МАТЕМАТИКА

УДК 517.968

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЕСОВЫМИ ЯДРАМИ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА В КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

С.Н. Асхабов

Чеченский государственный университет,
ул. Киевская, 33, Грозный, 364037, Россия, e-mail: askhabov@yandex.ru

Аннотация. Методом монотонных операторов в комплексных пространствах Лебега доказываются глобальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решения для различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала специального вида. Получены оценки норм решений и скорости сходимости к ним последовательных приближений пикаровского типа.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, операторы типа потенциала, метод монотонных операторов.

1. Введение

В работе [1] в комплексных весовых пространствах $L_p(\varrho)$ были изучены нелинейные уравнения, содержащие оператор типа потенциала $(B^\alpha u)(x) = \dfrac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{b(t)\, u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}}$, где $0 < \alpha < 1$, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера и $b(x) \neq 0$ п.в. на $R = (-\infty, \infty)$.

В данной работе в комплексных пространствах Лебега $L_p(R)$, $1 < p < \infty$, с нормой

$$\|u\|_p = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

рассмотрены основные классы нелинейных уравнений, содержащих операторы типа потенциала вида

$$(Q^\alpha u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[\overline{a(x)}b(t) - a(t)\overline{b(x)}\right] u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}}, \ \ (A^\alpha u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[\overline{a(x)} - a(t)\right] u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}}.$$

Используя метод монотонных (по Браудеру-Минти) операторов, доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений для всех рассмотренных уравнений.

Важно отметить, что сингулярные интегральные операторы с подобными ядрами вида $\dfrac{a(x)\,b(t)-a(t)\,b(x)}{x-t}$ играют центральную роль в теории определителей Фредгольма и уравнения Пенлеве пятого рода, теории случайных матриц (модели случайно-матричного типа) и других [2], [3]. Нелинейные сингулярные интегральные уравнения с ядрами вида $\dfrac{\overline{a(x)}\,b(t)+a(t)\,\overline{b(x)}}{x-t}$ были изучены в [4], [5].

Заметим, что операторы Q^α и A^α, в отличие от оператора B^α, не являются строго положительными симметрическими операторами и значения функционалов $\langle Q^\alpha u,u\rangle$, $\langle A^\alpha u,u\rangle$ при $u(x)\in L_p(R)$, в отличие от $\langle B^\alpha u,u\rangle$, не являются, вообще говоря, вещественными числами. Поэтому исследование нелинейных уравнений, содержащих операторы Q^α и A^α, вызывает дополнительные трудности по сравнению с исследованием уравнений, содержащих оператор B^α.

2. Операторы типа потенциала с ядрами специального вида

Рассмотрим вопрос о положительности операторов Q^α и A^α в комплексных пространствах $L_p(R)$. Для упрощения записей введем следующие обозначения:

$$p'=\frac{p}{p-1}\,,\quad \langle u,v\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x)\,\overline{v(x)}\,dx\,,\quad (I^\alpha u)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}\,,$$

где $1<p<\infty$, $0<\alpha<1$. Напомним, что оператор A, действующий из $L_p(R)$ в $L_{p'}(R)$, называется *положительным*, если $\operatorname{Re}\langle Au,u\rangle\ge 0$, $\forall u(x)\in L_p(R)$, и *строго положительным*, если равенство нулю в последнем неравенстве возможно лишь при $u(x)=0$.

В силу леммы 1 [1], оператор типа потенциала I^α действует непрерывно из пространства $L_{2/(1+\alpha)}(R)$ в сопряженное с ним пространство $L_{2/(1-\alpha)}(R)$ и строго положителен, причем

$$\|I^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)}\le n(\alpha)\,\|u\|_{2/(1+\alpha)}\quad \text{и}\quad \langle I^\alpha u,u\rangle\ge 0\,,\quad \forall u(x)\in L_{2/(1+\alpha)}(R)\,, \tag{1}$$

где $n(\alpha)$ означает здесь и всюду далее норму оператора I^α, действующего ограниченно из $L_{2/(1+\alpha)}(R)$ в $L_{2/(1-\alpha)}(R)$ (так как I^α самосопряженный оператор, то функционал $\langle I^\alpha u,u\rangle$ принимает только действительные значения и поэтому символ Re перед ним можно опустить).

Лемма 1. *Пусть $0<\alpha<1$, $2\le p<\infty$ и $a(x),b(x)\in L_{2p/[p(1+\alpha)-2]}(R)$. Тогда оператор Q^α действует непрерывно из $L_p(R)$ в $L_{p'}(R)$ и положителен, причем*

$$\|Q^\alpha u\|_{p'}\le 2\,n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p, \tag{2}$$

$$\langle Q^\alpha u,u\rangle=2\,i\,\operatorname{Im}\langle b\,u,I^\alpha(a\,u)\rangle\,,\quad \operatorname{Re}\langle Q^\alpha u,u\rangle=0,\quad \forall u(x)\in L_p(R). \tag{3}$$

□ Пусть $u(x) \in L_p(R)$. Применяя неравенство Гельдера с показателями $p\,(1+\alpha)/2$ и $p\,(1+\alpha)/[p\,(1+\alpha)-2]$, имеем

$$\|a\,u\|_{2/(1+\alpha)} \le \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p \quad \text{и} \quad \|b\,u\|_{2/(1+\alpha)} \le \|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p\ , \tag{4}$$

т.е. $a(x)u(x), b(x)u(x) \in L_{2/(1+\alpha)}(R)$. Но тогда, в силу первого неравенства из (1), имеем $I^\alpha(a\,u), I^\alpha(b\,u) \in L_{2/(1-\alpha)}(R)$, причем

$$\|I^\alpha(a\,u)\|_{2/(1-\alpha)} \le n(\alpha)\,\|a\,u\|_{2/(1+\alpha)} \quad \text{и} \quad \|I^\alpha(b\,u)\|_{2/(1-\alpha)} \le n(\alpha)\,\|b\,u\|_{2/(1+\alpha)}\ . \tag{5}$$

Используя оценки (4), из (5) получаем

$$\|I^\alpha(a\,u)\|_{2/(1-\alpha)} \le n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p \quad \text{и} \quad \|I^\alpha(b\,u)\|_{2/(1-\alpha)} \le n(\alpha)\,\|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p\ . \tag{6}$$

