КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 681.33

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н. И. КОРСУНОВ
А. И. СКАНДАКОВ
А. А. СЛОБОДЮК

Белгородский государственный университет

e-mail: korsunov@intbel.ru

В статье рассматривается метод решения систем линейных алгебраических уравнений при получении заданного значения одной из компонент вектора решений без использования ситуационных процедур для нахождения изменений вектора свободных членов.

Ключевые слова: система алгебраических уравнений, вектор решения, вектор свободных членов.

Многочисленные задачи в технических и экономических системах связаны с решением систем линейных алгебраических уравнений [1]. В ряде случаев необходимо в системе, описываемой линейными алгебраическими уравнениями, одним из них:

$$AX = F, \tag{1}$$

обеспечить требуемое значение некоторой компоненты X_i^* вектора решения X^* системы (1) за счет изменения компонентов вектора свободных членов F при неизменной матрице коэффициентов «А», и при этом должно выполняться условие изменения компонентов решения X_k^* в направлении изменения X_i^* (С ≠К).

Примерами подобных задач являются электрические линии, газопроводы, теплопроводы и другие [2], в которых требуется обеспечить необходимое значение компонентов X_i за счет подключения/отключения в активных узлах дополнительных источников энергии.

Активным узлом будем называть топологический узел, к которому подключен источник энергии, другие узлы будем называть пассивными. Применительно к системе (1), ненулевые компоненты вектора свободных членов, не равные нулю, относятся к активным узлам, и при этом любая компонента вектора $f_i > 0$, а компоненты вектора $f_k = 0$ относятся к пассивным узлам.

Как правило, подобные задачи связаны с решением систем линейных алгебраических уравнений больших размерностей.

В данной постановке задача сводится к нахождению такого вектора свободных членов, обеспечивающих решение системы (1) с заданным значением компоненты:

$$x_i = x_i^* + \Delta x_i \ , \qquad (2)$$

где X_i^* – решение системы (1) при векторе свободных членов F_i^*. Подобная задача относится к некорректным, так как кроме нахождения вектора решения X необходимо найти

$$F = F^* + \Delta F. \qquad (3)$$

Применение численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений даже невысокого порядка приводит к NP полной проблемы.

Целью исследований, приведенных в этой статье, является разработка аналитико-численного метода решения, позволяющего исключить NP полную проблему нахождения вектора свободных членов.

Исходной предпосылкой для решения данной задачи является то, что известно решение X^* системы линейных алгебраических уравнений (1) с вектором свободных членов F^*. Для нахождения решения X^* можно воспользоваться численным решением системы (1). В случае большого порядка системы (1) целесообразно воспользоваться нейросетевыми технологиями решения системы линейных алгебраических уравнений [3], так как в этом случае при естественном распараллеливании вычислительных процессов при обучении сети допустимо разбиение системы уравнений большой размерности на подсистемы меньшей размерности.

В этом случае поставленная задача может быть сформулирована следующим образом: по известному решению X^* системы (1) с вектором свободных членов F^* определить изменение компонентов вектора свободных членов в виде (3), обеспечивающих решение системы(1) в виде (2) с заданным значением компоненты X_i.

Предлагаемый аналитико-численный метод решения систем линейных алгебраических уравнений базируется на следующей теореме:

Для того, чтобы изменение вектора свободных членов линейной системы алгебраических уравнений задавало изменение вектора ее решения, необходимо и достаточно равенство компонентов приращений вектора решений и свободных членов отличных от нуля.

Доказательство необходимости.

Пусть в i-ом уравнении СЛАУ изменилась компонента f_i вектора свободных членов на величину Δf_i. Очевидно, что изменение компоненты вектора свободных членов приведет к изменению компонент вектора X, так что

$$x_i = x_i + \Delta x_i.$$

Тогда i-е уравнение системы представляется как:

$$a_{1i}x_1 + a_{1i}\Delta x_1 + a_{2i}x_2 + a_{2i}\Delta x_2 + \ldots + a_{ni}x_n + a_{ni}\Delta x_n = f_i + \Delta f_i,$$

либо

$$a_{1i}(1+\frac{\Delta x_1}{x_1})x_1 + a_{2i}(1+\frac{\Delta x_2}{x_2})x_2 + \ldots + a_{ni}(1+\frac{\Delta x_n}{x_n})x_n = f_i(1+\frac{\Delta f_i}{f_i}).$$

Для того, чтобы последнее уравнение при любых значениях Δf_i, Δx_i было тождественно уравнению при $\Delta f_i=0$ и $\Delta x_i=0$, необходимо, чтобы

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} = \frac{\Delta f_i}{f_i}.$$

Доказательство достаточности.

Пусть вектор свободных членов имеет только i-ю компоненту, отличную от нуля. Из условия необходимости следует, что $x_i = x_i(1+\frac{\Delta f_i}{f_i})$. А так как все другие компоненты вектора свободных членов равны нулю, то для k-го уравнения системы имеем:

$$a_{1k}(1+\frac{\Delta f_i}{f_i})x_1 + a_{2k}(1+\frac{\Delta f_i}{f_i})x_2 + \ldots + a_{nk}(1+\frac{\Delta f_i}{f_i})x_n = (1+\frac{\Delta f_i}{f_i})(a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + \ldots + a_{nk}x_n).$$

Но по условию выражение $\sum_{j=1}^{n} a_{jk}x_j = 0$, следовательно, и выражение $a_{1k}(1+\frac{\Delta f_i}{f_i})x_1 + a_{2k}(1+\frac{\Delta f_i}{f_i})x_2 + \ldots + a_{nk}(1+\frac{\Delta f_i}{f_i})x_n$ равно нулю.

