УДК 621.391:006.91

О ВЫЧИСЛЕНИИ ДИСПЕРСИИ ВЫХОДНОЙ РАЗНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНОСТИ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФАЗОМЕТРА

Н.Г. ПЕРЕХОД

Белгородский университет потребительской кооперации

В работе рассмотрено влияние нелинейности амплитудно-фазовой характеристики фазометра на приращение дисперсии выходной разности фаз. Выявлено влияние характера нелинейности на приращение дисперсии. Даны практические рекомендации по уменьшению погрешностей измерения статистических характеристик разности фаз случайных сигналов.

Ключевые слова: разность фаз, дисперсия, приращение, нелинейность, статистические характеристики, случайные сигналы.

Фазовые методы широко используются в радиолокации, радионавигации, при оптических методах исследования турбулентности и неоднородности атмосферы, измерения теплофизических свойств материалов, исследованиях вибрационных свойств и жесткости механических конструкций. Фазовые методы нашли широкое применение в научных исследованиях и промышленности. Такому успеху фазовые методы обязаны их высокой точности определения физического параметра преобразованного в фазу сигнала.

Однако достичь высокой точности измерения фазы сигнала можно только при условии учета и компенсации погрешностей, которые возникают в самом фазоизмерительном устройстве в силу особенностей фазовой характеристики фазоизмерителя (разрывности и периодичности).

Погрешность измерения фазы зависит не только от величины измерений фазы сигнала, но и из-за нелинейности фазовой характеристики, преобразования амплитудных флуктуаций в фазовые, что приводит к изменению статистических характеристик фазы входного сигнала на выходе фазоизмерителя.

Так на входе фазометра фаза и амплитуда сигнала при наличии шума флуктуируют. На выходе закон флуктуации измеряется за счет нелинейности амплитудно-фазовой характеристики фазометра и из-за преобразования амплитудных флуктуаций в фазовые [1].

Суммарный сигнал, поступающий на вход фазометра, может быть представлен как

$$u(t) = U_ш(t)\cos[\omega_0 t + \psi(t)] + U_m\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{1}$$

где $U_ш(t)$ – амплитуда шума; $\psi(t)$ – фаза шума с равновероятным законом распределения в интервале от 0 до 2π; U_m – амплитуда сигнала; φ_0 – постоянный фазовый сдвиг; ω_0 – частота сигнала и шума (считаем процесс узкополосным).

Для узкополосного процесса выражение (1) приводится к виду

$$u(t) = U_\Sigma(t)\cos[\omega_0 t + \gamma(t)], \tag{2}$$

где $\gamma(t)$ – фаза суммарного процесса $u(t)$; $U_\Sigma(t)$ – амплитуда суммарного процесса $u(t)$.

Для анализа влияния нелинейности амплитудно-фазовой характеристики (НАФХ) фазометра на дисперсию выходной разности фаз представим НАФХ в виде степенного ряда

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i U_m^i, \tag{3}$$

где $\varphi(u)$ – амплитудно-фазовая характеристика фазометра; A_i – коэффициенты ряда, i=1, 2, 3, …, ∞.

Суммирование (2) производится от i=1, так как при i=0 имеем постоянный фазовый сдвиг, не влияющий на оценку дисперсии. Этот сдвиг представляет интерес при измерении математического ожидания разности фаз. Для флуктуаций, при которых фазометр можно считать безынерционным, мгновенное значение фазы на выходе будет

$$\varphi[u(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} A_i U_\Sigma^i(t) + \mathcal{E}(t), \tag{4}$$

где $\mathcal{E}(t)$ – флуктуации фазы на выходе фазометра при наличии их на входе и отсутствии амплитудно-фазовой погрешности; $U_\Sigma^i(t)$ – амплитуда суммарного процесса, мгновенное значение фазы которой равно

$$\gamma(t) = \operatorname{arctg}\frac{U_ш(t)\sin\psi(t) + U_m\sin\varphi_0}{U_ш(t)\cos\psi(t) + U_m\cos\varphi_0}. \tag{5}$$

Для упрощения выражения (5) положим

$$\varphi_0 = 0 \text{ и } U_ш(t) \ll U_m. \tag{6}$$

Общность рассуждений при принятом условии (6) не изменится, а случай $U_ш(t) \ll U_m$ часто имеет место на практике.

Тогда можно принять

$$\gamma(t) \approx \frac{U_ш(t)}{U_m}\sin\psi(t). \tag{7}$$

Из выражения (7) видно, что фаза суммарного процесса зависит от отношения сигнал-шум и случайной фазы $\psi(t)$.