Обозначим $I^\alpha(b\,u) = w$. Из (6) следует, что $w(x) \in L_{2/(1-\alpha)}(R)$. Применяя неравенство Гельдера с показателями $2/(1-\alpha)\,p'$ и $2/[2-(1-\alpha)\,p']$, имеем

$$\|\overline{a}\,w\|_{p'} \le \|\overline{a}\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|w\|_{2/(1-\alpha)} = \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|I^\alpha(b\,u)\|_{2/(1-\alpha)}.$$

Следовательно, в силу второй оценки из (6), справедливо неравенство

$$\|\overline{a}\,I^\alpha(b\,u)\|_{p'} \le n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p\ . \tag{7}$$

Аналогично доказывается, что

$$\|\overline{b}\,I^\alpha(a\,u)\|_{p'} \le n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p\ . \tag{8}$$

Так как $Q^\alpha u = \overline{a}I^\alpha(b\,u) - \overline{b}I^\alpha(a\,u)$, то применяя неравенство Минковского и учитывая затем оценки (7) и (8), имеем

$$\|Q^\alpha u\|_{p'} \le \|\overline{a}\,I^\alpha(b\,u)\|_{p'} + \|\overline{b}\,I^\alpha(a\,u)\|_{p'} \le 2\,n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p\,,$$

т.е. оператор Q^α действует непрерывно из $L_p(R)$ в $L_{p'}(R)$ и справедливо доказываемое неравенство (2).

Докажем положительность оператора Q^α. Используя свойство симметричности оператора I^α, для любого $u(x) \in L_p(R)$, имеем

$$\langle Q^\alpha u, u\rangle = \langle \overline{a}\,I^\alpha(b\,u), u\rangle - \langle \overline{b}\,I^\alpha(a\,u), u\rangle = \langle I^\alpha(b\,u), a\,u\rangle - \langle I^\alpha(a\,u), b\,u\rangle =$$

$$= \langle b\,u, I^\alpha(a\,u)\rangle - \overline{\langle b\,u, I^\alpha(a\,u)\rangle} = 2\,i\,\mathrm{Im}\,\langle b\,u, I^\alpha(a\,u)\rangle\,,$$

т.е. выполнено первое равенство из (3). Второе равенство из (3) является прямым следствием первого. ■

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $2/(1+\alpha) < p < \alpha^{-1}$ и $a(x) \in L_{p/[p(1+\alpha)-2]}(R)$. Тогда оператор A^α действует непрерывно из $L_p(R)$ в $L_{p'}(R)$ и положителен, причем:*

$$\|A^\alpha u\|_{p'} \le 2\,n(\alpha)\,\|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p\,,$$

$$\langle A^\alpha u, u\rangle = 2\,i\,\mathrm{Im}\langle I^\alpha u, a\,u\rangle\,, \quad \mathrm{Re}\,\langle A^\alpha u, u\rangle = 0\,, \quad \forall u(x) \in L_p(R)\,.$$

Вещественный аналог леммы 2 доказан в [6].

Следующие леммы будут использованы нами при исследовании нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна с ядрами типа потенциала специального вида.

Лемма 3. *Пусть* $0<\alpha<1$, $1<p\le 2$ *и* $a(x), b(x) \in L_{2p/[2-p(1-\alpha)]}(R)$. *Тогда оператор* Q^α *действует непрерывно из* $L_{p'}(R)$ *в* $L_p(R)$ *и положителен, причем*

$$\|Q^\alpha u\|_p \le 2\,n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|b\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|u\|_{p'}\,, \tag{9}$$

$$\langle Q^\alpha u, u\rangle = 2\,i\,\mathrm{Im}\langle b\,u, I^\alpha(a\,u)\rangle\,, \quad \mathrm{Re}\langle Q^\alpha u, u\rangle = 0\,, \quad \forall u(x) \in L_{p'}(R). \tag{10}$$

□ Пусть $u(x) \in L_{p'}(R)$. Применяя неравенство Гельдера с показателями $p'\,(1+\alpha)/2$ и $p'\,(1+\alpha)/[p'\,(1+\alpha)-2]$, имеем

$$\|a\,u\|_{2/(1+\alpha)} \le \|a\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|u\|_{p'} \quad \text{и} \quad \|b\,u\|_{2/(1+\alpha)} \le \|b\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|u\|_{p'}\,, \tag{11}$$

т.е. $a(x)u(x), b(x)u(x) \in L_{2/(1+\alpha)}(R)$. Но тогда, в силу первого неравенства из (1), имеем $I^\alpha(a\,u), I^\alpha(b\,u) \in L_{2/(1-\alpha)}(R)$ и выполнены неравенства (5). Используя оценки (11), из (5) получаем

$$\|I^\alpha(a\,u)\|_{2/(1-\alpha)} \le n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|u\|_{p'} \quad \text{и} \quad \|I^\alpha(b\,u)\|_{2/(1-\alpha)} \le n(\alpha)\,\|b\|_{2p/[2-p(1+\alpha)]}\|u\|_{p'}\,. \tag{12}$$

Обозначим $I^\alpha(b\,u) = w$. Из (12) следует, что $w(x) \in L_{2/(1-\alpha)}(R)$. Применяя неравенство Гельдера с показателями $2/(1-\alpha)\,p'$ и $2/[2-(1-\alpha)\,p']$, имеем

$$\|\overline{a}\,w\|_p \le \|\overline{a}\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|w\|_{2/(1-\alpha)} = \|a\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|I^\alpha(b\,u)\|_{2/(1-\alpha)}\,.$$

Следовательно, в силу второй оценки из (12), справедливо неравенство

$$\|\overline{a}\,I^\alpha(b\,u)\|_p \le n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|b\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|u\|_{p'}\,. \tag{13}$$

Аналогично доказывается, что

$$\|\overline{b}\,I^\alpha(a\,u)\|_p \le n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|b\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|u\|_{p'}\,. \tag{14}$$

Так как $Q^\alpha u = \overline{a}I^\alpha(b\,u) - \overline{b}I^\alpha(a\,u)$, то применяя неравенство Минковского и учитывая затем оценки (13) и (14), имеем

$$\|Q^\alpha u\|_p \le \|\overline{a}\,I^\alpha(b\,u)\|_p + \|\overline{b}\,I^\alpha(a\,u)\|_p \le 2\,n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|b\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|u\|_{p'}\,,$$

т.е. оператор Q^α действует непрерывно из $L_{p'}(R)$ в $L_p(R)$ и справедливо доказываемое неравенство (9).

