УДК 517.63

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГРЭДА-ШАФРАНОВА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ [1)]

С.И. Безродных*,, В.И. Власов***

*Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия, e-mail: vlasov@ccas.ru;
**Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга МГУ,
пр. Университетский, 13, Москва, 119992, Россия, e-mail: sergeyib@pochta.ru

Аннотация. Рассматривается обратная задача для уравнения Грэда-Шафранова с аффинной правой частью $\Delta u = au + b$ в плоских односвязных областях с кусочно–гладкой границей Γ, на которой задано однородное условие Дирихле. Эта задача, возникающая при изучении движения плазмы в токамаке, заключается в восстановлении неизвестных значений параметров a и b уравнения на основе информации о нормальной производной $\partial_\nu u(x)$ на Γ. В работе установлено, что эти параметры могут быть найдены из нелокального условия $\int_\Gamma \partial_\nu u(x)\, ds = 1$ и заданного значения нормальной производной $\partial_\nu u(x)$ в любой одной точке x из специального подмножества $\widetilde{\Gamma}$ границы Γ, и для этого необходимо и достаточно, чтобы значение $\partial_\nu u(x)$ принадлежало (зависящему от $x \in \widetilde{\Gamma}$) полуинтервалу $\mathcal{J}(x)$. Предложен метод нахождения указанных параметров, включающий способ отыскания множества $\widetilde{\Gamma}$ и полуинтервала $\mathcal{J}(x)$. Эти результаты получены с помощью метода мультиполей, обеспечивающего высокоточное вычисление нормальной производной $\partial_\nu u(x)$, и найденных при $a \to \infty$ асимптотик для $\partial_\nu u(x)$ и $\frac{d}{da}\,\partial_\nu u(x)$, $x \in \Gamma$ при указанном выше нелокальном условии.

Ключевые слова: уравнение Грэда-Шафранова, обратные задачи, нелокальные условия, метод мультиполей.

1. Введение

1.1. Уравнение Грэда–Шафранова. Как известно, движение плазмы в токамаке [1]-[3] при условии ее равновесия, рассматриваемое в приближении идеальной магнитной гидродинамики [4]-[9], описывается уравнением Грэда–Шафранова [10]-[13].

Для упрощения этого уравнения нередко используют цилиндрическое приближение [4], [6]-[9], [14], которое соответствует предельному случаю, когда радиус торообразной камеры токамака стремится к бесконечности и одновременно ось ее аксиальной симметрии отодвигается на бесконечность так, что тор превращается в цилиндр с тем же, что и исходный тор, поперечным сечением $\mathcal{S}$. Введем декартовы координаты $(x_1,\, x_2,\, x_3)$, где ось x_3 совпадает с продольной осью цилиндра. Движение плазмы осуществляется в соосном цилиндре, называемом плазменным шнуром, с поперечным сечением $G \subset \mathcal{S}$, расположенным в плоскости с двумерной координатой $x = (x_1,\, x_2)$. Для возникающего

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-00837), Программы ОМН РАН «Современные проблемы теоретической математики», проект «Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики» и Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

здесь магнитного поля единственной отличной от тождественного нуля компонентой векторного потенциала является продольная (вдоль оси x_3) компонента $v(x)$, которая описывается уравнением Грэда–Шафранова в цилиндрическом приближении, имеющем вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} =: \Delta v = \mathcal{F}(v)\,. \tag{1.1}$$

Фигурирующая в его правой части функция $\mathcal{F}(v)$ зависит только от магнитного потенциала v; если эту правую часть рассмотреть как функцию координат $\mathcal{F}\left[v(x)\right] =: j(x)$, то она будет представлять собой распределение плотности тока, взятое с обратным знаком.

Следует отметить, что вид функции $\mathcal{F}(v)$ заранее неизвестен, и, таким образом, уравнение (1.1) не вполне определено. Для его конкретизации, следуя работам [15]-[21], примем, что она имеет аффинный вид, $\mathcal{F}(v) = a\,v + b$, где a и b – неизвестные параметры, подлежащие нахождению. Тогда связь между взятой со знаком «минус» плотностью тока и потенциалом $v(x)$ будет определяться равенством

$$j(x) \;=\; a\,v(x) \,+\, b, \tag{1.2}$$

а уравнение (1.1) приобретет вид

$$\Delta v(x) = a\,v(x) \,+\, b\,, \qquad x \in G\,; \tag{1.3}$$

его называют уравнением Грэда–Шафранова с аффинной правой частью. Отметим, что на границе Γ сечения G возникает однородное условие Дирихле

$$v(x) \;=\; 0\,, \quad x \in \Gamma\,, \tag{1.4}$$

а магнитное поле $\vec{B}$ на Γ выражается через градиент потенциала по формуле

$$\vec{B}(x) \;=\; -\,\partial_\nu v(x)\;\vec{\tau}(x)\,, \tag{1.5}$$

где $\vec{\tau}$ – единичный касательный вектор к Γ, а $\partial_\nu v$ – производная по внешней нормали к контуру Γ. Краевую задачу (1.3), (1.4) будем называть задачей $(\mathfrak{D})$

1.2. Обратная задача для уравнения Грэда–Шафранова с аффинной правой частью. Итак, пусть требуется провести расчет магнитного поля в плазменном шнуре, предполагая, что его сечение G известно. Ограничившись для описания поля уравнением Грэда–Шафранова с аффинной правой частью, видим, что этот расчет сводится к решению задачи $(\mathfrak{D})$. Однако, эта задача не полностью определена, поскольку входящие в уравнение (1.3) параметры a и b неизвестны.

Определить эти параметры из априорных физических соображений или непосредственно из физического эксперимента весьма затруднительно. Вместе с тем, магнитное поле на границе Γ может быть экспериментально измерено, а это согласно формуле (1.5) эквивалентно заданию нормальной производной $\partial_\nu u(x,a)$ на Γ. В связи с этим и возникает задача о нахождении параметров a и b по информации о нормальной производной, называемая обратной задачей для уравнения Грэда–Шафранова с аффинной правой частью и обозначаемая ($\mathfrak{D}^{-1}$). Решение этой задачи дает значения параметров a, b и, тем самым, позволяет полностью определить задачу (1.3), (1.4), решение которой и представляет искомое магнитное поле.

В ряде работ рассматривалась подобная обратная задача, точнее говоря, задача об определении параметров a и b из требования, что нормальная производная решения краевой задачи (1.3), (1.4) совпадает с заданной функцией $\mu(x)$, $x \in \Gamma$, т.е. выполняется равенство $\partial_\nu v(x) = \mu(x)$ на всей границе Γ. В статьях [15]-[19] было установлено, что такая обратная задача имеет не более, чем конечное число решений, а в [20] – что не более одного решения для специального класса областей с узкими перешейками.

1.3. Обратная задача для уравнения Грэда–Шафранова с нелокальным условием. Еще один шаг к преодолению неопределенности уравнения (1.3) и упрощению обратной задачи может быть сделан (см. работы [18]-[21]), исходя из того, что в физическом эксперименте с высокой точностью может быть измерен полный ток, протекающий через сечение G. Это означает, что может быть задана величина $\int_G \Delta v dx = C_0$, а надлежащий выбор единицы силы тока позволяет принять $C_0 = 1$. Отсюда после применения формулы Грина $\int_G \Delta v dx = \int_\Gamma \partial_\nu\, v\, ds$, где ds – элемент длины дуги Γ, получаем нелокальное условие

$$\int_\Gamma \partial_\nu\, v(x)\, ds = 1\,, \tag{1.6}$$

из которого, как показано ниже в разд. 3, вытекает выражаемая в явном виде связь $b = b(a)$ между параметрами a и b.