Амплитуда сигнала $u(t)$ определится как

$$U_\Sigma(t) = \sqrt{U_m^2 + U_ш^2(t) + 2U_m U_ш(t)\cos[\varphi_0 - \psi(t)]}. \tag{8}$$

С учетом (6) выражение (8) упростится

$$U_\Sigma(t) = U_m\left\{1 + \frac{1}{2}\left[\frac{U_ш^2(t)}{U_m^2} + 2\frac{U_ш(t)}{U_m}\cos\psi(t)\right]\right\} \approx U_m + U_ш(t)\cos\psi(t). \tag{9}$$

Изменение фазы сигнала на выходе фазометра из-за нелинейности амплитудно-фазовой характеристики равно

$$\Delta\beta(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i U_\Sigma^i(t) = \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi(t), \tag{10}$$

где N – любое конечное число членов ряда; $\Delta\varphi_0$ – смещение среднего значения разности фаз; $\Delta\varphi(t)$ – дополнительная случайная составляющая изменения фазы сигнала u(t) на выходе фазометра.

Смещение среднего значения разности фаз может быть найдено из выражения

$$\Delta\varphi_0 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=1}^{N} A_i U_\Sigma^i(t)dt, \tag{11}$$

а дополнительная случайная составляющая равна

$$\Delta\varphi(t) = \Delta\beta(t) - \Delta\varphi_0 = \sum_{i=1}^{N} A_i U_\Sigma^i(t) - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=1}^{N} A_i U_\Sigma^i(t)dt. \tag{12}$$

После замены в выражении (12) $U_\Sigma(t)$ его значением из (9) и ряда математических преобразований получим

$$\Delta\varphi(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i U_m^i \sum_{k=1}^{i} \frac{i!\,U_ш^k(t)}{k!\,(i-2k)!\,U_m^k}\cos\psi(t) - \sum_{i=1}^{N} A_i U_m^i \sum_{k=1}^{i/2} \frac{i!\,\sigma_ш^{2k}}{k!\,(i-2k)!\,2k\,U_m^{2k}}. \tag{13}$$

Суммарное значение флуктуации фазы на выходе фазометра равно

$$\gamma_\Sigma(t) = \gamma(t) + \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi(t). \tag{14}$$

После подстановки (7), (11) и (13) в (14) выражение для суммарного значения флуктуации фазы на выходе фазометра приобретает вид

$$\gamma_\Sigma(t) = \frac{U_ш(t)}{U_m}\sin\psi(t) + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=1}^{N} A_i U_\Sigma^i(t)dt + \sum_{i=1}^{N} A_i U_m^i \sum_{k=1}^{i} \frac{i!}{k!\,(i-k)!} \times \frac{U_ш^k(t)}{U_m^k}\cos^k\psi(t) -$$
$$- \sum_{i=1}^{N} A_i U_m^i \sum_{k=1}^{i/2} \frac{i!\,\sigma_ш^{2k}}{k!\,(i-2k)!\,U_m^{2k}}. \tag{15}$$

Первое слагаемое в (15) представляет собой флуктуации фазы на выходе фазометра при наличии их на входе и отсутствии амплитудно-фазовой погрешности фазометра. Второе слагаемое есть смещение среднего значения разности фаз при наличии амплитудно-фазовой погрешности.

Третье и четвертое слагаемые являются дополнительной случайной составляющей изменения фазы сигнала на выходе фазометра при наличии амплитудно-фазовой погрешности. При отсутствии амплитудно-фазовой погрешности фазометра второе, третье и четвертое слагаемые обращаются в нуль, и суммарное значение флуктуации фазы зависит только от соотношения сигнал-шум (первого слагаемого).

Используя (15), можно получить выражение для определения приращения дисперсии на выходе фазометра.

Дисперсия разности фаз случайных сигналов на выходе фазометра из-за НАФХ согласно выражению (15) равна

$$D\varphi = \frac{\sigma_m^2}{U_m^2} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} A_i A_k U_m^{i+k} \sum_{n=1}^{(i+k)/2} \frac{(i+k)!\sigma_m^{2n}}{[(i+k)-2n]!n!U_m^{2n}} - \left[\sum_{c=1}^{N} A_c U_m^c \sum_{p=1}^{c/2} \frac{c!\sigma_m^{2p}}{(c-2p)!p!2^p U_m^{2p}}\right]^2. \quad (16)$$

В выражении (16) первое слагаемое есть минимум дисперсии и зависит оно только от соотношения сигнал-шум. Второе и третье слагаемые – дополнительная дисперсия флуктуирующей разности фаз на выходе фазометра из-за НАФХ фазометра.