Пусть теперь в системе из n уравнений имеется m уравнений, у которых компоненты вектора свободных членов не равны нулю. В этом случае имеем m уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}(1+\frac{\Delta x_j}{x_j})x_j = (1+\frac{\Delta f_i}{f_i})f_i\ ,\ i=\overline{1,m} \tag{4}$$

и k=n-m уравнений, у которых свободные члены равны нулю, что дает

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}(1+\frac{\Delta x_j}{x_j})x_j = 0\ ,\ i=\overline{m+1,n}. \tag{5}$$

Так как $\frac{\Delta x_j}{x_j} = 1 + \frac{\Delta f_m}{f_m}$, то при $x_j = x_j^* + \Delta x_j = (1+\frac{\Delta x_j}{x_j^*})x_j$ уравнения (4), (5) превращаются в тождества при любых f_i, если $\frac{\Delta f_i}{f_i} = \frac{\Delta f_k}{f_k}$ для всех i≠k, $i=\overline{1,n}$.

Теорема доказана.

Следствие.

Получение заданного изменения i-й компоненты решения системы линейных алгебраических уравнений ведет к изменению других компонент вектора решений и вектора свободных членов, не равных нулю, пропорционально относительному изменению i-й компоненты свободных членов.

Действительно, если задано требуемое решение системы линейных алгебраических уравнений с компонентой X_i, то при известном решении X^* системы (1) с вектором свободных членов F^* приращение j-й компоненты решения:

$$\Delta x_i = x_j - x_j^*.$$

И в соответствии с доказанной теоремой относительно приращения данной компоненты

$$\overline{\Delta x_j} = \frac{\Delta x_j}{x_j^*} = \frac{\Delta x_k}{x_k^*} = \frac{\Delta f_i}{f_i} = \frac{\Delta f_m}{f_m}, \tag{6}$$

где индексы i,m округляют соответствующее уравнение системы (1), а индекс j округляет соответствующее относительное приращение компонент вектора решений системы с вектором свободных членов (3).

Используя (6), по известному относительному приращению $\overline{\Delta x_j}$ могут быть определены относительные приращения Δx_k других компонент вектора решений и относительные приращения Δf_i, $(i=\overline{1,n})$ компонент вектора свободных членов, не равных нулю, и найдены необходимые значения компонентов вектора свободных членов

$$f_i = f_i^* + \frac{\Delta x_i}{x_i^*} f_i^*, \; f_i^* \neq 0$$

и компонентов вектора решений

$$x_k = x_k^* + \frac{\Delta x_i}{x_i^*} x_k^*.$$

Для иллюстрации работоспособности предложенного метода, не теряя общности, рассмотрим простой пример.

Пусть будет задача система линейных алгебраических уравнений

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1,3,$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0,3;$$

решением которой являются

$$x_1^* = 0,1; x_2^* = 0,2; x_3^* = 0,3.$$

Необходимо найти вектор свободных членов и решение полученной системы такое, чтобы

$$x_1 = \frac{15}{13} \times 0,1.$$

Определив приращение $\Delta x_1 = x_1 - x^*$, находим $\overline{\Delta x_1} = \frac{2}{13}$

Тогда

$$\frac{\Delta f_i}{f_i^*} = \frac{2}{13}; \frac{\Delta x_j}{x_j^*} = \frac{2}{13}; j = 2,3; i = 1,3$$

и

$$f_1 = \frac{15}{13} f_1^* = \frac{15}{13} \times 1,3 = 1,5; f_2 = 0,$$
$$f_3 = \frac{15}{13} f_3^* = \frac{15}{13} \times 0,3 = \frac{4,5}{13},$$
$$x_2 = \frac{15}{13} x_2^* = \frac{3}{13}; x_3 = \frac{15}{13} x_3^* = \frac{4,5}{13}.$$

Нетрудно проверить, что при решении системы

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1,5,$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = \frac{4,5}{13};$$

будут определены значения

$$x_1 = \frac{15}{13} x_1^*, x_2 = \frac{15}{13} x_2^* \text{ и } x_3 = \frac{15}{13} x_3^*.$$

Таким образом, предложенный метод аналитико-численного решения систем линейных алгебраических уравнений позволяет определить вектор свободных членов F, с которым обеспечивается решение системы линейных алгебраических уравнений с заданным значением компоненты решения, не прибегая к многократным решениям системы линейных алгебраических уравнений большой размерности, и исключить необходимость решения NP полной проблемы.

Литература

1. Гутер Р.С., Овгинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. – М.: Наука, 1970.
2. Пухов Г.Е., Кулик М.Н. Гибридное моделирование в энергетике. – К.: Наукова думка, 1970.
3. Корсунов Н.И. Научные ведомости БелГУ. – 2010. – №2.

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHOD FOR SOLVING SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

N. I. KORSUNOV
A. I. SKANDAKOV
A. A. SLOBODYK

Belgorod State University

e-mail: korsunov@intbel.ru

This article describes a method for solving systems of linear algebraic equations for obtaining a given value of one of the components of the vector solutions without the use of situational procedures for finding the change of the vector of absolute terms.

Key words: system of the algebraic equations, decision vector, vector of free members.