Таким образом, если к уравнению (1.3) и краевому условию (1.4) присоединить нелокальное условие (1.6), то получим задачу, обозначаемую далее ($\mathfrak{A}$), зависящую лишь от одного параметра a. Под обратной задачей ($\mathfrak{A}^{-1}$) для уравнения Грэда–Шафранова с нелокальным условием будем подразумевать задачу о нахождении параметра a по информации о нормальной производной $\partial_\nu\, v(x)$, где $v(x)$ удовлетворяет условиям задачи ($\mathfrak{A}$). В п. 4.2 приведена более строгая формулировка задачи ($\mathfrak{A}^{-1}$), доказана ее однозначная разрешимость и предложен метод решения.

2. ЗАДАЧА ($\mathfrak{D}$)

2.1. Постановка задачи ($\mathfrak{D}$). Пусть G – жорданова область с границей Γ, состоящей из конечного числа $C^{3,\alpha}$ -гладких дуг, $\alpha \in (0,1)$, соединяющихся между собой под (измеряемыми по области) углами $\pi\beta_n$, подчиненными включению

$$\beta_n \in (0,\, 2)\,, \tag{2.1}$$

т.е. без внешних и внутренних заострений. Контур Γ без угловых точек обозначим Γ_0. Через λ_m, $m \in \mathbb{N}$, обозначим собственные числа оператора Лапласа в области G с однородным условием Дирихле на Γ, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Задачу о нахождении функции $v \in C^2\,(G) \cap C\,(\overline{G}\,)$, удовлетворяющей соотношениям

$$\Delta\, v(x) \;=\; a\, v(x) \,+\, b, \quad x \in G, \qquad\qquad v(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{2.2}$$

где параметр a подчиняется условию $a \neq -\lambda_m$, $m \in \mathbb{N}$, называем *задачей* $(\mathfrak{D})$. Известно, что эта задача однозначно разрешима. При необходимости подчеркнуть зависимость решения $v(x)$ задачи $(\mathfrak{D})$ или правой части $j(x) = av(x) + b$ уравнения (2.2) от параметров a и b будем использовать обозначения $v(x; a, b)$ и $j(x; a, b)$.

2.2. Краевая задача для плотности тока и условия его однонаправленности. Нетрудно убедится, что функция $j(x)$, представляющая собой взятую с обратным знаком плотность тока, удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, точнее говоря, имеет место

Лемма 1. *Для того чтобы $v(x)$ являлось решением задачи $(\mathfrak{D})$ необходимо, а при $a \neq 0$ и $a \neq -\lambda_m$, $m \in \mathbb{N}$, достаточно, чтобы функция $j(x) = av(x) + b$ была решением следующей задачи:*

$$\Delta j(x) - a\, j(x) = 0, \qquad x \in G, \tag{2.3}$$

$$j(x) = b, \qquad x \in \Gamma. \tag{2.4}$$

С физической точки зрения важным вопросом является выяснение условий на параметры a и b уравнения Грэда–Шафранова (2.2), при которых ток по всему сечению G течет в одну сторону (что всегда выполняется в токамаке), т.е. при которых функция $j(x)$ является положительной. Эти условия устанавливает следующая

Теорема 1. *Для того чтобы функция $j(x) = av(x) + b$, где $v(x)$ – решение задачи $(\mathfrak{D})$, удовлетворяла неравенству*

$$j(x) > 0, \quad x \in \overline{G}, \tag{2.5}$$

необходимо и достаточно, чтобы параметры a и b задачи $(\mathfrak{D})$ подчинялись условиям

$$\text{(i) } b > 0, \qquad \text{(ii) } a > -\lambda_1. \tag{2.6}$$

□ Необходимость. Если выполняется (2.5), то $j(x) > 0$ на Γ. Отсюда и из (2.4) следует условие (i).

Обратимся к доказательству необходимости условия (ii). Обозначим через $U_1(x)$ первую собственную функцию $U_1(x)$ оператора Лапласа в G; она удовлетворяет условиям

$$\Delta U_1(x) = -\lambda_1 U_1(x), \quad x \in G, \qquad \psi_1(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2.7}$$

Кроме того, она знакопостоянна в G. Для определенности будем считать ее положительной; тогда согласно лемме Жиро–Хопфа–Олейник [22]-[28] ее нормальная производная на множестве Γ_0 всех точек гладкости границы Γ будет отрицательна, т.е.

$$U_1(x) > 0, \quad x \in G; \qquad \partial_\nu U_1(x) < 0, \quad x \in \Gamma_0. \tag{2.8}$$

Умножая обе части уравнения (2.3) на U_1 и интегрируя по области G, получаем

$$\int_G \Delta j(x)\, U_1(x)\, dx - a \int_G j(x)\, U_1(x)\, dx = 0. \tag{2.9}$$

Применяя формулу Грина к первому интегралу в левой части и учитывая равенства (2.7) для U_1 и краевое условие (2.4) для $j(x)$, находим

$$\int_G \Delta\, j(x)\, U_1\,(x)\, dx \;=\; -\lambda_1 \int_G j(x)\, U_1\,(x)\, dx \;-\; b \int_\Gamma \partial_\nu U_1(x) ds. \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в (2.9), получаем тождество

$$(a\,+\,\lambda_1) \int_G j(x)\, U_1\,(x)\, dx \;=\; -\,b \int_\Gamma \partial_\nu U_1(x) ds. \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что если неравенство (2.5) выполнено, то из доказанного необходимого условия (i) и соотношений (2.8) вытекает неравенство $a + \lambda_1 > 0$. Таким образом, необходимость условия (ii) доказана.

Достаточность. Предположим вначале, что выполнены условия

$$\text{(i) } b > 0, \qquad\qquad \text{(iii) } a \geq 0. \tag{2.12}$$

Тогда неравенство (2.5) вытекает из принципа максимума [22], [23], [28] для уравнения (2.3).

Пусть теперь

$$\text{(i) } b > 0, \qquad\qquad \text{(iv) } a \in (-\lambda_1,\, 0). \tag{2.13}$$

В силу условия (i) существует примыкающая к Γ подобласть G^+ области G («приграничная полоса»), в которой функция $j(x)$ положительна.

Покажем, что при условиях (2.13) величина $j(x)$ не может принимать в области G отрицательных значений. Пусть, напротив, множество $G^- := \{x : j\,(x) < 0\}$ не пусто. Оно является строго внутренним по отношению к области G и открытым, ибо каждая его точка $\tilde{x}$ входит в G^- вместе с некоторой своей окрестностью в силу неравенства $j\,(\tilde{x}) < 0$ и непрерывности $j(x)$ в $\overline{G}$. Из указанной непрерывности также следует, что на границе ∂G^- функция $j(x)$ обращается в нуль.

Обозначим через $\mathcal{G}^-$ некоторую компоненту связности множества G^-, через $\lambda_1(\mathcal{G}^-)$ — первое собственное число оператора Лапласа для области $\mathcal{G}^-$ с нулевым условием Дирихле на ее границе, а через $\lambda_1(G)$ — такое же собственное число для области G. В силу сказанного функция $j(x)$, знакопостоянная $\mathcal{G}^-$, удовлетворяет условиям

$$\Delta\, j(x) \,-\, a\, j(x) \,=\, 0, \quad x \in \mathcal{G}^-, \qquad j(x) = 0, \quad x \in \partial\mathcal{G}^-, \tag{2.14}$$

а следовательно, является первой собственной функцией оператора Лапласа в области $\mathcal{G}^-$, а параметр $(-a)$ — первым собственным числом, т.е.

$$a = -\lambda_1(\mathcal{G}^-). \tag{2.15}$$

Поскольку $\mathcal{G}^- \subset G$, то согласно теоремам сравнения собственных чисел (см., например, [23]) выполняется неравенство $\lambda_1(\mathcal{G}^-) \geq \lambda_1(G)$. Отсюда и из (2.15) следует $a \leq -\lambda_1(G)$.

