n^{-1}+2\pi i x}\right)}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\,dx\,.$$

В дальнейшем будем использовать следующее обозначение для повторных операций суммирования

$$\sum_{\substack{m_1=-\infty,\\m_1\neq 0}}^{\infty}\;\sum_{\substack{m_2=-\infty,\\m_2\neq 0}}^{\infty}\;\sum_{\substack{k_1=-\infty,\\k_1\neq 0}}^{\infty}\;\sum_{\substack{k_2=-\infty,\\k_2\neq 0}}^{\infty}(\cdot) = \sum_{\substack{m_1,\,m_2\\k_1,\,k_2}}(\cdot)\quad.$$

Запишем в явном виде суммы Гаусса, используя равенства из леммы 4. Возможны 3 случая:

1) если $(q,2)=1$, то

$$G(q,l,m_1) = C_1(q)\left(\frac{l}{q}\right)\sqrt{q}\,\exp\left(-2\pi i\,\frac{(4l)^*}{q}\,m_1^2\right)\,,$$

где $4l(4l)^*\equiv 1(\mathrm{mod}\; q)$;

2) если $(q,2)=2$, $q=2r_2$, $(2,r_2)=1$, то

$$G(q,l,m_1) = C_1(r_2)\sqrt{2}\,\chi(m_1;2,1)\left(\frac{2l}{r_2}\right)\sqrt{q}\,\exp\left(-2\pi i\frac{(8l)^*}{r_2}m_1^2\right)\,,$$

где $8l(8l)^*\equiv 1(\mathrm{mod}\; r_2)$.

3)если $(q,2)=2$, $q=2^{\alpha}r_2$, $\alpha\geqslant 2$, $(2,r_2)=1$, то

$$G(q,l,m_1)=C_1(r_2)\,C_2(\alpha,lr_2)\;\chi(m_1;2,0)\left(\frac{2^{\alpha}l}{r_2}\right)\sqrt{q}\,\exp\left(-2\pi i\frac{(l)^*}{q}\frac{m_1^2}{4}\right),$$

где $ll^*\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$. Константы $C_1(q)$, $C_2(\alpha,lr_2)$ были определены выше.

Тогда можем утверждать, что

$$G(q,l,m_1)\,G(q,l,m_2)\,G(q,-l,k_1)\,G(q,-l,k_2)=$$

$$=C_4(q,m_1,m_2,k_1,k_2)\,q^2\,e^{-2\pi i\,\frac{l^*}{q}\,C_5(q,m_1,m_2,k_1,k_2)},$$

где

$$C_4(q,m_1,m_2,k_1,k_2)=$$

$$\begin{cases}1, & \text{если } (q,2)=1,\\ 4\chi(m_1;2,1)\chi(m_2;2,1)\chi(k_1;2,1)\chi(k_2;2,1)\exp\left(\frac{i\pi}{4}(m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2)\right), & \text{если } (q,2^{\alpha})=2,\\ 4\chi(m_1;2,0)\chi(m_2;2,0)\chi(k_1;2,0)\chi(k_2;2,0), & \text{если } (q,2^{\alpha})>2;\end{cases}$$

$$C_5(q,m_1,m_2,k_1,k_2)=\begin{cases}4^*(m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2), & \text{если } (q,2)=1,\\ (m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2)/4, & \text{если } (q,2)=2\,.\end{cases}$$

Тогда

$$I_4=\pi^2\sum_{\substack{m_1,m_2\\k_1,k_2}}\;\sum_{q\le N}C_4(q,m_1,m_2,k_1,k_2)\,q^{-2}S(-h,-C_5(q,m_1,m_2,k_1,k_2),q)\;\times$$

$$\times\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}\frac{\exp(-2\pi ihx)\,\exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_1^2+m_2^2}{n^{-1}-2\pi ix}-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{k_1^2+k_2^2}{n^{-1}+2\pi ix}\right)}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\,dx$$

Разобьем интеграл $\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}$ на сумму интегралов:

$$\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}=\int\limits_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{-[q(q+N)]^{-1}}+\int\limits_{-[q(q+N)]^{-1}}^{0}+\int\limits_{0}^{[q(q+N)]^{-1}}+\int\limits_{[q(q+N)]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}.$$