Оба равенства из (10) доказываются точно так же, как и в лемме 1. ■

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $[1-\alpha]^{-1} < p < 2/[1-\alpha]$ *и* $a(x) \in L_{p/[2-p(1-\alpha)]}(R)$. *Тогда оператор* A^α *действует непрерывно из* $L_{p'}(R)$ *в* $L_p(R)$ *и положителен, причем*

$$\|A^\alpha u\|_p \le 2\,n(\alpha)\,\|a\|_{p/[2-p(1-\alpha)]}\|u\|_{p'}\,,$$

$$\langle A^\alpha u, u\rangle = 2\,i\,\mathrm{Im}\langle I^\alpha u, a\,u\rangle\,, \quad \mathrm{Re}\,\langle A^\alpha u, u\rangle = 0\,, \quad \forall u(x) \in L_{p'}(R)\,.$$

3. Теоремы существования и непрерывности в $L_p(R)$

В этом пункте доказываются теоремы о существовании и единственности решения для различных классов нелинейных уравнений, содержащих операторы Q^α и A^α.

Приведем необходимые определения и обозначения. Пусть X есть комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, а X^* есть сопряженное с ним пространство с нормой $\|\cdot\|_*$. Обозначим через $\langle y, x\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$.

Пусть $u, v \in X$ - произвольные элементы. Оператор $A : X \to X^*$ (т.е. действующий из X в X^*) называется:

монотонным, если $\mathrm{Re}\langle Au - Av, u - v\rangle \ge 0$;

строго монотонным, если $\mathrm{Re}\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$ при $u \ne v$;

коэрцитивным, если $\displaystyle\lim_{\|u\|_p\to\infty} \frac{\mathrm{Re}\,\langle Au, u\rangle}{\|u\|_p} = \infty$.

Обозначим через C множество всех комплексных чисел. Выпишем для удобства ссылок все ограничения, накладываемые ниже на комплекснозначную функцию $F(x,z)$: $R\times C \to C$, удовлетворяющую условиям Каратеодори (она определена при $x \in R$, $z \in C$, измерима по x при всех z и является непрерывной по z при каждом фиксированном x) и определяющую нелинейность исследуемых нами нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала.

Именно, в зависимости от рассматриваемого класса нелинейных уравнений, будем накладывать на нелинейность $F(x,z)$ либо условия 1)–3):

1) существуют $c(x) \in L^+_{p'}(R)$ и $d_1 > 0$ такие, что для почти всех $x \in R$ и любого $z \in C$ выполняется неравенство:

$$|F(x,z)| \le c(x) + d_1|z|^{p-1}\,;$$

2) для почти всех $x \in R$ и всех $z_1, z_2 \in C$ выполняется неравенство:

$$\operatorname{Re}\left\{[F(x,z_1)-F(x,z_2)]\cdot\overline{[z_1-z_2]}\right\}\geq 0\,;$$

3) существуют $D(x)\in L_1^+(R)$ и $d_2>0$ такие, что для почти всех $x\in R$ и любого $z\in C$ выполняется неравенство:

$$\operatorname{Re}\{F(x,z)\cdot\overline{z}\}\geq d_2|z|^p-D(x)\,;$$

либо условия 4)–6):

4) существуют $g(x)\in L_p^+(R)$ и $d_3>0$ такие, что для почти всех $x\in R$ и любого $z\in C$ выполняется неравенство:

$$|F(x,z)|\leq g(x)+d_3|z|^{1/(p-1)}\,;$$

5) для почти всех $x\in R$ и всех $z_1,z_2\in C$ выполняется неравенство:

$$\operatorname{Re}\left\{[F(x,z_1)-F(x,z_2)]\cdot\overline{[z_1-z_2]}\right\}>0\,;$$

6) существуют $D(x)\in L_1^+(R)$ и $d_4>0$ такие, что для почти всех $x\in R$ и любого $z\in C$ выполняется неравенство:

$$\operatorname{Re}\{F(x,z)\cdot\overline{z}\}\geq d_4|z|^{p/(p-1)}-D(x)\,.$$

Если выполнены условия 1)–3), то оператор Немыцкого F, порожденный функцией $F(x,z)$, действует из $L_p(R)$ в $L_{p'}(R)$ и является непрерывным, монотонным и коэрцитивным оператором. Если же выполнены условия 4)–6), то оператор F действует из $L_{p'}(R)$ в $L_p(R)$ и является непрерывным, строго монотонным и коэрцитивным оператором.

Простейшим примером функции $F(x,z)$, удовлетворяющей условиям 1)–3) является $F(x,z)=|z|^{p-2}\cdot z$, где $p\geq 2$ – любое число. В самом деле, выполнение условий 1) и 3) для такой функции очевидно. Проверим выполнимость условия 2) при $p>2$ (выполнение этого условия при $p=2$ очевидно). Для любых $z_1=x_1+i\,y_1$ и $z_2=x_2+i\,y_2$, имеем:

$$[F(x,z_1)-F(x,z_2)]\cdot\overline{[z_1-z_2]}=|z_1|^p-|z_1|^{p-2}z_1\,\overline{z_2}-|z_2|^{p-2}z_2\,\overline{z_1}+|z_2|^p.$$

Так как $\operatorname{Re}(z_1\,\overline{z_2})=\operatorname{Re}(z_2\,\overline{z_1})=x_1x_2+y_1y_2\leq\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2)=\frac{1}{2}(|z_1|^2+|z_2|^2)$, то

$$\operatorname{Re}\left\{[F(x,z_1)-F(x,z_2)]\cdot\overline{[z_1-z_2]}\right\}=|z_1|^p+|z_2|^p-(x_1x_2+y_1y_2)(|z_1|^{p-2}+|z_2|^{p-2})\geq$$

$$\geq|z_1|^p+|z_2|^p-\frac{1}{2}\,(|z_1|^2+|z_2|^2)(|z_1|^{p-2}+|z_2|^{p-2})=\frac{1}{2}\,(|z_1|^{p-2}-|z_2|^{p-2})(|z_1|^2-|z_2|^2)\geq 0\,,$$

т.е. выполнено условие 2).

Доказательство следующей теоремы основано на теореме Браудера-Минти (основной теореме теории монотонных операторов) [7], [8].