Полученное противоречие с условием (iv) означает, что множество G^- пусто. Таким образом, установлено, что при условиях (2.13) функция $j(x)$ неотрицательна в G,

$$j(x) \geq 0, \qquad x \in G. \tag{2.16}$$

Докажем, что она не может принимать в области G и нулевых значений. Предварительно покажем, что значение функции j в произвольной точке $x_0 \in G$ выражается через его значения на окружности $\mathbb{T}_\varepsilon(x_0) \subset G$ радиуса ε с центром в этой точке по формуле

$$j(x_0) = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon\, J_0(\sqrt{-a}\varepsilon)} \int_{\mathbb{T}_\varepsilon(x_0)} j\,(x)\,ds, \tag{2.17}$$

где $J_0(\zeta)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка [29], а ds – элемент длины окружности $\mathbb{T}_\varepsilon(x_0)$. Действительно, в круге $\mathbb{U}_\varepsilon(x_0)$ радиуса ε с центром в x_0, лежащем строго в G, функция $j(x)$ представима [30] следующим рядом, получаемым методом Фурье:

$$j(x) = A_0\, J_0(\sqrt{-a}\, r) + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(\sqrt{-a} r)\big[A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)\big],$$

где (r, φ) – полярные координаты с центром в точке x_0, а $J_k(\zeta)$ – функции Бесселя первого рода k–го порядка [29]. Из такого представления с учетом равенств $J_0(0) = 1$ и $J_k(0) = 0$, $k > 0$, вытекает что

$$j(x_0) = A_0, \qquad A_0 = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon\, J_0(\sqrt{-a}\varepsilon)} \int_{\mathbb{T}_\varepsilon(x_0)} j\,(x)\,ds,$$

откуда и следует (2.17).

Теперь, рассуждая от противного, допустим, что в некоторой точке $x_0 \in G$ имеем

$$j(x_0) = 0. \tag{2.18}$$

Из неравенства (2.16) и формулы (2.17) вытекает, что это равенство возможно только в случае, когда

$$j(x) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{T}_\varepsilon(x_0). \tag{2.19}$$

Отсюда, учитывая, что функция $j(x)$ удовлетворяет уравнению $\Delta j(x) - a j(x) = 0$ в круге $\mathbb{U}_\varepsilon(x_0)$ и, согласно (2.16), неотрицательна в нем, получаем, что она является первой собственной функцией оператора Лапласа в $\mathbb{U}_\varepsilon(x_0)$ и $a = -\lambda_1(\mathbb{U}_\varepsilon(x_0))$. Поскольку $\mathbb{U}_\varepsilon(x_0) \subset G$, то из теоремы о сравнении собственных чисел вытекает $a \leq -\lambda_1(G)$. Полученное противоречие с условием (iv) показывает невозможность равенства (2.18).

Таким образом, установлено, что если выполняются условия (2.13), то справедливо неравенство (2.5). Тогда, учитывая, что доказана и достаточность условий (2.12), устанавливаем достаточность условий (2.6). ■

Отметим, что необходимость условий (2.6) для выполнения неравенства (2.5) была ранее доказана в [15] (см. также [19]) при помощи аналогичного подхода, но примененного не к краевой задаче (2.3), (2.4) для $j(x)$, а к задаче ($\mathfrak{D}$) для функции $v(x)$. Вопрос о достаточности этих условий, по–видимому, оставался открытым.

2.3. Асимптотика для $j\,(x;a,b)$ и среднего значения функции Грина при $a\to\infty$. Прежде всего заметим, что с помощью замены

$$v(x)=b\,V(x), \tag{2.20}$$

задача $(\mathfrak{D})$, зависящая от двух параметров a и b, сводится к частрому виду этой задачи

$$\Delta\,V(x)\,-\,a\,V(x)\,=\,1,\quad x\in G;\qquad V(x)=0,\quad x\in\Gamma\,, \tag{2.21}$$

соответствующему $b=1$ и, таким образом, зависящему только от a.

Расссмотрим вопрос об асимптотике решения $v(x;a,b)$ задачи $(\mathfrak{D})$ и асимптотике его производных при $a\to\infty$ и фиксированном b. В работах [16], [18]-[21] такие асимптотики были получены для случая $C^{3,\,\alpha}$ -гладкого контура Γ. Можно показать, что они сохраняются и для рассматриваемого случая кусочно $C^{3,\,\alpha}$–гладкого контура Γ (при этом асимптотики для нормальной производной и ее производной по a будут справедливы не на всем контура Γ, а лишь на его гладкой части Γ_0). Приведем эти асимптотики для решения $V(x,\,a)$ задачи (2.21), которая эквивалентна задаче $(\mathfrak{D})$ в силу равенства (2.20), но более проста, поскольку, в отличие от $(\mathfrak{D})$, не содержит параметра b.

Введем обозначения: $r(x)$ – расстояние от точки $x\in G$ до границы Γ, $k(x)$ — кривизна контура Γ в точках x его гладкости, т.е. на Γ_0. Указанная асимптотика для $V(x,\,a)$, где r достаточно мало, имеет вид

$$V(x,\,a)\,=\,-\,a^{-1}\,+\,e^{-r\,(x)\sqrt{a}}\left[a^{-1}\,+\,O\big(a^{-3/2}\big)\right],\qquad a\,\to\,\infty,\quad x\in G, \tag{2.22}$$

а асимптотики для производных на границе – следующий вид:

$$\partial_\nu V(x,\,a)\,=\,a^{-1/2}\,-\,\frac{k\,(x)}{2}a^{-1}\,+\,O\left(a^{-3/2}\right),\qquad a\,\to\,\infty,\qquad x\in\Gamma_0, \tag{2.23}$$

$$\frac{d}{da}\,\partial_\nu V(x,\,a)\,=\,-\frac{1}{2}\,a^{-3/2}\,+\,\frac{k\,(x)}{2}a^{-2}\,+\,O\left(a^{-5/2}\right),\qquad a\,\to\,\infty,\qquad x\in\Gamma_0. \tag{2.24}$$

Аналогичные асимптотики для задачи $(\mathfrak{D})$, очевидно, получаются из формул (2.22)–(2.24) умножением их правой части на b и заменой V на v в левой части.

Обратимся к выводу асимптотик при $a\to\infty$ для $j\,(x;a,b)$ и среднего значения функции Грина. Предварительно заметим, что средняя кривизна $\widehat{k}$ контура Γ, определяемая выражением

$$\widehat{k}:=|\Gamma|^{-1}\int_\Gamma k(x)ds, \tag{2.25}$$

дается с учетом равенства

$$\int_\Gamma k(s)\,ds\;=\;2\pi \tag{2.26}$$

следующей формулой:

$$\widehat{k}=2\pi\,|\Gamma|^{-1}\,, \tag{2.27}$$

которая верна не только для очевидного случая дважды гладких контуров, но также и для рассматриваемого случая кусочно гладких контуров Γ, только в последнем случае интегралы в (2.26), (2.25) следует понимать в смысле Стилтьеса [31].