При i=k=c и n=p можно получить формулу для определения дисперсии при наличии любого i-го члена ряда (3):

$$D\varphi = \frac{\sigma_m^2}{U_m^2} + A_i^2 U_m^{2i} \sum_{n=1}^{i} \frac{(2i)!\sigma_m^{2n}}{(i-2n)!n!2^n U_m^{2n}} - A_i^2 U_m^{2i} \left[\sum_{n=1}^{i/2} \frac{i!\sigma_m^{2n}}{(i-2n)!n!2^n U_m^{2n}}\right]^2. \quad (17)$$

После преобразования выражения (17) и нормировки относительно $A_i^2 U_m^i$ окончательно получим нормированную зависимость измерения дисперсии флуктуирующей разности фаз

$$\frac{D\varphi - \sigma_m^2/U_m^2}{A_i^2 U_m^{2n}} = \sum_{n=1}^{i} \frac{2i!\sigma_m^{2n}}{(2i-2n)!n!2^n U_m^{2n}} - \left[\sum_{n=1}^{i/2} \frac{i!\sigma_m^{2n}}{(i-2n)!n!2^n U_m^{2n}}\right]^2. \quad (18)$$

Полученное выражение позволяет выяснить характер зависимости приращения дисперсии флуктуирующей разности фаз от числа i членов ряда аппроксимации амплитудно-фазовой характеристики.

Измерение дисперсии флуктуирующей разности фаз сильно зависит от i. Пользоваться таким результатами затруднительно. Желательно получить выражение для приращения дисперсии, не зависящее очень слабо. Такие результаты можно получить, если использовать не характеристику, а крутизну $\varphi'(u)$ амплитудно-фазовой характеристики.

Опуская промежуточные выводы, приведем окончательное выражение нормированной зависимости приращения дисперсии флуктуирующей разности фаз в виде

$$\frac{\Delta\sigma^2}{U_m^2[\varphi'(u)]^2} = r\sigma_0^2, \quad (19)$$

где r – коэффициент, зависящий от i и отношения сигнал-шум. Коэффициент r в пределе при $i \to \infty$ стремится к двум, что следует из выражений (18) при n = 1. Тогда выражение (19) может быть записано как

$$\frac{\Delta\sigma^2}{\sigma_0^2} = 2U_m^2[\varphi'(u)]^2. \quad (20)$$

Так как выражение (20) от i не зависит, его можно обобщить на любую нелинейность. Максимальное приращение дисперсии будет при i=1 и равно

$$\frac{\Delta\sigma^2_{max}}{\sigma_0^2} = U_m^2\left[\varphi'_{max}(u)\right]^2. \quad (21)$$

Зная конкретную амплитудно-фазовую характеристику фазометра или другого фазометрического устройства, можно определить $\varphi'_{max}(u)$ в области рабочей точки и подсчитать максимальную погрешность по выражению (21).

Если производная на рабочем участке характеристик изменяется значительно, то область рабочей точки выбирается по вероятности попадания амплитуды в эту область, например, с вероятностью 95%, что в большинстве случаев, представляющих интерес для практики, вполне допустимо.

Полученные результаты позволяют судить о существенном влиянии нелинейности амплитудно-фазовой характеристики разности фаз случайных сигналов. При конкретной амплитудно-фазовой характеристике фазометра выражение (21) позволяет рассчитать максимальное приращение дисперсии и сформулировать требования к узлам фазометра с точки зрения уменьшения приращения дисперсии выходной разности фаз случайных сигналов.

Литература

1. Переход Н.Г. Ошибка измерения флуктуации фазы из-за амплитудно-фазовых погрешностей фазометра / Томский институт радиоэлектроники и электронной техники. – Томск, 1968. – 8 с. Доп. (В НИИЭНР 07.11.68. №21-20184).

DISPERSION OF THE OUTPUT PHASE DIFFERENCE OF THE RANDOM SIGNALS IN NONLINEARITY OF PEAK-PHASE CHARACTERISTIC OF PHASE METER

N.G. PEREKHOD

Belgorod university of consumers' cooperative society

This article considered the influence of nonlinearity of the amplitude-phase characteristics of phase meter on an increment of a dispersion of the output phase difference. The influence of the nature of nonlinearity on the increment of the variance is revealed. Practical recommendations for reducing errors in measurement of statistical characteristics of the phase difference of the random signals are given.

Key words: phase difference, a dispersion, an increment, nonlinearity, statistical characteristics, the random signals.