Теорема 1. *Пусть* $0<\alpha<1$, $2\leq p<\infty$ *и* $a(x),b(x)\in L_{2p/[p(1+\alpha)-2]}(R)$. *Если выполнены условия 1)–3), то уравнение*

$$F(x,u(x))+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[\overline{a(x)}\,b(t)-a(t)\,\overline{b(x)}]\,u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt=f(x)\tag{15}$$

имеет решение $u^*(x) \in L_p(R)$ при любом $f(x) \in L_{p'}(R)$. Решение единственно, если выполнено условие 5). Кроме того, если условие 3) выполнено при $D(x) = 0$, то справедлива оценка: $\|u^*\|_p \le \left(d_2^{-1}\|f\|_{p'}\right)^{1/(p-1)}$.

□ Запишем данное уравнение (15) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = Fu + Q^\alpha u$. Из условий 1)-3) вытекает, что оператор Немыцкого F действует из $L_p(R)$ в $L_{p'}(R)$ непрерывен, монотонен и коэрцитивен. В силу леммы 1 оператор Q^α действует из $L_p(R)$ в $L_{p'}(R)$ непрерывен и положителен. Следовательно, оператор A действует из $L_p(R)$ в $L_{p'}(R)$ непрерывен, монотонен и коэрцитивен, причем он строго монотонен, если выполнено условие 5). Значит, по теореме Браудера-Минти, уравнение $Au = f$, а с ним и данное уравнение (15), имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(R)$.

Осталось доказать оценку нормы решения $u^*(x)$. Так как $Au^* = f$, то используя условие 3) при $D(x) = 0$ и второе равенство из (3), имеем

$$d_2 \cdot \|u^*\|_p^p \le \mathrm{Re}\,\langle Fu^*, u^*\rangle = \mathrm{Re}\,\langle Fu^* + Q^\alpha u^*, u^*\rangle = \mathrm{Re}\,\langle f, u^*\rangle \le \|f\|_{p'} \cdot \|u^*\|_p\ ,$$

откуда легко получаем доказываемую оценку. ■

Аналогично, с использованием леммы 2 вместо леммы 1, доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $2/(1+\alpha) < p < \alpha^{-1}$ и $a(x) \in L_{p/[p(1+\alpha)-2]}(R)$. Если выполнены условия 1)–3), то уравнение*

$$F(x, u(x)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[\overline{a(x)} - a(t)\right] u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}} dt = f(x) \qquad (16)$$

имеет решение $u^*(x) \in L_p(R)$ при любом $f(x) \in L_{p'}(R)$. Решение единственно, если выполнено условие 5). Кроме того, если условие 3) выполнено при $D(x) = 0$, то справедлива оценка: $\|u^*\|_p \le \left(d_2^{-1}\|f\|_{p'}\right)^{1/(p-1)}$.

Рассмотрим теперь другой класс нелинейных уравнений с ядрами типа потенциала, соответствующий случаю когда нелинейность находится под знаком интеграла (такие нелинейные интегральные уравнения называют уравнениями типа Гаммерштейна). В данном случае применить непосредственно теорему Браудера-Минти нельзя, поскольку произведение монотонных операторов не является, вообще говоря, монотонным оператором и поэтому требуется другой подход к исследованию таких классов уравнений. Кроме того, в отличие от теоремы 1, при доказательстве следующей теоремы вместо леммы 1 используется лемма 3.

Теорема 3. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $1 < p \le 2$ и $a(x), b(x) \in L_{2p/[2-p(1-\alpha)]}(R)$. Если нелинейность $F(x, z)$ удовлетворяет условиям 1), 3) и 5), то уравнение*

$$u(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[\overline{a(x)} b(t) - a(t)\overline{b(x)}\right] F(t, u(t))\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}} = f(x) \qquad (17)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(R)$ при любом $f(x) \in L_p(R)$. Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при $c(x) = D(x) = 0$, то $\|u^*\|_p \le d_1\, d_2^{-1}\, \|f\|_p$.

□ Из условий 1), 3) и 5) следует, что оператор F отображает $L_p(R)$ на $L_{p'}(R)$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит [1], существует обратный оператор F^{-1}, отображающий $L_{p'}(R)$ на $L_p(R)$, хеминепрерывный, строго монотонный и коэрцитивный. Поэтому, с учетом леммы 3, имеем, что оператор $A = F^{-1} + Q^\alpha$ удовлетворяет условиям теоремы Браудера-Минти, т.е. он действует из $L_{p'}(R)$ в $L_p(R)$, хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, уравнение $F^{-1}v + Q^\alpha v = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_{p'}(R)$. Но тогда $u^* = F^{-1}v^* \in L_p(R)$ является решением уравнения $u + Q^\alpha F u = f$, т.е. данного уравнения (17). В самом деле, так как $F^{-1}v^* + Q^\alpha v^* = f$ и $F\,F^{-1}\psi = \psi, \quad \forall \psi \in L_{p'}(R)$, то

$$u^* + Q^\alpha F u^* = F^{-1}v^* + Q^\alpha F\,F^{-1}v^* = F^{-1}v^* + Q^\alpha v^* = f\ . \tag{18}$$

Докажем единственность решения уравнения (17). В самом деле, если допустить противное, что уравнение (17) имеет два различных решения u_1 и u_2, т.е. $u_1 + Q^\alpha F u_1 = f$ и $u_2 + Q^\alpha F u_2 = f$, то придем к противоречию:

$$0 = \mathrm{Re}\,\langle u_1 + Q^\alpha F u_1 - u_2 - Q^\alpha F u_2, F u_1 - F u_2\rangle =$$

$$= \mathrm{Re}\,\langle u_1 - u_2, F u_1 - F u_2\rangle + \mathrm{Re}\,\langle Q^\alpha (F u_1 - F u_2), F u_1 - F u_2\rangle = \mathrm{Re}\,\langle u_1 - u_2, F u_1 - F u_2\rangle > 0$$

так как, в силу условия 5), оператор F является строго монотонным.