Заметим еще, что решение задачи (2.2) выписывается через функцию Грина $\mathcal{G}_a(x,y)$ этой задачи по формуле

$$v(x) = -b \int_G \mathcal{G}_a(x,y)dy. \tag{2.28}$$

Обозначим через $|G|$ площадь области G. При условиях задачи $(\mathfrak{D})$ для среднего значения функции Грина (умноженного на $|G|^2$) и правой части

$$j\,(x;a,b) = a\,v(x;a,b) + b \tag{2.29}$$

уравнения (2.2) имеет место следующее

Предложение 1. *Для функций $j\,(x;a,b)$ и $\mathcal{G}_a(x,y)$ справедливы асимптотики:*

$$j(x;a,b) \;=\; b\,e^{-r\,(x)\sqrt{a}}\left[1 \,+\, O\big(a^{-1/2}\big)\right], \qquad a \to \infty, \quad x \in G, \tag{2.30}$$

$$\int_G\int_G \mathcal{G}_a(x,\,y)\,dxdy \;=\; |G|\,a^{-1} \,-\, |\Gamma|\,a^{-3/2} \,+\, \pi\,a^{-2} \,+\, O\big(a^{-5/2}\big), \qquad a \to \infty. \tag{2.31}$$

□ Формула (2.30) получается путем подстановки (2.22) в (2.20), а результата — (2.29). Обратимся к доказательству соотношения (2.31). Интегрируя обе части уравнения (2.2) по области G с учетом формулы Грина $\int_G \Delta v(x)dx = \int_\Gamma \partial_\nu v(x)ds$, получаем

$$\int_\Gamma \partial_\nu v(x)ds = a\int_G v(x)dx + b\,|G|.$$

Подставляя в правую часть этого равенства выражение (2.28), находим следующее выражение для (умноженного на $|G|^2$) среднего значения функции Грина:

$$\int_G\int_G \mathcal{G}_a(x,\,y)\,dxdy \;=\; (ab)^{-1}\Big[b\,|G| - \int_\Gamma \partial_\nu v(x)ds\Big]. \tag{2.32}$$

Подставим в правую часть соотношения (2.32) асимптотику для $\partial_\nu v(x)$ при $a \to \infty$, получаемую в соответствии с (2.20) путем умножения (2.23) на b, и учтем равенство (2.26) для интеграла от кривизны. Тогда получим требуемую формулу (2.31). ■

3. Задача $(\mathfrak{A})$

Прежде чем обратиться (в пп. 3.3-3.5) к задаче $(\mathfrak{A})$, рассмотрены две вспомогательные задачи: в п. 3.1 – однородная задача Дирихле для уравнения Гельмгольца с правой частью из $L_2(G)$ и в п. 3.2 – такая же задача, дополненная нелокальным условием. Последние две задачи, первая из которых обозначена через $(\mathfrak{D})_f$, а вторая – через $(\mathfrak{A})_f$, очевидно, являются, обобщениями соответственно задач $(\mathfrak{D})$ и $(\mathfrak{A})$ и превращаются в них при $f(x) \equiv b$.

В п. 3.3 указаны условия разрешимости задачи $(\mathfrak{A})$, установлена положительность параметра b и правой части $j(x) = au(x) + b$ уравнения Грэда–Шафранова при условиях этой задачи и, кроме того, задача $(\mathfrak{A})$ сведена к частному виду задачи $(\mathfrak{D})$, соответствующему $b = 1$. В п. 3.4 найдены асимптотики при $a \to -\lambda_1$ для решения $u(x,\, a)$ задачи $(\mathfrak{A})$ и его нормальной производной на границе. В п. 3.5 получены асмптотики при $a \to \infty$ для $u(x,\, a)$, производных $\partial_\nu u(x,\, a)$ и $\frac{d}{da}\,\partial_\nu u(x, a)$, а также для параметра b, функции $j(x; a)$ и ее нормальной производной.

3.1. Задача $(\mathfrak{D})_f$. Пусть область G отвечает требованиям, указанным в п. 2.1, а функция $v(x)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta\, v(x) - a\, v(x) \;=\; f(x), \quad x \in G\,, \qquad\qquad v(x) = 0, \quad x \in \Gamma\,, \tag{3.1}$$

где правая часть уравнения $f(x)$ принадлежит $L_2(G)$, а параметр a подчинен требованию

$$a > -\lambda_1\,, \tag{3.2}$$

совпадающему с условием (ii) из теоремы 1. Рассматривается обобщенное из $W_2^1(G)$ решение задачи (3.1), понимаемое согласно [22] как функция $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_G \big(\nabla v \cdot \nabla \eta \,+\, a\, v\eta\big) dx \;=\; -\int_G f\, \eta\, dx \tag{3.3}$$

для всех $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$. *Краевую задачу (3.1), понимаемую в указанном смысле, будем называть задачей* $(\mathfrak{D})_f$.

Как известно [22], [23], [32], решение v задачи $(\mathfrak{D})_f$ существует и единственно. Кроме того, из теорем о повышении гладкости [33]-[40] с учетом (2.1) следует, что v принадлежит пространству Соболева — Слободецкого $W_2^{3/2+\varepsilon}(G)$ с некоторым $\varepsilon > 0$, а его нормальная производная $\partial_\nu v$ на границе — пространству L_2, т.е. выполняются включения

$$v \,\in\, W_2^{3/2+\varepsilon}(G) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G), \quad \exists\, \varepsilon > 0; \qquad \partial_\nu\, v \,\in\, L_2\,(\Gamma)\,. \tag{3.4}$$

Если же правая часть уравнения гёльдерова, то то задача (3.1) имеет классическое решение:

$$f \in C^\alpha(\overline{G})\,,\; \alpha \in (0,\, 1)\,, \quad \longrightarrow \quad v \in C^2(G) \cap C(\overline{G})\,. \tag{3.5}$$

Через $W_2^m(G)$, где m — неотрицательное целое число $(m \in \mathbb{Z}^+)$, обозначено, как обычно [22], [41], пространство Соболева функций $v \in L_2(G)$, имеющих обобщенные производные из $L_2(G)$ до порядка m включительно; норма в нем определяется по формуле

$$\big|\big|v;\, W_2^m(G)\big|\big| \;=\; \Big[\, \int_G \sum_{n=0}^{m} \; \sum_{k\,+\,l\,=\,n} \Big|\partial_x^{k,\,l}\, v\,\Big|^2 dx \Big]^{1/2}\,, \tag{3.6}$$

где k и l — целые числа, принимающие значения от 0 до n. Частные производные обозначены через $\partial_x^{k,\,l} \;:=\; \partial^{\,k\,+\,l} / \,\partial x_1^k\, \partial x_2^l$. Подпространство функций из $W_2^1(G)$ с нулевым следом на Г обозначено $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$. Через $W_2^s(\mathcal{D})$, $s > 0$, обозначено пространство Соболева — Слободецкого [42], [21] функций $\varphi \in L_2(\mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ — многообразие размерности n, для которых конечна норма, определяемая равенством

$$||\varphi; W_2^s(\mathcal{D})|| = \left[||\varphi; W_2^{[s]}(\mathcal{D})||^2 + \int\limits_{\mathcal{D}} \int\limits_{\mathcal{D}} \sum_{k+l=[s]} \frac{\left|\partial_x^{k,l}\varphi(x) - \partial_y^{k,l}\varphi(y)\right|^2}{|x - y|^{n+2\{s\}}} \, dx\, dy \right]^{1/2},$$

где $[s]$ и $\{s\}$ – соответственно целая и дробная части числа s, а первое слагаемое в квадратных скобках определяется формулой (3.6).

3.2. Задача $(\mathfrak{A})_f$. Присоединив к постановке задачи $(\mathfrak{D})_f$ нелокальное условие (1.6), получаем следующую *задачу, называемую* $(\mathfrak{A})_f$:

$$\Delta\, u(x) - a\, u(x) = f(x), \quad x \in G\,, \tag{3.7}$$

$$\int_\Gamma \partial_\nu\, u(x)\, ds = 1\,, \tag{3.8}$$

где параметр a, подчиненный требованию (3.2), и правая часть $f \in L_2(G)$ заданы. Как и в п. 3.1, рассматривается обобщенное из $W_2^1(G)$ решение задачи (3.1), понимаемое как функция $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, удовлетворяющая тождеству (3.3) с заменой v на u. Это решение $u(x)$, как и в п. 3.1, принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \cap W_2^{3/2+\varepsilon}(G)$ с некоторым $\varepsilon > 0$, а его нормальная производная $\partial_\nu u$ согласно (3.4) принадлежит $L_2(\Gamma)$, и, таким образом, интеграл в (3.8) имеет смысл.