Соответственно этому разбиению получаем

$$I_4=I_{4,1}+I_{4,2}+I_{4,3}+I_{4,4}\,.$$

6. $I_{4,2}$ и $I_{4,3}$ оцениваются одинаковы. Все рассуждения проведем для $I_{4,3}$. Пусть θ – сколь угодно малое положительное число, тогда

$$I_{4,3} = \sum_{q\le n^{1/2-\theta}} \int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \sum_{q\le n^{1/2-\theta}} \int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+N)]^{-1}} + \sum_{n^{1/2-\theta}<q\le N} \int\limits_0^{[q(q+N)]^{-1}} =$$

$$= \Sigma_{41} + \Sigma_{42} + \Sigma_{43}\,.$$

Сумму Σ_{41} оценим сверху. Учитывая, что $|C_4(q,m_1,m_2,k_1,k_2)| \le 4$, будем иметь

$$\Sigma_{41} \ll \sum_{\substack{m_1,m_2\\k_1,k_2}} \sum_{q\le n^{1/2-\theta}} q^{-2} |\,S(-h,-C_5(q,m_1,m_2,k_1,k_2),q)| \times$$

$$\times \int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \exp\left(-\frac{\pi^2 n(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}{q^2(1+4\pi^2x^2n^2)}\right) \frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\,.$$

Сумму Клостермана $S(-h,-C_5(q,m_1,m_2,k_1,k_2),q)$ оценим, используя лемму 3. В результате, получим

$$\Sigma_{41} \ll n^{3\varepsilon} \sum_{\substack{m_1,m_2\\k_1,k_2}} \sum_{q\le n^{1/2-\theta}} q^{-3/2} \int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \exp\left(-\frac{\pi^2 n(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}{q^2(1+4\pi^2x^2n^2)}\right) \frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\,.$$

Так как $q \leqslant n^{1/2-\theta}, 0 \leqslant x \leqslant [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, то

$$\exp\left(-\frac{\pi^2 n m_i^2}{q^2(1+4\pi^2x^2n^2)}\right) \le e^{-cn^{2\theta}}\,, \quad \exp\left(-\frac{\pi^2 n k_i^2}{q^2(1+4\pi^2x^2n^2)}\right) \le e^{-cn^{2\theta}}\,,$$

где c – постоянная, $i=1,2$. Тогда

$$\sum_{\substack{m_i=-\infty,\\m_i\ne 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n m_i^2}{q^2(1+4\pi^2x^2n^2)}\right) = O\left(e^{-cn^{2\theta}}\right)\,,$$

$$\sum_{\substack{k_i=-\infty,\\k_i\ne 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n\, k_i^2}{q^2(1+4\pi^2x^2n^2)}\right) = O\left(e^{-cn^{2\theta}}\right)\,.$$

Кроме того,

$$\int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2} \ll \int\limits_0^{2\pi[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dt}{n^{-2}+t^2} \ll n^{\frac{3}{2}-\theta}q^{-1}\,.$$

Следовательно,

$$\Sigma_{41} \ll n^{3/2-\theta+3\varepsilon} e^{-cn^{2\theta}} \sum_{q\leq n^{1/2-\theta}} q^{-5/2} \ll n^{7/12+\varepsilon}.$$

7. Перейдем к оценке Σ_{42}.

$$\Sigma_{42} = \pi^2 \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ k_1, k_2}} \sum_{q\leq n^{1/2-\theta}} \frac{1}{q} C_4(q, m_1, m_2, k_1, k_2)\, S(-h, -C_5(q, m_1, m_2, k_1, k_2), q) \times$$

$$\times \frac{1}{q} \int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+N)]^{-1}} \frac{\exp(-2\pi i h x)\, \exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_1^2+m_2^2}{n^{-1}-2\pi i x} - \frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{k_1^2+k_2^2}{n^{-1}+2\pi i x}\right)}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\, dx$$

Введем функцию

$$f(q, n, h, m_1, m_2, k_1, k_2) =$$

$$= \frac{1}{q} \int\limits_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+N)]^{-1}} \frac{\exp(-2\pi i h x)\, \exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_1^2+m_2^2}{n^{-1}-2\pi i x} - \frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{k_1^2+k_2^2}{n^{-1}+2\pi i x}\right)}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\, dx\,.$$

Сумму по q перепишем в виде:

$$\sum_q = \sum_{q\not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)} + \sum_{\substack{q\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2), \\ q\not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)}} + \sum_{q\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3\,.$$

1) Пусть $q \not\equiv 0(\mod 2)$. Тогда

$$C_4(q, m_1, m_2, k_1, k_2) = 1\,, \qquad C_5(q, m_1, m_2, k_1, k_2) = 4^*(m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2)\,.$$

По условию $4 \mid h$, обозначим через $h_1 = h/4$, h_1 – целое число, $v_1 = m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2$. Тогда справедливо неравенство

$$\Sigma_1 \ll \left| \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ k_1, k_2}} \sum_{\substack{q\leq n^{1/2-\theta}, \\ q\not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)}} \frac{1}{q} S(-h_1, -v_1, q) f(q, n, h, m_1, m_2, k_1, k_2) \right| \ll$$

$$\ll \sum_{i=1}^{2} \left| \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ k_1, k_2}} \sum_{\substack{q\leq n^{1/2-\theta}, \\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}} \frac{1}{q} S(-h_1, -v_1, q)\, f(q, n, h, m_1, m_2, k_1, k_2) \right|.$$