Осталось доказать оценку нормы решения. Используя условия 1) и 3) (с учетом, что $c(x) = D(x) = 0$), второе равенство из (10), равенство (18) и неравенство Гельдера, имеем

$$d_2 \cdot \|u^*\|_p^p \le \mathrm{Re}\,\langle u^*, F u^*\rangle = \mathrm{Re}\,\langle u^* + Q^\alpha F u^*, F u^*\rangle = \mathrm{Re}\,\langle f, F u^*\rangle \le d_1 \cdot \|f\|_p \cdot \|u^*\|_p^{p-1}\ ,$$

откуда легко получаем доказываемую оценку. ■

Аналогично, с использованием леммы 4 вместо леммы 3, доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $[1-\alpha]^{-1} < p < 2/[1-\alpha]$ и $a(x) \in L_{p/[2-p(1-\alpha)]}(R)$. Если нелинейность $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 1), 3) и 5), то уравнение*

$$u(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{[\overline{a(x)} - a(t)]\, F(t, u(t))\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}} = f(x) \tag{19}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(R)$ при любом $f(x) \in L_p(R)$. Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при $c(x) = D(x) = 0$, то $\|u^*\|_p \le d_1\, d_2^{-1}\, \|f\|_p$.

Рассмотрим, наконец, уравнения, в которые интегральные операторы с ядрами типа потенциала входят нелинейно. Обратим внимание на то, что для таких уравнений ограничения на нелинейность подбираются таким образом, чтобы соответствующий оператор Немыцкого действовал непрерывно из сопряженного пространства $L_{p'}(R)$ в пространство $L_p(R)$, в котором отыскиваются решения, и был строго монотонным и коэрцитивным. А именно, в отличие от теорем 1–4, в следующих теоремах предполагается, что нелинейность F удовлетворяет условиям 4)–6), а не условиям 1)–3).

Теорема 5. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $2 \le p < \infty$ и $a(x), b(x) \in L_{2p/[p(1+\alpha)-2]}(R)$. Если нелинейность $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 4)-6), то уравнение*

$$u(x) + F\left(x,\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[\overline{a(x)}b(t) - a(t)\overline{b(x)}]\,u(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}\right) = f(x) \tag{20}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(R)$ при любом $f(x) \in L_p(R)$. Кроме того, если в условиях 4) и 6) $g(x) = 0$ и $D(x) = 0$, то справедлива оценка

$$\|u^* - f\|_p \le \left[d_3^p\, d_4^{-1}\, n(\alpha)\, \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\, \|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\, \|f\|_p\right]^{1/(p-1)}.$$

□ Из леммы 1 и условий 4)–6) вытекает, соответственно, что оператор $Q^\alpha : L_p(R) \to L_{p'}(R)$ непрерывен и положителен, а оператор $F : L_{p'}(R) \to L_p(R)$ непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит [1], существует хеминепрерывный, строго монотонный, коэрцитивный обратный оператор $F^{-1} : L_p(R) \to L_{p'}(R)$. Запишем уравнение (20) в операторном виде: $u + F\,Q^\alpha u = f$. Полагая в нем $u = f - v$ и применяя затем к обеим частям получающегося уравнения оператор F^{-1}, приходим к уравнению:

$$\Phi v = Q^\alpha f\ , \qquad \Phi v \equiv F^{-1}v + Q^\alpha v\ . \tag{21}$$

Поскольку оператор Φ удовлетворяет всем требованиям теоремы Браудера-Минти, то уравнение (21) имеет единственное решение $v^* \in L_p(R)$. Но тогда данное уравнение (20) имеет решение $u^* = f - v^* \in L_p(R)$. Покажем, что это решение единственно. Допустим противное, что уравнение (20) имеет два разных решения u_1 и u_2, т.е. $u_1 + FQ^\alpha u_1 = f$ и $u_2 + FQ^\alpha u_2 = f$. Тогда приходим к противоречию:

$$0 = \mathrm{Re}\,\langle u_1 + F\,Q^\alpha u_1 - u_2 - F\,Q^\alpha u_2, Q^\alpha u_1 - Q^\alpha u_2\rangle =$$

$$= \mathrm{Re}\,\langle u_1 - u_2, Q^\alpha(u_1 - u_2)\rangle + \mathrm{Re}\,\langle F\,Q^\alpha u_1 - F\,Q^\alpha u_2, Q^\alpha u_1 - Q^\alpha u_2\rangle =$$

$$= \mathrm{Re}\,\langle F\,Q^\alpha u_1 - F\,Q^\alpha u_2, Q^\alpha u_1 - Q^\alpha u_2\rangle > 0$$

так как, в силу условия 5), оператор F является строго монотонным.

Осталось доказать оценку нормы $\|u^* - f\|_p$. Воспользуемся доказанными равенствами $u^* + F\,Q^\alpha u^* = f$ и $F^{-1}v^* + Q^\alpha v^* = Q^\alpha f$, где $u^* = f - v^*$. Положим $\psi = F^{-1}v^*$. Тогда $F\psi = v^*$. Используя условия 4) и 6) при $g(x) = D(x) = 0$, соотношения (2) и (3), и неравенство Гельдера, имеем

$$d_4\,\|\psi\|_{p'}^{p'} \le \mathrm{Re}\,\langle F\psi, \psi\rangle = \mathrm{Re}\,\langle v^*, F^{-1}v^*\rangle = \mathrm{Re}\,\langle v^*, F^{-1}v^*\rangle + \mathrm{Re}\,\langle v^*, Q^\alpha v^*\rangle =$$

$$= \operatorname{Re}\langle v^*, Q^\alpha f\rangle \le \|v^*\|_p \, \|Q^\alpha f\|_{p'} \le \|v^*\|_p \, n(\alpha) \, \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]} \, \|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]} \, \|f\|_p =$$
$$= n(\alpha) \, \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]} \, \|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]} \, \|f\|_p \, \|F\psi\|_p \le$$
$$\le n(\alpha) \, \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]} \, \|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]} \, \|f\|_p \, d_3 \, \|\psi\|_{p'}^{p'-1} ,$$

откуда $\|\psi\|_{p'} \le d_3 \, d_4^{-1} \, n(\alpha) \, \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]} \, \|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]} \, \|f\|_p$. Так как $\|f - u^*\|_p = \|v^*\|_p = \|F\psi\|_p \le d_3 \, \|\psi\|_{p'}^{p'-1}$ то, используя предыдущую оценку и учитывая, что $p'-1 = 1/(p-1)$, получаем

$$\|u^* - f\|_p \le d_3 \left[d_3 \, d_4^{-1} \, n(\alpha) \, \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]} \, \|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]} \, \|f\|_p \right]^{1/(p-1)},$$