Заметим, что поставленная задача $(\mathfrak{A})_f$ разрешима не при любой правой части f из $L_2(G)$. Для того чтобы выяснить условие такой разрешимости, проинтегрируем уравнение (3.7) по области G с учетом формулы Грина и нелокального условия (3.8); в результате получаем

$$\int_G f(x)\, dx + a \int_G u(x)\, dx = 1. \tag{3.9}$$

Подставляя в (3.9) известное представление решения $u(x)$ через функцию Грина $\mathcal{G}_a(x,y)$ задачи (3.7)

$$u(x) = -\int_G f(y)\, \mathcal{G}_a(x,y) dx, \tag{3.10}$$

получаем требуемое условие ее разрешимости, накладываемое на функцию f:

$$\int_G f(x) dx - a \int_G \int_G f(y)\, \mathcal{G}_a(x,y)\, dx\, dy = 1. \tag{3.11}$$

Принимая еще во внимание соотношние (3.5), приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Для существования единственного обобщенного решения $u(x)$ задачи $(\mathfrak{A})_f$ необходимо и достаточно выполнения условия (3.11); при этом $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \cap$*

$W_2^{3/2+\varepsilon}(G)$, $\exists\,\varepsilon > 0$. *Если функция $f(x)$, отвечающая условию (3.11), гёльдерова, то решение задачи $(\mathfrak{A})_f$ принадлежит классу $C^2(G) \cap C(\overline{G})$.*

3.3. Задача $(\mathfrak{A})$ и некоторые свойства ее решения. Рассмотрим частный случай задачи $(\mathfrak{A})_f$, соответствующий постоянной правой части $f(x) \equiv b$ уравнения Гельмгольца (3.7), которое перепишем в виде уравнения Грэда — Шафранова

$$\Delta\, u(x) = a\, u(x) + b, \quad x \in G; \qquad\qquad u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{3.12}$$

$$\int_\Gamma \partial_\nu\, u(x)\, ds \;=\; 1\,, \tag{3.13}$$

где параметр a по–прежнему подчинен требованию (3.2).

Для разрешимости задачи (3.12), (3.13) требуется, согласно теореме 2, выполнение условия (3.11), из которого при $f(x) \equiv b$ получаем следующее выражение для $b = b(a)$:

$$b(a) = \Big[\, |G| - a \int_G \int_G \mathcal{G}_a(x,\, y)\, dxdy \Big]^{-1}. \tag{3.14}$$

Таким образом, приходим к задаче о нахождении функции $u(x)$ из условий (3.12), (3.13) при заданных области G и параметре a; параметр b при этом определяется по формуле (3.14). Такую задачу (см. п. 1.1) называем *задачей* $(\mathfrak{A})$. Из теоремы 2 получаем

Предложение 2. *Решение $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ задачи $(\mathfrak{A})$ существует и единственно.*

Приводимые далее предложения 2 и 3 устанавливают положительность параметра b и правой части

$$j(x) = au(x) + b \tag{3.15}$$

уравнения Грэда–Шафранова при условиях задачи $(\mathfrak{A})$.

Предложение 3. *Параметр b в задаче $(\mathfrak{A})$ положителен.*

□ Заметим, что если $u(x)$ — решение краевой задачи (3.12), то, согласно лемме 1, функция $j(x) := a\,u(x) + b$ является решением задачи (2.3), (2.4). Интегрируя обе части уравнения (3.12) и используя формулу Грина, находим $\int_\Gamma \partial_\nu\, u(x)\, ds \;=\; \int_G j(x)\, dx$, а используя нелокальное условие (3.13), приходим к равенству

$$\int_G j(x)\, dx \;=\; 1. \tag{3.16}$$

Покажем, что величина b не может быть отрицательна. Пусть, напротив, выполняется неравенство $b < 0$. Тогда, функция $\widetilde{j}(x) := -j(x)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta\,\widetilde{j}\,(x) \;-\; a\,\widetilde{j}\,(x) \;=\; 0, \quad x \in G, \qquad \widetilde{j}\,(x) \;=\; \widetilde{b}, \quad x \in \Gamma, \tag{3.17}$$

где $\widetilde{b} := -b > 0$. Для такой задачи, очевидно, выполняются условия (2.6) теоремы 1. Тогда из нее следует, что функция $\widetilde{j}(x)$ положительна везде в G. Последнее утверждение противоречит вытекающему из (3.16) равенству

$$\int_G \widetilde{j}(x)\, dx \;=\; -1. \tag{3.18}$$

Величина b не может быть и равной нулю. Действительно, если $b = 0$, то функция $j(x)$, удовлетворяющая условиям (2.3), (2.4) и отличная в силу равенства (3.16) от тождественного нуля, является собственной функцией оператора Лапласа в G, а величина $(-a)$ должна быть равна одному из собственных чисел этого оператора. Но последнее противоречит принятому условию $a > -\lambda_1$. Таким образом, предположение $b = 0$ неверно. ■

Предложение 4. *Функция $j(x) = au(x) + b$, где $u(x)$ — решение задачи $(\mathfrak{A})$, положительна в $\overline{G}$.*

□ Согласно лемме 1 функция $j(x)$ является решением задачи (2.3), (2.4). Тогда, учитывая, что установленное предложением 3 неравенство $b > 0$ вместе с неравенством (3.2) образуют условия (2.6) теоремы 1, получаем из этой теоремы требуемое утверждение $j(x) > 0,\ x \in \overline{G}$. ■

Заметим, что задача $(\mathfrak{A})$, содержащая нелокальное условие, может быть сведена к задаче $(\mathfrak{D})$, не содержащей такого условия. Действительно, записывая $u(x, a)$ в виде

$$u(x, a) = b(a)\, V(x, a) \tag{3.19}$$

и подставляя его в (3.12), приходим к частному виду (2.21) задачи $(\mathfrak{D})$ относительно функции $V(x, a)$, соответствующему $b = 1$.

Решая задачу (2.21), находим $V(x, a)$. Тогда параметр $b(a)$ вычисляем через нормальную производную функции $V(x, a)$ по следующей вытекающей из (3.19), (3.8) формуле:

$$b\,(a) = \left[\int_\Gamma \partial_\nu V(x, a)\, ds\right]^{-1}, \tag{3.20}$$

а искомое решение $u(x, a)$ задачи $(\mathfrak{A})$ находим по формуле (3.19). Отметим, что формула (3.20) приведена в [16], [19].

3.4. Предельный случай задачи $(\mathfrak{A})$ при $a \to -\lambda_1$. Рассмотрим задачу (2.21) и отметим, что в соответствии с известныи теоретическими положениями [44]–[47] резольвента оператора Лапласа в G с условием $V|_\Gamma = 0$, рассматриваемая как функция параметра a, имеет в точке $a = -\lambda_1$ полюс первого порядка. Отсюда для решения $V(x, a)$ задачи (2.21) и его нормальной производной вытекают оценки:

$$V(x, a) = (a + \lambda_1)^{-1}\, U_1(x) \,+\, O(1), \quad x \in \overline{G}, \qquad a \to -\lambda_1, \tag{3.21}$$

$$\partial_\nu V(x, a) = (a + \lambda_1)^{-1}\, \partial_\nu U_1(x) \,+\, O(1), \quad x \in \Gamma_0, \qquad a \to -\lambda_1, \tag{3.22}$$

где $U_1(x)$ — специальным образом нормированная первая собственная функции для оператора Лапласа в G с однородным условием Дирихле на Γ.