К каждой из сумм по q применим преобразование Абеля, имеем

$$-\int_0^{n^{1/2-\theta}}\left(\sum_{\substack{t\le q,\\ t\equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}}\frac{1}{t}\,S(-h_1,-v_1,t)\right)f'_q(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2)\,dq\ +$$

$$+\ f(n^{1/2-\theta},n,h,m_1,m_2,k_1,k_2)\sum_{\substack{q\le n^{1/2-\theta},\\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}}\frac{1}{q}\,S(-h_1,-v_1,q)\,,\quad i=1,2\,.$$

Тогда

$$\Sigma_1\ll\sum_{i=1}^{2}\int_0^{n^{1/2-\theta}}\left|\sum_{\substack{m_1,m_2\\ k_1,k_2}}f'_q(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2)\sum_{\substack{t\le q,\\ t\equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}}\frac{1}{t}\,S(-h_1,-v_1,t)\right|dq\ +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\left|\sum_{\substack{m_1,m_2\\ k_1,k_2}}f(n^{1/2-\theta},n,h,m_1,m_2,k_1,k_2)\sum_{\substack{q\le n^{1/2-\theta},\\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}}\frac{1}{q}\,S(-h_1,-v_1,q)\right|.$$

Вычислим производную от функции $f(q,n,m_1,m_2,k_1,k_2)$ по переменной q и оценим тривиальным образом функцию и найденную производную. В результате, получаем

$$f(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2)=O\left(e^{-C(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}n^{1/2+\theta}\right),$$

$$f'_q(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2)=O\left(e^{-C(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}\left(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2\right)\frac{n^{1/2+\theta}}{q}\right),$$

где C – постоянная.

Положив в лемме 5 входящие в её формулировки величины равными $u=-h_1, v=-v_1, |\,a_u|=1, |\,b_v|=e^{-C(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}n^{1/2+\theta}, U=V=n^{\varepsilon}, T=n^{1/2-\theta}$ и p равным одному из чисел 1 или 2, заключаем, что

$$\sum_{\substack{m_1,m_2\\ k_1,k_2}}f(n^{1/2-\theta},n,h,m_1,m_2,k_1,k_2)\sum_{\substack{q\le n^{1/2-\theta},\\ q\equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}}\frac{1}{q}\,S(-h_1,-v_1,q)\ll n^{7/12+11\varepsilon/6+5\theta/6-\varepsilon\theta}\,.$$

Аналогичные рассуждения дают для функции f'_q оценку

$$\sum_{\substack{m_1,m_2\\ k_1,k_2}}f'_q(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2)\sum_{\substack{t\le q,\\ t\equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}}\frac{1}{t}\,S(-h_1,-v_1,t)\ll q^{-5/6+\varepsilon}n^{1/2+\theta+4\varepsilon/3}\,.$$

Проинтегрировав последнюю оценку по q и выбрав в качестве $\varepsilon = 11\varepsilon/6 + 5\theta/6 - \varepsilon\theta$, в итоге получим $\Sigma_1 = O(n^{7/12+\varepsilon})$.

2) Пусть $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2), q \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$. Тогда

$$C_4(q, m_1, m_2, k_1, k_2) = 4\,\chi(m_1; 2, 1)\,\chi(m_2; 2, 1)\,\chi(k_1; 2, 1)\,\chi(k_2; 2, 1)\, e^{\pi i \frac{m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2}{4}}\,,$$

$$C_5(q, m_1, m_2, k_1, k_2) = (m_1^2 + m_2^2 - k_1^2 - k_2^2)/4\,.$$

Обозначим через $b_v = C_4(q, m_1, m_2, k_1, k_2)$, $v = C_5(q, m_1, m_2, k_1, k_2)$ – целое число. Тогда справедливо неравенство

$$\Sigma_2 \ll \sum_{\substack{i=2,\\ i=4}} \left| \sum_{\substack{m_1, m_2\\ k_1, k_2}} b_v \sum_{\substack{q \le n^{1/2-\theta},\\ q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ i)}} \frac{1}{q} S(-h, -v, q) f(q, n, h, m_1, m_2, k_1, k_2) \right|.$$

К суммам по q применим преобразование Абеля и далее используем лемму 5. Все рассуждения аналогичны тем, что проводились для случая 1). В результате можем утверждать, что $\Sigma_2 = O\left(n^{7/12+\varepsilon}\right)$.