что равносильно доказываемой оценке. ■

Аналогично, с использованием леммы 2 вместо леммы 1, доказывается следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $2/[1+\alpha] < p < alpha^{-1}$ и $a(x) \in L_{p/[p(1+\alpha)-2]}(R)$. Если нелинейность $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 4)-6), то уравнение*

$$u(x) + F\left(x, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{[a(x)} - a(t)] \, u(t) \, dt}{|x-t|^{1-\alpha}}\right) = f(x) \tag{22}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(R)$ при любом $f(x) \in L_p(R)$. Кроме того, если в условиях 4) и 6) $g(x) = 0$ и $D(x) = 0$, то справедлива оценка

$$\|u^* - f\|_p \le \left[d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot n(\alpha) \, \|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]} \, \|b\|_{p/[p(1+\alpha)-2]} \, \|f\|_p \right]^{1/(p-1)}.$$

4. Приближенное решение уравнений в $L_2(R)$

Теоремы 1-6 предоставляют условия при которых существуют и единственны решения рассматриваемых уравнений в комплексных пространствах $L_p(R)$, однако они не содержат информации о том как можно найти эти решения.

В этой связи представляют интерес следующие теоремы, доказательство которых основано на комбинировании метода монотонных операторов и принципа сжимающих отображений, что возможно лишь при $p = 2$.

В этих теоремах предполагается, что нелинейность $F(x,z)$ почти при каждом $x \in R$ и всех $z_1, z_2 \in C$ удовлетворяет условиям:

7) $|F(x,z_1) - F(x,z_2)| \le M \cdot |z_1 - z_2|$;

8) $\operatorname{Re}\{(F(x,z_1) - F(x,z_2)) \cdot \overline{(z_1 - z_2)}\} \ge m \cdot |z_1 - z_2|^2$,

где $M > 0$ и $m > 0$ $(m \le M)$.

Заметим, что из условия 7) вытекает, что оператор Немыцкого F действует из $L_2(R)$ в $L_2(R)$, равномерно непрерывен и ограничен, а из условия 8) следует, что он является сильно монотонным. Более того, при этих условиях (см. [1]) существует обратный оператор $F^{-1} : L_2(R) \to L_2(R)$, причем $\forall u, v \in L_2(R)$ выполняются неравенства:

$$\|F^{-1}u - F^{-1}v\|_2 \leq \frac{1}{m}\,\|u-v\|_2\,,\ \operatorname{Re}\,(F^{-1}u - F^{-1}v, u-v) \geq \frac{m}{M^2}\,\|u-v\|_2^2. \tag{23}$$

Обозначим через N множество всех натуральных чисел. Покажем, что при выполнении условий 7) и 8) каждое из уравнений (15), (17) и (20) имеет в комплексном пространстве $L_2(R)$ единственное решение и (основной результат) это решение можно найти методом последовательных приближений пикаровского типа.

Теорема 7. *Пусть $a(x), b(x) \in L_{2/\alpha}(R)$, $0<\alpha<1$, а $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 7) и 8). Тогда при любом $f(x) \in L_2(R)$ уравнение (15) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(R)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:*

$$u_n = u_{n-1} - \mu_1\,(Fu_{n-1} + Q^\alpha u_{n-1} - f)\,, \qquad n \in \mathbf{N}\,, \tag{24}$$

причем справедлива оценка погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_2 \leq \mu_1\,\frac{\alpha_1^n}{1-\alpha_1}\,\|Fu_0 + Q^\alpha u_0 - f\|_2\,, \tag{25}$$

где $\mu_1 = m/(M + n(\alpha)\,\|a\|_{2/\alpha}\|b\|_{2/\alpha})^2$, $\alpha_1 = \sqrt{1 - m\,\mu_1} < 1$, $u_0(x) \in L_2(R)$ - произвольная функция.

□ Запишем данное уравнение (15) в операторном виде: $Au = f$, где $Au \equiv Fu + Q^\alpha u$. Так как $a(x), b(x) \in L_{2/\alpha}(R)$, то, в силу леммы 1, оператор Q^α действует непрерывно из $L_2(R)$ в $L_2(R)$ и является положительным оператором, причем $\forall u(x) \in L_2(R)$ выполняются неравенства

$$\|Q^\alpha u\|_2 \leq n(\alpha)\,\|a\|_{2/\alpha}\|b\|_{2/\alpha}\,\|u\|_2 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}\,(Q^\alpha u, u) = 0\,. \tag{26}$$

Из условия 7) следует, что оператор Немыцкого F действует непрерывно из $L_2(R)$ в $L_2(R)$ и удовлетворяет условию Липшица:

$$\|Fu - Fv\|_2 \leq M\,\|u-v\|_2\,, \quad \forall u, v \in L_2(R)\,, \tag{27}$$

а из условия 8) вытекает, что он является сильно монотонным:

$$\operatorname{Re}\,(Fu - Fv, u-v) \geq m\,\|u-v\|_2^2\,, \quad \forall u, v \in L_2(R)\,. \tag{28}$$

Используя соотношения (26)–(28), имеем

$$\|Au - Av\|_2 \leq \big(M + n(\alpha)\,\|a\|_{2/\alpha}\|b\|_{2/\alpha}\big)\,\|u-v\|_2\,, \tag{29}$$

$$\mathrm{Re}\,(Au - Av, u - v) \geq m\,\|u - v\|_2^2\,, \quad \forall u, v \in L_2(R)\,. \tag{30}$$

Из неравенств (29) и (30), в частности, вытекает, что оператор A действует непрерывно из $L_2(R)$ в $L_2(R)$, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, на основании теоремы Браудера-Минти, уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(R)$. Осталось доказать, что это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле (24) и что справедлива оценка скорости их сходимости (25). Для этого рассмотрим вспомогательное уравнение $u = \Phi\, u$, где $\Phi\, u \equiv u - \mu_1 \cdot (Au - f)$ (число μ определено в формулировке теоремы), которое эквивалентно данному уравнению $Au = f$. Очевидно, что оператор Φ действует непрерывно из $L_2(R)$ в $L_2(R)$ и, силу оценок (29) и (30), $\forall u(x), v(x) \in L_2(R)$ удовлетворяет неравенству:

$$\|\Phi\, u - \Phi\, v\|_2^2 = \|u - v\|_2^2 - 2\,\mu_1\,\mathrm{Re}\,(Au - Av, u - v) +$$

$$+\mu_1^2\,\|Au - Av\|_2^2 \leq \left[1 - m^2/(M + n(\alpha)\,\|a\|_{2/\alpha}\|b\|_{2/\alpha})^2\right]\,\|u - v\|_2^2\,,$$