Подставляя асимтотику (3.22) в выражение (3.20), получаем

$$b\,(a) = (a + \lambda_1)\left[\int_\Gamma U_1(x)\, ds\right]^{-1} + O\big[(a + \lambda_1)^2\big] \qquad a \to -\lambda_1. \tag{3.23}$$

Тогда из (3.19) с помощью (3.23) и (3.21) находим, что имеет место следующий равномерный по $x \in \overline{G}$ предел:

$$u(x,-\lambda_1) := \lim_{a\to -\lambda_1} u(x,a) = \widetilde{U}_1(x) \qquad x \in G, \tag{3.24}$$

где $\widetilde{U}_1(x)$ – первая собственная функции для оператора Лапласа в G с однородным условием Дирихле на Γ, отвечающая нормировке $\int_\Gamma \partial_\nu \widetilde{U}_1(x)\,ds = 1$. Таким образом, решение $u(x,a)$ задачи $(\mathfrak{A})$ можно «по непрерывности» доопределить для $a = -\lambda_1$ по формуле (3.24).

Подставляя в равенство $\partial_\nu u(x,a) = b(a)\,\partial_\nu V(x,a)$, получаемое из (3.19), оценки (3.22) и (3.23), находим

$$\partial_\nu u(x,-\lambda_1) := \lim_{a\to -\lambda_1} \partial_\nu u(x,a) = \partial_\nu \widetilde{U}_1(x), \qquad x \in \Gamma_0, \tag{3.25}$$

т.е. нормальная производная решения задачи $(\mathfrak{A})$ имеет при $a \to -\lambda_1$ конечный предел, определяемый по формуле (3.25).

3.5. Асимптотики для задачи $(\mathfrak{A})$ при $a \to \infty$. Получены асимптотики при $a \to \infty$ для решения $u(x,\, a)$ задачи $(\mathfrak{A})$, ее производных $\partial_\nu u(x,\, a)$ и $\frac{d}{da}\,\partial_\nu u(x,a)$, а также для параметра b, функции $j(x;a) = a\,u(x,\, a) + b(a)$ и ее нормальной производной.

Предложение 5. *При условиях задачи $(\mathfrak{A})$ для параметра $b(a)$ из (3.20) и его производной по a справедливы следующие асимптотики:*

$$b(a) \;=\; |\Gamma|^{-1}\sqrt{a} \,+\, \pi|\Gamma|^{-2} \,+\, O\left(a^{-1/2}\right), \qquad a \,\to\, \infty, \tag{3.26}$$

$$\frac{d}{da}b(a) \;=\; \left(2|\Gamma|\,\sqrt{a}\right)^{-1} \,+\, O\left(a^{-3/2}\right), \qquad a \,\to\, \infty, \tag{3.27}$$

где $|\Gamma|$ – длина контура Γ.

$\square$ Подставляя асимптотику (2.23) в выражение (3.20) для $b(a)$ и учитывая формулу (2.26), получаем равенство (3.26). Заменяя в формуле

$$\frac{d}{da}b(a) = \int_\Gamma \frac{d}{da}\partial_\nu V(x,a)ds$$

подынтегральное выражение соотношением (2.24), приходим к требуемому равенству (3.27). $\blacksquare$

Предложение 6. *Для решения $u(x,a)$ задачи $(\mathfrak{A})$ справедлива асимптотика*

$$u(x,a) \;=\; \left(e^{-r\,(x)\,\sqrt{a}} \,-\, 1\right)\Big[\,|\Gamma|^{-1}\,a^{-1/2} \,+\, \pi\,|\Gamma|^{-2}\,a^{-1} \,+\, O\big(a^{-3/2}\big)\Big], \qquad a \,\to\, \infty, \quad x \in G, \tag{3.28}$$

а для его нормальной производной и ее производной по a справедливы следующие асимптотики:

$$\partial_\nu u(x,\, a) \;=\; |\Gamma|^{-1} \,+\, \frac{2\pi|\Gamma|^{-1} \,-\, k\,(x)}{2\,|\Gamma|}\,a^{-1/2} \,+\, O\left(a^{-1}\right), \qquad a \,\to\, \infty, \qquad x \in \Gamma_0, \tag{3.29}$$

$$\frac{d}{da}\,\partial_\nu u(x,\,a) \;=\; \frac{k\,(x)\;-\;2\pi|\Gamma|^{-1}}{4\,|\Gamma|}\,a^{-3/2}\;+\;O\left(a^{-2}\right),\qquad a\to\infty,\qquad x\in\Gamma_0. \tag{3.30}$$

□ Соотношение (3.28) получается подстановкой формул (2.22) и (3.26) в (3.19). Для установления асимптотики величины $\partial_\nu u(x,a)$ подставим соотношения (2.23) и (3.26) для $\partial_\nu V(x,a)$ и $b(a)$ в вытекающую из (3.19) формулу

$$\partial_\nu u(x,a) \;=\; b(a)\,\partial_\nu V(x,a). \tag{3.31}$$

В результате получим требуемую асимптотику (3.29). Дифференцируя (3.31) по a,

$$\frac{d}{da}\,\partial_\nu u(x,a) \;=\; \frac{d}{da}\,b\,(a)\,\partial_\nu V(x,a)\;+\;b\,(a)\,\frac{d}{da}\,\partial_\nu V(x,\,a),$$

и используя здесь указанные выше соотношения (2.23), (2.24), (3.26), (3.27), устанавливаем искомую асимптотику (3.30). ■

Предложение 7. *Для функции $j(x,a)$, связанной с решением задачи $(\mathfrak{A})$ равенством (3.15), внутри области G справедлива асимптотика*

$$j(x;a) \;=\; \frac{\sqrt{a}}{|\Gamma|}\,e^{-r\,(x)\sqrt{a}}\,\Big[1\;+\;O\big(a^{-1/2}\big)\Big],\qquad a\to\infty,\quad x\in G, \tag{3.32}$$

а в точках гладкости границы Γ для этой функции и ее нормальной производной имеют место следующие асимптотики:

$$j(x,\,a)\big|_\Gamma = \;|\Gamma|^{-1}\sqrt{a}\;+\;\pi|\Gamma|^{-2}\;+\;O\left(a^{-1/2}\right),\qquad a\to\infty, \tag{3.33}$$

$$\partial_\nu j(x,\,a) \;=\; a|\Gamma|^{-1}\;-\;\frac{k\,(x)\;-\;2\pi|\Gamma|^{-1}}{2\,|\Gamma|}\,a^{1/2}\;+\;O\left(1\right),\qquad a\to\infty,\quad x\in\Gamma_0. \tag{3.34}$$

□ Формула (3.32) получается из (2.22), (3.15), (3.19). Из равенства (3.15) с учетом краевого условия из (3.12) находим

$$j(x,a)\big|_\Gamma = b(a),\qquad \partial_\nu j(x,a) = a\,\partial_\nu u(x,a). \tag{3.35}$$

Соотношение (3.33) вытекает из первого равенства (3.35) и асимптотики (3.26) для $b(a)$, а соотношение (3.34) – из второго равенства (3.35) и асимптотики (3.29) для $\partial_\nu u(x,a)$. ■

Асимптотики (3.32)-(3.34) означают, что для тока имеет место погранслойный эффект: при возрастании параметра a значение тока в области экспоненциально падает, при этом на границе он растет как $\sqrt{a}$, а его нормальная производная — как a.