3) Пусть $q \equiv (0 \bmod 4)$. Тогда

$$C_4(q, m_1, m_2, k_1, k_2) = 4\,\chi(m_1; 2, 0)\,\chi(m_2; 2, 0)\,\chi(k_1; 2, 0)\,\chi(k_2; 2, 0)\,,$$

$$C_5(q, m_1, m_2, k_1, k_2) = (m_1^2 + m_2^2 - k_1^2 - k_2^2)/4\,.$$

Обозначим через $b_v = C_4(q, m_1, m_2, k_1, k_2)$, $v = C_5(q, m_1, m_2, k_1, k_2)$ – целое число. Тогда справедливо неравенство

$$\Sigma_3 \ll \left| \sum_{\substack{m_1, m_2\\ k_1, k_2}} b_v \sum_{\substack{q \le n^{1/2-\theta},\\ q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)}} \frac{1}{q} S(-h, -v, q) f(q, n, h, m_1, m_2, k_1, k_2) \right|.$$

При оценке этой суммы действуем также, как и в случае 1). В результату, получаем $\Sigma_3 = O\left(n^{7/12+\varepsilon}\right)$. Это приводит к оценке $\Sigma_{42} = O\left(n^{7/12+\varepsilon}\right)$.

8. Проведем оценку Σ_{43}. Рассуждения и оценки будут аналогичны тем, что проводились в пункте 7 для суммы Σ_{42} с тем лишь отличием, что в качестве функции $f(q, n, h, m_1, m_2, k_1, k_2)$ выбираем

$$f(q, n, h, m_1, m_2, k_1, k_2) =$$

$$= \frac{1}{q} \int\limits_0^{[q(q+N)]^{-1}} \frac{\exp(-2\pi i h x) \exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2} \cdot \frac{m_1^2 + m_2^2}{n^{-1} - 2\pi i x} - \frac{\pi^2}{q^2} \cdot \frac{k_1^2 + k_2^2}{n^{-1} + 2\pi i x}\right)}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2}\, dx\,,$$

причём

$$f(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) = O\left(e^{-C(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}\frac{n}{q}\right),$$

$$f'_q(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) = O\left(e^{-C(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)\frac{n}{q^2}\right),$$

где C – постоянная.

Окончательно имеем

$$I_{4,3} = O(n^{7/12+\varepsilon}).$$

9. Интегралы $I_{4,1}$ и $I_{4,4}$ оцениваются одинаково. Так для случая $I_{4,4}$ введем функцию

$$f(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) =$$

$$= \frac{1}{q}\int\limits_{[q(q+N)]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{\exp(-2\pi i h x)\exp\left(-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{m_1^2+m_2^2}{n^{-1}-2\pi i x}-\frac{\pi^2}{q^2}\cdot\frac{k_1^2+k_2^2}{n^{-1}+2\pi i x}\right)}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\,dx,$$

для которой, а также для её производной по q справедливы оценки

$$f(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) = O\left(e^{-C(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}N\right),$$

$$f'_q(q,n,h,m_1,m_2,k_1,k_2) = O\left(e^{-C(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)}(m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2)\frac{N}{q}\right),$$

где C – постоянная. Действуя по схеме рассуждений из пункта 7, в итоге находим $I_{4,4} = O\left(n^{7/12+\varepsilon}\right)$.

Объединяем полученные для I_4 оценки, получаем:

$$I_4 = O\left(n^{7/12+\varepsilon}\right).$$

10. В силу проведенных выше в пп.1-9 рассуждений заключаем, что

$$I(n,h) = \frac{\pi^2 n}{2}\sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i\frac{hl}{q}}\, G^2(q,l,0)\, G^2(q,-l,0) + O(n^{7/12+\varepsilon}).$$

Литература

1. Esterman T. Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten // J. reine und ang. Math. – 1931. – 164. – P.173-182.

2. Deshouillers J.-M., Iwaniec H. An additive divisor problem // J. London Math. Soc. – 1982. – 26(2). – P.1-14.

3. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана / С.М. Воронин, А.А. Карацуба. – М.:Физматлит, 1994.

4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного: Учебное пособие для студентов механических специальностей механико-математических факультетов государственных университетов / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1958. – 678 с.

5. Estermann T. On Kloostermann's sum // Mathematika. – 1961. – 8. – P.83-86.

6. Estermann T. A new application of Hardy-Littlewood-Kloosterman method // Proc. London Math. Soc. – 1962. – 12(3). – P.425-444.

7. Deshouillers J.-M., Iwaniec, H. Kloosterman sums and fourier coefficients of cusp forms // Invent. math. – 1982. – 70. – P.219-288.

8. Виноградов И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – М.: Изд. технич. литер.,1952.

ABOUT THE SOLUTION NUMBER OF ONE EQUATION WITH SQUARES

L.N. Kurtova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: lmoskalenko@bsu.edu.ru

Abstract. It is considered the additive problem of number theory that concerns the number of solutions of Diophantine equation that contains the linear combination of four squares. Using the circular method, the asymptotical formula of the solution number is obtained on the basis of estimate of the sum that consists of Kloosterman's sums.

Key words: additive problems of number theory, number of solution, asymptotic formula, Kloosterman's sums.