т.е. $\|\Phi\, u - \Phi\, v\|_2 \leq \alpha_1\,\|u - v\|_2$, где α_1 определено в формулировке теоремы. Следовательно, доказываемые утверждения (24) и (25) непосредственно вытекают из принципа сжимающих отображений. ■

Теорема 8. *Пусть $a(x), b(x) \in L_{2/\alpha}(R)$, $0 < \alpha < 1$, а $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 7) и 8). Тогда при любом $f(x) \in L_2(R)$ уравнение (17) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(R)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:*

$$u_n = F^{-1} v_n\,, \quad v_n = v_{n-1} - \mu_2\,\left(Q^\alpha v_{n-1} + F^{-1} v_{n-1} - f\right)\,, \quad n \in N\,, \tag{31}$$

где $\mu_2 = m/[M\,(m^{-1} + n(\alpha)\,\|a\|_{2/\alpha}\|b\|_{2/\alpha})]^2$, F^{-1} есть оператор обратный к F. При этом справедлива оценка погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_2 \leq \frac{\mu_2}{m}\,\frac{\alpha_2^n}{1 - \alpha_2}\,\|Q^\alpha v_0 + F^{-1} v_0 - f\|_2\,, \tag{32}$$

где $\alpha_2 = \sqrt{1 - m\,\mu_2/M^2}$, а $v_0(x) \in L_2(R)$ - произвольная функция.

□ Из оценок (27) и (28) вытекает, что оператор Немыцкого F имеет обратный оператор $F^{-1} : L_2(R) \to L_2(R)$, причем $\forall u(x), v(x) \in L_2(R)$ выполняются неравенства (23). Запишем данное уравнение (17) в операторном виде:

$$u + Q^\alpha F u = f\,. \tag{33}$$

По теореме 3 оно имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(R)$. Осталось доказать, что последовательность (31) сходится к $u^*(x)$ и справедлива оценка (32). Для этого рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\Phi\, v = f\,, \quad \text{где} \quad \Phi\, v \equiv F^{-1} v + Q^\alpha v\,. \tag{34}$$

Очевидно (см. доказательство теоремы 3), что если $v^* \in L_2(R)$ является решением уравнения (34), то $u^* = F^{-1}v^* \in L_2(R)$ является решением уравнения (33). Поэтому достаточно доказать, что уравнение (34) имеет единственное решение $v^*(x) \in L_2(R)$, причем его можно найти по формуле (31) и справедлива оценка (32). Используя соотношения (26) и (23), $\forall u(x), v(x) \in L_2(R)$ имеем:

$$\|\Phi\, u - \Phi\, v\|_2 \leq (m^{-1} + n(\alpha)\, \|a\|_{2/\alpha}\|b\|_{2/\alpha})\, \|u - v\|_2 \,, \tag{35}$$

$$\operatorname{Re}\,(\Phi\, u - \Phi\, v, u - v) \geq m\, M^{-2}\, \|u - v\|_2^2 \,. \tag{36}$$

Далее, заменяя вспомогательное уравнение (34) на эквивалентное уравнение $v = \Psi\, v$, где $\Psi\, v \equiv v - \mu_2 \cdot (\Phi\, v - f)$, как и при доказательстве теоремы 7, приходим к неравенству

$$\|\Psi\, u - \Psi\, v\|_2^2 = \|u - v\|_2^2 - 2\,\mu_2\, \operatorname{Re}\,(\Phi u - \Phi v, u - v) + \mu_2^2\, \|\Phi u - \Phi v\|_2^2 \leq \left[1 - m\,\mu_2/M^2\right] \cdot \|u - v\|_2^2 \,,$$

т.е. $\|\Psi\, u - \Psi\, v\|_2 \leq \alpha_2 \cdot \|u - v\|_2$, где $\alpha_2 = \sqrt{1 - m\,\mu_2/M^2} < 1$. Следовательно, на основании принципа сжимающих отображений, уравнение $v = \Psi\, v$, а значит и уравнение (34), имеет единственное решение $v^*(x) \in L_2(R)$, причем последовательность

$$v_n = \Psi\, v_{n-1} = v_{n-1} - \mu_2\, \left(Q^\alpha v_{n-1} + F^{-1} v_{n-1} - f\right)\,,$$

т.е. последовательность (31), сходится к $v^*(x)$ и

$$\|v_n - v^*\|_2 \leq \frac{\alpha_2^n}{1 - \alpha_2}\, \|\Psi\, v_0 - v_0\|_2 = \mu_2\, \frac{\alpha_2^n}{1 - \alpha_2}\, \|Q^\alpha v_0 + F^{-1} v_0 - f\|_2 \,. \tag{37}$$

Наконец, замечая, что $v^* = F u^*$ и используя неравенства (23), (37), получаем

$$\|u_n - u^*\|_2 = \|F^{-1} v_n - F^{-1} v^*\|_2 \leq m^{-1}\, \|v_n - v^*\|_2 \leq \frac{\mu_2}{m}\, \frac{\alpha_2^n}{1 - \alpha_2}\, \|Q^\alpha v_0 + F^{-1} v_0 - f\|_2 \,,$$

т.е. справедливо неравенство (32). ■

Докажем, наконец, следующую теорему.

Теорема 9. *Пусть $a(x), b(x) \in L_{2/\alpha}(R)$, $0 < \alpha < 1$, а $F(x, z)$ удовлетворяет условиям 7) и 8). Тогда при любом $f(x) \in L_2(R)$ уравнение (20) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(R)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:*

$$u_n = u_{n-1} + \mu_2\, \left(F^{-1}(f - u_{n-1}) - Q^\alpha u_{n-1}\right)\,, \quad n \in N\,, \tag{38}$$

где $\mu_2 = m/[M\,(m^{-1} + n(\alpha)\, \|a\|_{2/\alpha}\|b\|_{2/\alpha})]^2$, F^{-1} есть оператор обратный к F. При этом справедлива оценка погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_2 \leq \mu_2\, \frac{\alpha_2^n}{1 - \alpha_2}\, \|F^{-1}(f - u_0) - Q^\alpha u_0\|_2 \,, \quad n \in N\,, \tag{39}$$

где $\alpha_2 = \sqrt{1 - m\,\mu_2/M^2}$, а $u_0(x) \in L_2(R)$ - произвольная функция.