4. Постановка и решение задачи $(\mathfrak{A}^{-1})$

4.1. Замечания о монотонности нормальной производной. Обозначим через $\mu = \mu_x\,(a)$ нормальную производную $\partial_\nu u(x,a)$ решения задачи $(\mathfrak{A})$ в точке $x\in\Gamma_0$, рассматриваемую как функцию параметра a, и перепишем асимптотики (3.29), (3.30) для этой функции с учетом равенства (2.27),

$$\mu_x(a) = |\Gamma|^{-1} + \frac{\widehat{k} - k(x)}{2|\Gamma|} a^{-1/2} + O\left(a^{-1}\right), \qquad a \to \infty, \qquad x \in \Gamma_0, \tag{4.1}$$

$$\frac{d}{da}\mu_x(a) = \frac{k(x) - \widehat{k}}{4|\Gamma|} a^{-3/2} + O\left(a^{-2}\right), \qquad a \to \infty, \qquad x \in \Gamma_0. \tag{4.2}$$

Из асимптотики (4.1) следует, что функция $\mu = \mu_x(a)$ во всех точках x гладкости контура Γ стремится при $a \to \infty$ к одному и тому же пределу $|\Gamma|^{-1}$, а из оценки (4.2) вытекает, что для любой точки $x \in \Gamma_0$, кривизна $k(x)$ в которой отлична от средней $\widehat{k}$, существует такое число

$$a^* = a^*(x, G) \in (-\lambda_1, +\infty),$$

что функция $\mu_x(a)$ является строго монотонной на полуинтервале $[a^*, +\infty)$; при этом для всех $a > a^*$ функция $\mu_x(a)$ строго возрастает, если $k(x) > \widehat{k}$, и строго убывает, если $k(x) < \widehat{k}$.

Пусть для некоторой точки x гладкости границы Γ выбранной области G продолжение зависимости $\mu = \mu_x(a)$ с полуинтервала $[a^*, +\infty)$ на весь интервал $(-\lambda_1, +\infty)$ изменения параметра a также окажется строго монотонным. Тогда функция $\mu = \mu_x(a)$ взаимно однозначно отображает интервал $(-\lambda_1, +\infty)$ на интервал $\mathcal{I}(x)$, один из концов которого (нижний при $k(x) < \widehat{k}$ и верхний при $k(x) > \widehat{k}$) в соответствии с (4.1) равен $|\Gamma|^{-1}$, а второй конец согласно равенству (3.25) равен $\partial_\nu \widetilde{U}_1(x)$, т.е. интервал $\mathcal{I}(x)$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{I}(x) = \begin{cases} \left(|\Gamma|^{-1},\ \partial_\nu \widetilde{U}_1(x)\right), & k(x) < \widehat{k}, \\ \left(\partial_\nu \widetilde{U}_1(x),\ |\Gamma|^{-1}\right), & \widehat{k} < k(x). \end{cases} \tag{4.3}$$

Строгая монотонность функции $\mu = \mu_x(a)$ для $x \in \Gamma_0$ означает, что для этой точки существует обратная к ней функция $a = a_x(\mu)$, отображающая $\mathcal{I}(x)$ на $(-\lambda_1, +\infty)$,

$$a_x : \mathcal{I}(x) \ni \mu \longmapsto a \in (-\lambda_1, +\infty), \tag{4.4}$$

которая по заданному значению $\mu = \partial_\nu u(x, a)$ позволяет найти параметр a в уравнении (3.12).

4.2. Формулировка задачи $(\mathfrak{A}^{-1})$, условие ее разрешимости и метод решения. Обозначим через $\widetilde{\Gamma}$ множество всех $x \in \Gamma_0$, для которых функция $\mu = \mu_x(a)$ строго монотонна на всем интервале $(-\lambda_1, +\infty)$ изменения параметра a.

Используя приведенные в п. 4.1 рассуждения, мы прежде всего можем сформулировать постановку обратной задачи, избавленную от указанной в п. 1.3 неопределенности, следующим образом: *задача $(\mathfrak{A}^{-1})$ заключается в нахождении параметра a уравнения (3.12) по заданному значению нормальной производной $\partial_\nu u(x, a)$ в точке $x \in \widetilde{\Gamma}$ решения $u(x, a)$ задачи $(\mathfrak{A})$, которая определяется условиями (3.12)–(3.13).*

Обозначая, как и выше, $\mu = \partial_\nu u(x, a)$, где $x \in \widetilde{\Gamma}$, получаем из рассуждений п. 4.1 следующее

Предложение 8. *Для однозначной разрешимости задачи ($\mathfrak{A}^{-1}$) необходимо и достаточно, чтобы μ принадлежало интервалу $\mathfrak{I}(x)$, вычисляемому по формуле (4.3).*

Наконец, в п. 4.1 показано, как можно построить функцию (4.4), которая по заданному значению $\mu = \partial_\nu u(x, a)$ позволяет найти параметр a и, тем самым, дает решение задачи ($\mathfrak{A}^{-1}$).

4.3. Нахождение множества $\widetilde{\Gamma}$. Приведенные формулировки задачи ($\mathfrak{A}^{-1}$), предложения 8 и метода ее решения предполагают, что для рассматриваемой области G множество $\widetilde{\Gamma}$ непусто, и известна хотя бы одна его точка x.

Заметим, что для круга множество $\widetilde{\Gamma}$ пусто, поскольку для него нормальная производная решения задачи ($\mathfrak{A}$) не зависит от a и во всех точках границы равна $|\Gamma|^{-1}$. Таким образом, для круга радиуса R задача ($\mathfrak{A}^{-1}$) не имеет решения, если для какой–либо точки его границы положить μ равным числу, отличному от $(2\pi R)^{-1}$; если же принять $\mu = (2\pi R)^{-1}$, то задача ($\mathfrak{A}^{-1}$) имеет бесконечное множество решений: a может быть равно любому числу из интервала $(-\lambda_1, +\infty)$.

Для областей G, определенных в п. 2.1, нахождение точек $x \in \widetilde{\Gamma}$ осуществляется в настоящей работе с помощью следующего предложенного в [48] подхода. На границе Γ задается набор точек $x_j \in \Gamma_0$, $j = \overline{1, J}$, так что (измеряемые по кривой Γ) расстояния между x_j и x_{j+1} примерно одинаковы для всех j, т.е. на Γ создается (одномерная) сетка S_J. Для всех точек этой сетки строится зависимость $\mu = \mu_x(a)$, причем для полуинтервала $(-\lambda_1, a^*]$ эта зависимость получается численным образом, с помощью метода мультиполей [49], [50], обеспечивающего высокую точность вычисления нормальной производной решения задачи ($\mathfrak{A}$), а для полуинтервала $[a^*, +\infty)$ эта зависимость полагается равной первым двум членам асимптотики (4.1). Выбор точки a^* осуществляется на основе согласования результатов для $\mu_x(a)$, получаемых численным и асимптотическим путем. При необходимости, сетка S_J сгущается, т.е. увеличивается число J.

С помощью изложенного подхода в настоящей работе было установлено существование (непустого) множества $\widetilde{\Gamma}$ для весьма широкого класса областей, отличных от круга. Это позволяет предположить, что множество $\widetilde{\Gamma}$ существует для любой отличной от круга области G, удовлетворяющей указанным в начале п. 2.1 условиям.

Если для выбранной области G хотя бы одна точка $x \in \Gamma_0$ найдена, то решение задачи ($\mathfrak{A}^{-1}$) для этой области получается с помощью метода, изложенного в п. 4.2. Численная реализация этого метода, включающая решение задачи ($\mathfrak{A}$) для каждой из выбранных областей при различных значениях параметра a в широком диапазоне его изменения, была осуществлена для большого набора областей, удовлетворяющих указанным в начале п. 2.1 условиям, в работах [51]-[53].

Литература

1. Тамм И.Е., Сахаров А.Д. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 1 / М.: АН СССР, 1958.

2. Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции / М.: Физматгиз, 1963.

3. White R.B. Theory of Tokamak Plasmas / Amsterdam, Oxford, New-York, Tokio: North-Holland, 1989.

4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред / М.: Гостехиздат, 1957. (2-е изд.: М.: Наука, 1982).