□ Запишем уравнение (20) в операторном виде

$$u + FQ^\alpha u = f\,. \tag{40}$$

По теореме 5 уравнение (40) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2(R)$. Поэтому достаточно доказать, что последовательность (38) сходится к $u^*(x)$ и справедлива оценка (39). Обозначим $f - u = v$. Тогда уравнение (40) примет вид $FQ^\alpha(f - v) = v$. Применив к обеим частям последнего уравнения оператор F^{-1}, приходим к уравнению вида (34):

$$Av = Q^\alpha f\,, \quad \text{где} \quad Av \equiv F^{-1}v + Q^\alpha v\,. \tag{41}$$

Точно так же, как и при доказательстве теоремы 8, получаем, что уравнение (41) имеет единственное решение $v^*(x) = f(x) - u^*(x) \in L_2(R)$, причем последовательность

$$v_n = v_{n-1} - \mu_2\,(Av_{n-1} - Q^\alpha f) = v_{n-1} - \mu_2\,(F^{-1}v_{n-1} + Q^\alpha v_{n-1} - Q^\alpha f) \tag{42}$$

сходится к $v^*(x)$ и

$$\|v_n - v^*\|_2 \le \mu_2\,\frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2}\,\|F^{-1}v_0 + Q^\alpha v_0 - Q^\alpha f\|_2\,. \tag{43}$$

Но тогда $u^*(x) = f(x) - v^*(x) \in L_2(R)$ является (см. доказательство теоремы 5) единственным решением уравнения (40) и, в силу связи $v_n = f - u_n$, из (42) и (43) получаем

$$f - u_n = f - u_{n-1} - \mu\,(F^{-1}(f - u_{n-1}) - Q^\alpha u_{n-1})\,, \quad \|u_n - u^*\|_2 \le \mu_2\,\frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2}\,\|F^{-1}(f - u_0) - Q^\alpha u_0\|_2\,,$$

т.е. справедливы утверждения (38) и (39). ■

Аналоги теорем 7–9 можно доказать и для уравнений (16), (19) и (22), соответственно. В случае вещественных пространств $L_2(-\infty, \infty)$ эти аналоги доказаны в [9]. Заметим также, что следствия 2–4, приведенные в работе [1], относятся к случаю *вещественных* пространств Лебега.

5. Заключение

Применение метода монотонных (по Браудеру-Минти) операторов позволяет получить глобальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений для различных классов нелинейных интегральных уравнений без ограничений на абсолютную величину параметров (см., например, [10], [11], [12]) и область существования решений. Поскольку, согласно леммам 1–4, операторы типа потенциала Q^α и A^α, подобно сингулярным интегральным операторам [4], [5], [10]–[12], обладают свойством $\mathrm{Re}\,\langle Q^\alpha u, u\rangle = \mathrm{Re}\,\langle A^\alpha u, u\rangle = 0$, то утверждения, например, теорем 1, 3 и 5 о существовании и единственности решения сохраняются, соответственно, для уравнений

$$F(x, u(x)) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[\overline{a(x)}\,b(t) - a(t)\,\overline{b(x)}]\,u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt = f(x)\,,$$

$$u(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{[\overline{a(x)}b(t) - a(t)\overline{b(x)}]\, F(t, u(t))\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}} = f(x)\,,$$

$$u(x) + \lambda \cdot F\left(x, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{[\overline{a(x)}b(t) - a(t)\overline{b(x)}]\, u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}}\right) = f(x)$$

при любом (не обязательно «малом») $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Полученные в данной работе результаты могут послужить основой для исследования подобных уравнений в случае, когда параметр λ может принимать комплексные значения.

Литература

1. Асхабов С.Н. Интегральные уравнения с ядрами типа потенциала в весовых комплексных пространствах Лебега // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2010. – №5(76);18. – С.33-47.

2. Tracy C.A., Widom H. Fredholm determinantes, differential equations and matrix models // Communications in Mathematical Physics. – 1994. – 163;2. – P.33-72.

3. Цегельник В.В. Гамильтонианы, ассоциированные с третьим и пятым уравнениями Пенлеве // Теоретическая и математическая физика. – 2010. – 162;1. – С.69-74.

4. Askhabov S.N. Singular integral equations with monotone nonlinearity in complex Lebesgue spaces // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. – 1992. – 11;1. – P.77-84.

5. Askhabov S.N. Nonlinear singular integral equations in Lebesgue spaces // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – 173;2. – P.155-171.

6. Асхабов С.Н. Об одном нелинейном уравнении с весовым оператором типа потенциала / Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Математическое моделирование и краевые задачи. – Самара: СамГТУ, 2011. – С.24-27.

7. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

8. Дубинский Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Современные проблемы математики. Т. 9 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). – М.: ВИНИТИ, 1976. – С.5-130.

9. Асхабов С.Н. Приближенное решение нелинейных уравнений с весовыми операторами типа потенциала // Уфимский математический журнал. – 2011. – 3;4. – С.8-13.

10. Асхабов С.Н. Применение метода монотонных операторов к некоторым нелинейным уравнениям типа свертки и сингулярным интегральным уравнениям // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1981. – 9. – С.64-66.

11. Асхабов С.Н., Мухтаров Х.Ш. Оценки решений некоторых нелинейных уравнений типа свертки и сингулярных интегральных уравнений // Доклады АН СССР. – 1986. – 288;2. – С.275-278.

12. Асхабов С.Н., Мухтаров Х.Ш. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений типа свертки // Дифференциальные уравнения. – 1987. – 23;3. – С.512-514.

NONLINEAR EQUATIONS WITH WEIGHTED POTENTIAL TYPE KERNELS IN COMPLEX LEBESGUE SPACES

S.N. Askhabov

Chechen State University,
Kiev St., 33, Grozny, 364037, Russia, e-mail: askhabov@yandex.ru

Abstract. In complex Lebesgue spaces, by method of monotone operators, theorems on existence, uniqueness and approximation of solutions are proved for some classes of nonlinear integral equations with weighted potential type kernels. Some estimations are obtained for norms of solution and convergence rate of Picard's type approximations.

Key words: nonlinear integral equations, potential type operators, method of monotone operators.