5. Сыроватский С.И. Магнитная гидродинамика // Успехи физ. наук. – 1957. – 62;3. – С.247-290.

6. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика / М.: Физматгиз, 1962. (2-е изд.: М.: Логос, 2005).

7. Половин Р.В., Демуцкий В.П. Основы магнитной гидродинамики / М.: Энергоатомиздат, 1987.

8. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику / М.: Физматлит, 2006.

9. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной гидродинамики / М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.

10. Shafranov V.D. On equilibrium magnetohydrodynamic configurations // Terzo Congresso Internazionale Sui Fenomeni D'ionizzazione Nei Gas, tenuto a Venezia dall'11 al 15 giugno. 1957 / Milano: 1957, P.990-997.

11. Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1957. – 33;3(9). – С.710-722.

12. Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields // Proceedings of the 2nd United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy. 1958. Geneva / V.31. – P.190 / New York: Columbia University Press, 1959.

13. Шафранов В.Д. Равновесие плазмы в магнитном поле //Вопросы теории плазмы. – Вып.2. – С.92-131 /М.: Госатомиздат, 1963.

14. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы / М.: Наука, 1993.

15. Vogelius M. An inverse problem for the equation $\Delta u = -cu - d$ // Ann. Inst. Fourier. – 1994. – 44;4. – P.1181-1204.

16. Демидов А.С. Об обратной задаче для уравнения Грэда-Шафранова с аффинной правой частью // Успехи Матем. Наук. – 2000. – 55;6. – С.131-132.

17. Dalmasso R. An inverse problem for the elliptic equation with an affine form // Math. Ann. – 2000. – 316. – P.771-792.

18. Demidov A. On the inverse problem for the Grad-Shafranov equation with affine right-hand side // 2nd Conference on Inverse Problems, Control and Shape Optimization. Carthage, Tunisie, April 10-12, 2002. P.93-94.

19. Demidov A.S., Moussaoui M. An inverse problem originating from magnetohydrodynamics // Inverse Problems. – 2004. – 20. – P.137-154.

20. Demidov A.S., Kochurov A.S., Popov A.Yu. To the problem of the recovery of non-linearities in equations of mathematical physics // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – 163;1. – P.46-77.

21. Демидов А.С. Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций // Успехи матем. наук. – 2010. – 65;1. – С.3-96.

22. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964.

23. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / М.: Наука, 1983.

24. Giraud G. Généralisation des problémes sur les opérations du type elliptique // Bull. Sc. Math. – 1932. – 56. – P.316-352.

25. Giraud G. Problémes de valeurs á la frontiére relatifs á certaines données discontinues // Bull. Soc. Math. de France. – 1933. – 61. – P.1-54.

26. Hopf E. A remark on lenear elliptic differential equations of second order // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – 3. – P.791-793.

27. Олейник О.А. О свойствах решений некоторых задач для уравнений эллиптического типа // Матем. Сб. – 1952. – 30;3. – С.695.

28. Миранда Л. Уравнения с частными производными эллиптического типа / М.: Изд-во иностранной литературы, 1977.

29. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра ортогональные многочлены / М.: Наука, 1974.

30. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики / М.: Высшая школа, 1970.

31. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / М.: Наука, 1974.

32. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / М.: Наука, 1989.

33. Nirenberg L. Remarks on strongly elliptic partial differential equations // Comm. Appl. Math. – 1955. – 8. – P.648-674.

34. Browder F.E. On regularity properties of solutions of elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1956. – 9. – P.351-361.

35. Lions J.L.Lectures on elliptic differential equations / Bombay: Tata Institute of Fundamental Research,1957.

36. Schechter M. General boundary value problems for elliptic partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1959. – 12. – P.457-486.

37. Agmon S. The L_p approach to the Dirichlet problem // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). – 1959. – 13. – P.49-92.

38. Peetre J. Théorèms ds régularite pour quelques classes d'opérateurs defférentiells / Thesis. Lund, 1959.

39. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными / М.: Мир, 1966.

40. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптическме краевые задачи в областях с кусочно гладкой границей / М.: Наука, 1991.

41. Adams R. Sobolev spaces / New York - San Francisco - London: Academic Press, 1975.

42. Слободецкий Л.Н. Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та. – 1958. – 197. – С.54-112.

43. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / М.: Мир, 1973.

44. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / М.: Наука, 1965.

45. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Том II. Спектральная теория / М.: Мир, 1966.

46. Hërmander L. The analysis of linear partial differential operators. Volumes I-IV / Berlin-New York: Springer-Verlag, 1983–1985.

47. Агранович М.С. Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 63 / М.: ВИНИТИ, 1990. – С.5-129.

48. Безродных С.И., Власов В.И., Демидов А.С. Применение метода мультиполей к модельной задаче о равновесии плазмы // Конференция «Молодежь в науке», Саров, 30 октября - 1 ноября 2007 г. / Тезисы докладов. С.8.

49. Власов В.И. Краевые задачи в областях с криволинейной границей / М.: ВЦ АН СССР, 1987.

50. Vlasov V.I. Multipole method for solving some boundary value problems in complex-shaped domains // Zeitshr. Angew. Math. Mech. – 1996. – 76;Suppl.1. – P.279-282.

51. Безродных С.И., Власов В.И., А.С.Демидов Об обратной задаче для уравнения Грэда-Шафранова // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию Л.С.Понтрягина. Москва, 17-22 июня 2008 г / Тезисы докладов. С.96.

52. Безродных С.И., Власов В.И., Демидов А.С. Обратная задача для уравнения Грэда–Шафранова // Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего. Москва, 30 марта – 2 апреля 2009 г. / Тезисы докладов. С.132.

53. Безродных С.И., Власов В.И. Об одной эллиптической краевой задаче // The Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Moscow, Russia. August 14-21, 2011 / Abstracts. P.83-84.

INVERSE PROBLEM FOR THE GRAD-SHAFRANOV EQUATION WITH NONLOCAL CONDITION

S.I. Bezrodnykh*,, V.I. Vlasov***

*Dorodnitsyn's Computing Centre, Russian Academy of Sciences,
Vavilova St., 40, Moscow, 119333, Russia, e-mail: vlasov@ccas.ru;
**Sternberg's Astronomical Institute, MSU,
Universitetskii Av., 13 Moscow, 119992, Russia, e-mail: sergeyib@pochta.ru

Abstract. Inverse problem for the Grad-Shafranov equation with affine right-hand side $\Delta u = au+b$ is considered in plane simply connected domains with piecewise smooth boundary Γ where the uniform Dirichlet condition is prescribed. The problem under consideration appears when the plasma flow in tokamak is studied. It consists of finding the parameters a and b on the basis of information about the normal derivative $\partial_\nu u(x)$ on Γ. In present work it is found that the parameters may be obtained using the nonlocal condition $\int_\Gamma \partial_\nu u(x)\,ds = 1$ and the prescribed value of normal derivative $\partial_\nu u(x)$ in arbitrary point x from the special set $\widetilde{\Gamma}$ which contains in Γ. For this, it is necessary and sufficient that the value $\partial_\nu u(x)$ should be in the special interval $\mathcal{J}(x)$ which depends on $x \in \widetilde{\Gamma}$. These results are obtained using the multipole method which ensures high accurate computation of the normal derivative $\partial_\nu u(x)$ when the above mentioned nonlocal condition holds. Besides, it is used the derived asymptotics of $\partial_\nu u(x)$ and $\frac{d}{da}\,\partial_\nu u(x)$, $x \in \Gamma$ at $a \to \infty$.

Key words: Grad-Shafranov's equation, inverse problems, nonlocal conditions, multipole method.